А. Ж. ЖАФЯРОВ

МАТЕМАТИКА. ЕГЭ
Решение задач уровня С3

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

СИБИРСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
ГОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЫВИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КУЙБЫШЕВСКИЙ ФИЛИАЛ ГОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
УЧРЕЖДЕНИЕ РАО «ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ»

А. Ж. Жафяров

МАТЕМАТИКА. ЕГЭ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УРОВНЯ С3

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК – 2010

УДК 53 (075.23)
ББК 74.202.52р30 + 22.1р30
Ж 12

Рецензенты:

кафедра геометрии и методики преподавания математики НГПУ;

доктор физико-математических наук,
профессор Новосибирского государственного педагогического университета
В. Л. Селиванов

Жафяров, А. Ж.

Ж 12 Математика ЕГЭ. Решение задач уровня С3: учебное пособие [Текст] / А. Ж. Жафяров. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2010. — 181 с.

ISBN 978-5-379-01414-8

Пособие посвящено решению типов задач ЕГЭ уровня С3. Приведены решения 117 задач и рекомендованы для самостоятельного решения 86 задач. Освоившие на творческом уровне эти 203 задачи не только уверенно решат задачи типа С1 и С3 любого года ЕГЭ, но и получат задел для успешного решения задач уровня С5, что будет способствовать развитию математического мышления.

Пособие будет полезно учащимся для самообучения, а также учителям математики для организации самостоятельной работы.

УДК 53 (075.23)
ББК 74.202.52р30 + 22.1р30

ISBN 978-5-379-01414-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Математика играет очень важную роль как в подготовке квалифицированных кадров, так и во всей экономико-технической деятельности нашей страны и человечества в целом.

Как следствие указанной значимости математики стало принятие решения об обязательной сдаче ЕГЭ всеми выпускниками школ, лицеев, гимназий и т. д.

Успешная сдача ЕГЭ в основном зависит от умения решать задачи уровня С, т. к. эти пять задач дают 33 % от всей суммы баллов.

Задачи уровня С3 дают 9 баллов, кроме того они служат основой для решения задач уровня С5.

Задачи уровня С, как правило, содержат параметры, поэтому вызывают трудности у выпускников. Число таких задач и их качество возрастает из года в год. Это связано с тем, что задачи с параметрами способствуют выявлению вариативного мышления и фундаментальности знаний, тем самым позволяют найти качественного абитуриента. Все вузы стараются набрать студентов именно из таких абитуриентов, чтобы выполнить свою основную миссию - подготовить качественные кадры.

Трудности сдачи ЕГЭ вызваны и тем, что на сегодняшний день нет ни одного школьного учебника по математике, которая имела бы систему подготовки учащихся к решению задач с параметрами. Большинство учителей так же, как и учащиеся, не владеют материалом. Результатом этого негатива является то, что в 2008 году на ЕГЭ по математике получили двойки: 30% выпукусников по России и 50% выпускников Новосибирской области.

Предложенные здесь задачи содержат параметры и составлены на основе одного, двух и более компетенций (стандартов). Эти стандарты разработаны по всем 7 школьным темам в соответствии с требованиями ЕГЭ. Такие важные типы задач, как задачи на целочисленность переменной и параметра, на кванторы, принцип необходимости и достаточности, не изучаемые во многих школах, нашли свое место в данном пособии. По каждому подвиду даны решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами и указаниями. Поэтому пособие будет полезным не только как источник информации, но и для организации самостоятельной работы и обучения через деятельность.

Глава 1. Решение типов задач уровня С3

Здесь разобраны задачи двух типов: первый – задачи без параметров, но содержащие 2–3 "изюминки"; второй – задачи с параметрами, в которых задействован хотя бы один элемент из арсенала: равносильность, целочисленность, кванторы, экстремальность, принцип необходимости и достаточности, графическая оценка числа решений и т.д.

Пример 1. Докажите, что система

$$\begin{cases} x^3+\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2+y=\dfrac{35}{8}-x^2, \\ 1-\cos 2\pi x+3\cos^2 2\pi x=-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. 1. Упростим данные уравнения. Первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -2\le x\le 2, \\ x^3+y=\dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Второе представим в виде

$$2\sin^2 \pi x+3\cos^2 2\pi x=-\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Оно имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sin^2 \pi x=1, \\ \cos^2 2\pi x=1, \\ x=-y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z, \\ 2\pi x=\pi n,\ n\in Z, \\ x=-y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+k,\ k\in Z, \\ y=-\dfrac{1}{2}-k. \end{cases}$$

2. Найдем решение системы

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ x = -y, \\ x^3 - x = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

$x = -\dfrac{1}{2}$ является решением уравнения $x^3 - x - \dfrac{3}{8} = 0$. Тогда из равенств

$$x^3 - x - \frac{3}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = 0$$

следует:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_{2,3} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}.$$

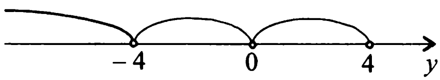
Заметим, что x не может быть равным $\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{4}$, т.к. из равенства $x = \dfrac{1}{2} + k$, $k \in Z$, следует, что x – рациональное число. Тогда $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$ – единственное решение данной системы. Задача решена.

Пример 2. Решите в целых числах систему

$$\begin{cases} xy > 0, \\ \log_3 \dfrac{16y - y^3}{x+1} = 2 - 2\log_9 (4 - y). \end{cases}$$

Решение. 1. Заметим, что решение данной системы следует искать, только среди тех целых значений x и y, которые удовлетворяют условиям

$y < 4$, $\dfrac{16y - y^3}{x+1} > 0$,



Если $y \in (0; 4) \cup (-\infty; -4)$, то $16y - y^3 > 0$, поэтому должно быть $x > -1$. Если же $y \in (-4; 0)$, то $x < -1$. Итак, должно быть выполнено либо а), либо б):

а) $\begin{cases} x < -1, \\ -4 < y < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > -1, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < y < 4, \\ y < -4. \end{array}\right. \end{cases}$

Из уравнения данной системы следует:

$$\frac{16y - y^3}{x+1} = \frac{9}{4-y} \Leftrightarrow (4+y)y(4-y)^2 = 9(x+1). \qquad (1)$$

2. Найдем решение системы, считая выполненным а) или б).

Пусть имеет место а), тогда $y \in \{-3; -2; -1\}$.

Вычислим значение x из (1) при значениях $y \in \{-3; -2; -1\}$. Если $y = -3$, то $1 \cdot (-3) \cdot 49 = 9(x+1)$, которое не имеет решения в целых числах. Поэтому $y \neq -3$.

Пусть $y = -2$, тогда

$$2 \cdot (-2) \cdot 36 = 9(x+1) \Leftrightarrow -16 = x+1 \Leftrightarrow x = -17.$$

Следовательно, $x = -17$, $y = -2$ – решение данной системы, т.к. $xy > 0$ и $-17 < -1$.

Наконец, пусть $y = -1$, тогда $3 \cdot (-1) \cdot 25 = 9(x+1)$. Это уравнение не имеет решения в целых числах, поэтому $y \neq -1$.

Пусть имеет место б). Т.к. $xy > 0$, то $x \in N$, $y \in \{1, 2, 3\}$. При $y = 1$ из (1) следует: $5 \cdot 1 \cdot 9 = 9(x+1)$, $x = 4$, (4; 1) – решение.

Если $y = 2$, то $6 \cdot 2 \cdot 4 = 9(x+1)$ – не имеет решения в целых числах, поэтому $y \neq 2$.

Если $y = 3$, то $49 \cdot 3 \cdot 1 = 9(x+1)$. По той же причине $y \neq 3$.

Ответ: (–17; –2), (4; 1).

Пример 3. Найдите сумму всех целых значений параметра $a \in (-7;6]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2 - a^2\right)\log_{a^2}\left(x^2 - 4\right) = 0 \qquad (1)$$

имеет: а) два и только два корня; б) четыре и только четыре корня; в) один и только один корень.

Решение. 1. Решение следует искать среди тех значений a и x, которые удовлетворяют условиям (см. рис. 1 и 2):

$$|x| > 2,\ a \notin \{0,\ 1,\ -1\} \qquad (2)$$

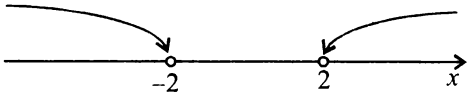


Рис. 1

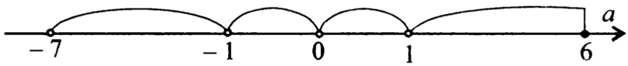


Рис. 2

2. С учетом (2) уравнение (1) равносильно

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = a, \\ x_2 = -a, \\ x^2 - 4 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = a, \\ x_2 = -a, \\ x_3 = \sqrt{5}, \\ x_4 = -\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

3. Ответ для задачи а) без учета целочисленности параметра a:

$$a \in \left\{\sqrt{5};\ -\sqrt{5}\right\} \cup \left[-2;\ -1\right) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup \left(1;2\right].$$

Следовательно, в рассматриваемом случае параметр a может принимать лишь два целочисленных значения: $a = -2$ и $a = 2$. Их сумма равна нулю (см. рис. 2).

4. Ответ для задачи б) без учета целочисленности a:

$$a \in \left(-7;\ -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5};\ -2\right) \cup \left(2;\ \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5};\ 6\right].$$

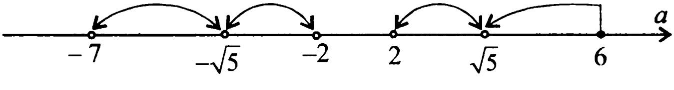


Рис. 3

С учетом целочисленности имеем (см. рис. 3):

$$a \in \{-6, -5, -4, -3\} \cup \{3, 4, 5, 6\}.$$

Сумма всех целочисленных значений a равна 0.

5. Ответ для задачи в). Из вида уравнения (1) следует: если $x = x_0$ – корень, то $x = -x_0$ – корень (1). Тогда для единственности решения уравнения (1) необходимо равенство $x = x_0 = 0$. Но $x = 0$ не принадлежит области определения $|x| > 2$ данного уравнения. Иначе говоря, нет таких значений a, т.е. $\varnothing$ – пустое множество является ответом для этого случая.

Ответ: а) 0; б) 0; в) нет таких значений a.

Пример 4. Найдите целочисленные решения системы

$$\begin{cases} y^3 + xy^4 - y - 3y^4 = \sqrt{(x-3)(y^2+2y+3)}, & (1) \\ (x+9)(x+3)(x-2)(x-6) + 24x^2 = 0. & (2) \end{cases}$$

Решение. 1. Найдем целочисленные решения уравнения (2).

$$\big((x+9)(x-2)\big)\big((x+3)(x-6)\big) = -24x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 18 + 7x)(x^2 - 18 - 3x) = -24x^2.$$

Значение $x = 0$ не является решением, поэтому обе части полученного уравнения можно разделить на x^2, причем сохраняя равносильность:

$$\left(x - \frac{18}{x} + 7\right)\left(x - \frac{18}{x} - 3\right) = -24.$$

Пусть $t = x - \dfrac{18}{x}$. Тогда

$$(t+7)(t-3) = -24 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3, \\ t = -1. \end{array}\right.$$

При $t = -3$ получим:

$$x-\frac{18}{x}=-3 \Leftrightarrow x^2+3x-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=-6. \end{array}\right.$$

Аналогично при $t=-1$ имеем:

$$x-\frac{18}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x-18=0 \Leftrightarrow x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{73}}{2}.$$

Итак, $x=3$ и $x=-6$ – целые корни уравнения (2).

2. Найдем решение уравнения (1) при $x=3$:

$$y^3-y=0,\ y_1=0,\ y_2=1,\ y_3=-1.$$

Система (1)–(2) имеет в этом случае 3 решения: (3; 0), (3; 1), (3; –1).

3. Найдем решение уравнения (1) при $x=-6$. Заметим, что подкоренное выражение $(x-3)(y^2+2y+3)=-9(y^2+2y+3)<0$. Поэтому в этом случае система (1)–(2) не имеет решения.

Ответ: (3; 0), (3; 1), (3; –1).

Пример 5. Решите систему

$$\begin{cases} 2\cos^2 \pi xy = 2+2008\log^2_{2009}\sqrt{z^2-10z+26}, \\ 45 \le x^2+y^2+z^2 \end{cases}$$

в целых числах, если $A(x,0,0)$, $B(0,y,0)$, $C(0,0,z)$ – точки принадлежащие ребрам прямоугольного параллелепипеда, исходящим из начала координат, имеющим соответственно длины 3, 4, 5 и содержащимся на положительных полуосях системы координат.

Решение. 1. Уравнение данной системы представим в виде

$$2\sin^2 \pi yx+2008\log^2_{2009}\sqrt{(z-5)^2+1}=0.$$

Полученное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2\sin^2 \pi yx=0, \\ \log^2_{2009}\sqrt{(z-5)^2+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi yx=\pi n,\ n\in Z, \\ z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=n, n\in N, \\ z=5. \end{cases}$$

2. Диагональ параллелепипеда имеет длину $\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}$. Тогда

$$\begin{cases} 45 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 50, \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5, \\ 20 \le x^2 + y^2 \le 25. \end{cases}$$

Кроме того, $x \in \{1, 2, 3\}$, $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для вычисления значений x и y составим таблицу

x	y	$x^2 + y^2$	Вывод
2	4	20	+
3	4	25	+

При других значениях x и y условие $20 \le x^2 + y^2 \le 25$ не выполняется.

Ответ: (2; 4; 5), (3; 4; 5).

Пример 6. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{\frac{3}{2} + 2x^2 + 4x + a}{2(1-(x+1)^2) - a} \ge \frac{1}{2} \qquad (1)$$

не имеет решения.

Решение. К обеим частям (1) прибавим по единице и приведем к виду

$$\frac{3}{2(1-(x+1)^2) - a} \ge 1 \qquad (2)$$

Неравенство (2) не имеет решения тогда и только тогда, когда либо $2(1-(x+1)^2) - a < 0$, либо $2(1-(x+1)^2) - a > 3$ для всех допустимых значений $x \in R$.

Пусть

$$2(1-(x+1)^2) - a < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{a}{2} > 0.$$

Полученное неравенство является истинным для всех $x \in R$ только при $D = 1 - \frac{a}{2} < 0$, т.е. $a > 2$. Если $D = 0$, т.е. $a = 2$, то знаменатель неравенства (2) имеет вид: $-2(x+1)^2$, $x \neq -1$, неравенство (2) не имеет решения. Следовательно значения *a*, $a \geq 2$, – часть множества искомых значений параметра *a*.

Пусть теперь

$$2(1-(x+1)^2) - a > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{a+3}{2} < 0.$$

Отсюда следует, что для любого $a < 2$ существует $x_0 \in R$, $x_0^2 + 2x_0 + \frac{a+3}{2} \geq 0$, поэтому $a \notin (-\infty; 2)$.

Ответ: $a \geq 2$.

Пример 7. Найдите все значения *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x| \leq 1, \\ \dfrac{4 + 2x^2 + a}{2(1-x^2) - a} < 1 \end{cases} \qquad (1)$$

не имеет решения.

Решение. К обеим частям неравенство (1) прибавим 1 и приведем подобные члены

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{-2x^2 + 2 - a} < 1. \qquad (2)$$

Неравенство (2) не имеет решения тогда и только тогда, когда $-2x^2 + 2 - a > 0$, причем $3 \geq -2x^2 + 2 - a$. Иначе говоря, искомые значения парамера *a* найдем как пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$ двух множеств, где Ω_1 – множество всех таких значений *a*, при которых неравенство $-2x^2 + 2 - a > 0$ верно для любых *x*, $|x| \leq 1$, а Ω_2 – множество всех значений параметра a, при которых неравенство $3 \geq -2x^2 + 2 - a$ верно для всех допустимых x, $|x| \leq 1$. Итак,

$$x^2 < \frac{2-a}{2}, \quad 1 < \frac{2-a}{2}, \quad a < 0, \quad \Omega_1 = (-\infty; 0);$$

$$-2x^2 \leq 1 + a, \quad 1 + a \geq 0, \quad a \geq -1, \quad \Omega_2 = [-1; \infty).$$

Итак, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = [-1; 0)$.

Ответ: [–1; 0).

Пример 8. Найдите все цифры a и b такие, что $\overline{3baab6ba} \vdots 99$.

Решение. Число $99 = 9 \cdot 11$, числа 9 и 11 взаимно простые, поэтому искомое число должно делиться и на 9, и на 11. Применяя признаки делимости на 9 и 11, получим:

$$\begin{cases} (3 + 3b + 3a + 6) \vdots 9 \Leftrightarrow (a+b) \vdots 3, \\ \left(\overline{3baab} - \overline{6ba}\right) \vdots 11 \quad \Leftrightarrow (3 + a - b) \vdots 11. \end{cases}$$

Решать будем методом перебора: версии строим по признаку делимости на 11, а критерием отбора служит признак делимости на 3. Число $3 + a - b$ меняется в пределах: $-6 \leq 3 + a - b \leq 12$.

Так как $(3 + a - b) \vdots 11$, то

$$3 + a - b = \left[\begin{array}{l} 11, \\ 0. \end{array}\right.$$

1. Если $3 + a - b = 11$, т.е. $a = b + 8$, то либо $b = 0$, $a = 8$; либо $b = 1$, $a = 9$. Проверим делимость $(a + b) \vdots 3$.

Ни одна версия не удовлетворяет этому условию, т.е. эти версии отвергаются.

2. Если $3 + a - b = 0$, т.е. $b = a + 3$, то имеются следующие возможности:

№	a	b	*Выполнимость* $(a+b)\vdots 3$	*Вывод*
1	0	3	$(0+3)\vdots 3$	решение
2	1	4	–	нет решения
3	2	5	–	нет решения
4	3	6	$9\vdots 3$	решение
5	4	7	–	нет решения
6	5	8	–	нет решения
7	6	9	$15\vdots 3$	решение

Ответ: $\begin{cases} a=0, \\ b=3; \end{cases}$ $\begin{cases} a=3, \\ b=6; \end{cases}$ $\begin{cases} a=6, \\ b=9. \end{cases}$

Пример 9. Найдите множество всех целочисленных решений системы

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3}t = 2k+1 = \dfrac{3l+1}{2} = 6m-1; \\ t;\ k;\ l,\ m \in \{0,\ 1,\ 2,\ldots\}. \end{cases}$$

Решение. 1) Заметим, что $t \geq 1$. Истинность сказанного следует из условий: $t = \dfrac{6k+3}{5}$ и $t;\ k \in \{0,\ 1,\ 2,\ldots\}$.

2) Найдем множество всех целочисленных решений уравнения

$$\frac{3l+1}{2} = 6m-1. \qquad (1)$$

После преобразования получим: $3l+1 = 2(6m-1)$, $4m-l=1$.

Частным решением последнего уравнения является пара: $m_0 = 1$, $l_0 = 3$. По теореме 2 о решении диофантовых уравнений, общим его решением служит пара $m = 1 - q$; $l = 3 - 4q$, $q \in \mathbb{Z}$.

3) Из этого множества целочисленных решений уравнения (1) выберем те, которые являются целочисленными решениями и уравнения

$$\frac{5}{3}t = 6m - 1. \tag{2}$$

Так как $m = 1 - q$, то уравнение (2) равносильно следующему уравнению:

$$18q + 5t = 15. \tag{3}$$

Частное решение вспомогательного уравнения $18q + 5t = 1$ можно найти по соответствующему алгоритму. Но легко убедиться подстановкой, что $q_0 = 2$, $t_0 = -7$ – частное решение этого уравнения.

Тогда, используя ту же теорему 2, получим, что множество всех целочисленных решений уравнения (3) имеет вид:

$q = 2 \cdot 15 + 5p = 30 + 5p$; $t = -7 \cdot 15 - 18p = -18p - 105$, $p \in \mathbb{Z}$.

Так как $t \geq 1$, то из неравенства $-18p - 105 \geq 1$ следует, что $p \leq -6$; $p \in \mathbb{Z}$.

4) Итак, множество всех целочисленных решений системы

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3}t = \dfrac{3l+1}{2} = 6m - 1; \\ t;\ l;\ m \in \{0, 1, 2, \ldots\} \end{cases}$$

представимо в виде тройки $(t;\ l;\ m)$, где

$t = -18p - 105$; $l = 3 - 4q = 3 - 4(5p + 30) = -20p - 117$;

$m = 1 - q = 1 - (5p + 30) = -5p - 29$; $p \in \{-6;\ -7;\ -8, \ldots\}$.

5) Наконец, из полученных целочисленных решений выберем те, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3}t = 2k+1; \\ t = -18p - 105,\ p \le -6,\ p \in \mathbb{Z}, \\ k \in \{0, 1, 2, \ldots\}. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует: $6k - 5t = -3$. Это уравнение имеет решение в целых числах. Частным решением вспомогательного уравнения $6k - 5t = 1$ является пара: $k_0 = 1$, $t_0 = 1$. Тогда частным решением предыдущего уравнения служит пара: $k_0' = -3 \cdot 1 = -3$, $t_0' = -3$.

Общее решение уравнения $6k - 5t = -3$ имеет вид:

$$k = -3 - 5n,\ t = -3 - 6n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $t = -18p - 105$, то необходимо найти зависимость между целыми числами *n* и *p*, $p \le -6,\ p \in \mathbb{Z}$.

Имеем: $-18p - 105 = -3 - 6n \Leftrightarrow n = 3p + 17$.

Учитывая полученную зависимость между *n* и *p*, получим: $t = -18p - 105$, $k = -3 - 5n = -15p - 88$, $l = -20p - 117$, $m = -5p - 29$, где $p \le -6,\ p \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $t = -18p - 105$, $k = -15p - 88$, $l = -20p - 117$, $m = -5p - 29$, $p \in \{-6; -7; \ldots\}$.

Замечание. Предположим, что в условиях данной задачи дополнительно требуется вычислить минимальное значение параметра t (содержательные задачи с таким требованием будут приведены ниже). Ясно, что $t_{min} = t(-6) = 3$, причем $k_{min} = 2$, $l_{min} = 3$, $m_{min} = 1$.

Пример 10. По кольцевому шоссе длиной 6 км едут три велосипедиста со скоростями соответственно 40, 35 и $33\frac{1}{3}$ км/ч. На шоссе расположены три точки *A*, *B*, *C* так, что *AB*=3 км, *AC*=2 км, *CB*=1 км.

Движение происходит в одном направлении от A к C, от C к B, от B к A. В один момент первый велосипедист находится в точке A, второй – в точке B, третий – в точке C. Найдите минимальное время $t \in \mathbb{N}$, через которое все три велосипедиста поравняются.

Решение. За t часов велосипедисты проедут, соответственно, расстояния $(40t)$, $(35t)$, $\left(33\frac{1}{3}t\right)$ км. Чтобы состоялась встреча, соответствующие разности пройденных путей должны быть кратными 6:

$$\begin{cases} 40t-(35t+3)=6k, & (1) \\ 40t-\left(\dfrac{100}{3}t+2\right)=6l, & (2) \\ 35t-\left(\dfrac{100}{3}t-1\right)=6m, & (3) \\ t;\ k;\ l;\ m\in\{0;\ 1;\ 2;...\}. \end{cases}$$

Эта система идентична системе, рассмотренной в предыдущем примере. Следовательно, ее можно решать тем же способом. Но здесь есть дополнительное условие: найти минимальное натуральное число t. Поэтому эту задачу решим проще. Решая совместно уравнения (2) и (3), получим $l+1=4m$.

Испытаем на пригодность в качестве решения минимальное значение для m: m=1. Тогда l=3, t=3 (из третьего уравнения), k=2 (из первого уравнения). Итак, k=2, l=3, m=1, t=3 – решение данной системы.

Ответ: 3 ч.

Пример 11. Докажите неравенство

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}, \qquad (1)$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=...=x_n$, где $x_1,...,x_n$ – произвольные положительные числа.

Замечание. Это неравенство доказывается на основании свойства о среднем арифметическом и среднем геометрическом, играет важную роль при решении задач на экстремум и при доказательстве многих неравенств.

Доказательство. Рассмотрим n чисел

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}},\ \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}},\ ...,\ \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}.$$

Все эти числа положительны и их произведение равно 1. Тогда, применяя свойство о среднем, получим

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}+\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}+...+\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}\geq n.$$

Учитывая, что $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}>0$, получим истинность (1).

Пример 12. Докажите, что при любом натуральном n на 6 делится выражение $f(n)=n(2n^2-3n+1)$.

Доказательство. Первое решение (используется индукция).

1. Пусть $n = 1$. Тогда $f(1)=1(2-3+1)=0$, $0\vdots 6$, т.е. утверждение Т(n) при $n = 1$ истинно.

2. Пусть для $n = k$ утверждение Т(n) истинно, т.е.

$$k(2k^2-3k+1)\vdots 6.$$

3. Докажем, что для $n = k + 1$ утверждение Т(k + 1) истинно, т.е.

$$f(k+1)=(k+1)\left(2(k+1)^2-3(k+1)+1\right)\vdots 6.$$

Представим $f(k + 1)$ в виде:

$$f(k+1)=k(2k^2-3k+1)+6k^2.$$

По предположению первое слагаемое делится на 6. Делимость на 6 второго слагаемого очевидна. Итак, $f(k+1)\vdots 6$. Следовательно, утверждение задачи верно при всех $n\in \mathbb{N}$.

Замечание 1. Справедливость того, что $f(k+1) \vdots 6$ можно доказать и другим способом. Заметим, что

$$f(k+1)=(k+1)\left(2k^2+k\right)=k(k+1)(2k+1).$$

Произведение $k\ (k + 1)$ делится на 2. Поэтому достаточно убедиться, что $k\ (k + 1)(2k + 1)$ делится на 3. При делении k на 3 возможен только один из трех случаев:

$$1)\ k = 3m; \quad 2)\ k = 3m + 1; \quad 3)\ k = 3m + 2.$$

Если имеет место случай 1) или 3), то $k\ (k + 1)$ делится на 3; если же $k = 3m + 1$, то $2k + 1 = 6m + 2 + 1 = 3(2m + 1)$ делится на 3.

Замечание 2. Решить эту задачу можно, не используя математическую индукцию (хотя пример приведен для привития навыков применения индукции).

Заметим, что корнями квадратного уравнения $2n^2-3n+1=0$ являются: $n_1=1$, $n_2=\frac{1}{2}$.

Поэтому $2n^2-3n+1=(n-1)(2n-1)$, $f(n)=n(n-1)(2n-1)$.

1) $(n(n-1)) \vdots 2$, 2) докажем делимость на 3.

Если $n=3m$ или $n=3m+1$ $(m\in\mathbb{Z})$, то $(n(n-1)) \vdots 3$. Если же $n=3m-1$, то $2n-1=2(3m-1)-1=6m-3$, $(6m-3) \vdots 3$.

Следовательно, $(f(n)) \vdots 3$.

Пример 13. Докажите справедливость равенства $\mathrm{T}(n)$:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 5 + \ldots + n\,(3n-1) = n^2(n + 1) \qquad (1)$$

для любого $n\in \mathbb{N}$.

Доказательство.

1. Пусть $n = 1$. Тогда левая и правая части равны 2, т.е. утверждение $\mathrm{T}(n)$ истинно для $n = 1$.

2. Пусть $\mathrm{T}(n)$ верно для $n = k$, т.е.

$$1\cdot 2+2\cdot 5+...+k(3k-1)=k^2(k+1). \qquad (2)$$

3. Докажем, что T(n) истинно для $n = k + 1$, т.е.

$$1\cdot 2+2\cdot 5+...+k(3k-1)+(k+1)(3k+2)=(k+1)^2(k+2) \qquad (3)$$

Для этого к обеим частям равенства (2) прибавим число $(k + 1)(3k + 2)$. Тогда левая часть полученного равенства будет равна левой части равенства (3). Убедимся, что правые части тоже равны, т.е.

$$k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)=(k+1)^2(k+2). \qquad (4)$$

Действительно, левую часть (4) можно преобразовать так:

$$(k+1)(k^2+3k+2)=(k+1)(k+1)(k+2)=(k+1)^2(k+2).$$

Отсюда следует справедливость равенства (3), а следовательно, и равенства (1).

Пример 14. Найдите целочисленные решения системы

$$\begin{cases} x+y+z=14, \\ x+yz=19. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение.

1. Числа y и z не могут быть одновременно четными. Действительно, если y и z одновременно являются четными, то из первого уравнения данной системы следует: $x = 14 - (y + z)$ – четное число, а из второго $x = 19 - yz$ – нечетное число.

Следовательно, предстоит разобрать 2 случая:

1) одно из чисел y и z четное, другое – нечетное;

2) оба числа нечетные.

2. Заметим: если (x_0, y_0, z_0) – решение (1), то (x_0, z_0, y_0) тоже является решением. Поэтому ограничим нахождение решений для $y \le z$. Затем перестановкой y и z местами получим все решения (1).

3. Из второго уравнения почленно вычтем первое и к обеим частям полученного уравнения прибавим 1:

$$yz-y-z+1=6 \iff (y-1)(z-1)=6.$$

4. Так как 6 не делится на 4 нацело, то выражения $y-1$ и $z-1$ не могут быть одновременно четными. Следовательно, переменные

y и z не могут быть одновременно нечетными. Поэтому случай 2), отмеченный в пункте 1, исключается из рассмотрения. Остается, что одно из чисел y или z четное, а другое нечетное.

5. Число 6 можно четырьмя способами представить в виде произведения целых чисел $2\cdot3$; $(-2)\cdot(-3)$; $1\cdot6$; $(-1)\cdot(-6)$.

Пусть а) y – четное, z – нечетное $(y\le z)$. Тогда $y-1$ – нечетное, $z-1$ – четное. Так как $y-1\le z-1$, то из четырех представлений числа 6 подходят только 2:

$$\begin{cases} y-1=-3, \\ z-1=-2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y-1=1, \\ z-1=6. \end{cases}$$

Из этих систем следует: $y=-2$, $z=-1$ или $y=2$, $z=7$. Подставляя эти значения y и z в (1), получим x=17 или x=5.

Итак, в случае а) получено два решения (17; –2; –1) и (5; 2; 7).

Пусть теперь б) y – нечетное, z – четное $(y\le z)$. Из четырех представлений числа 6 подойдут только два:

$$\begin{cases} y-1=2, \\ z-1=3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y-1=-6, \\ z-1=-1. \end{cases}$$

Из этих систем следует: $y=3$, $z=4$ или $y=-5$, $z=0$. Подставляя эти значения y и z в (1), получим x=7 или x=19.

Итак, в случае б) получено два решения (7; 3; 4) или (19; –5; 0).

6. С учетом замечания, отмеченного в пункте 2, получим ответ.

Ответ: (19;0;–5), (17;–2;–1), (7;4;3), (5;2;7), (19;–5;0;), (17;–1;–2), (7;3;4), (5;7;2).

Замечание (альтернативное решение). Нахождение целочисленных решений (1) сводится к рассмотрению случаев а) и б), отмеченных в пункте 5. Эти случаи можно рассмотреть и в общем виде. Сказанное продемонстрируем для случая а).

Пусть для определенности $z=2n+1$, $y=2k$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда число x может быть только нечетным числом, $x=2m+1$. Подставив полученные выражения для x, y и z в полученную систему, получим:

$$\begin{cases} 2m+1+2k+2n+1=14, \\ 2m+1+2k(2n+1)=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+k+n=6, \\ m+k+2kn=9. \end{cases}$$

Из последней системы следует:

$$m + k = 6 - n = 9 - 2kn.$$

Найдем целые решения уравнения

$$6-n=9-2kn \quad \Leftrightarrow \quad 2kn=3+n.$$

Отсюда следует: n – нечетное число,

$$n=2l+1, \ z=4l+3, \ l\in\mathbb{Z},$$

$$2k(2l+1)=2l+4 \quad \Leftrightarrow \quad k(2l+1)=l+2.$$

Так как $2l+1\neq 0$, то

$$k=\frac{l+2}{2l+1} \quad \text{или} \quad k=\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{4}}{l+\frac{1}{2}}.$$

Построим в системе Olk график полученной формулы, учитывая следующие данные:

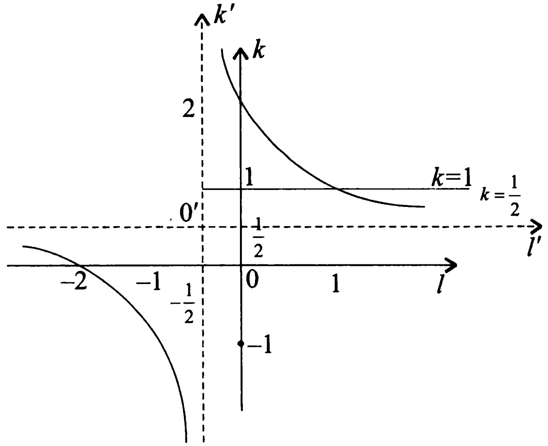
l	–2	0	–1	1
k	0	2	–1	1

$k\to\frac{1}{2}$ при $l\to\pm\infty$.

Гипербола $k'=\frac{3/4}{l'}$, где $k'=k-\frac{1}{2}$, $l'=l+\frac{1}{2}$, симметрична относительно точки $0'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Из этого графика следует:

при $l>1$, $\frac{1}{2}<k<1$, т.е. здесь нет целочисленных решений;

при $l<-2$, $0<k<\frac{1}{2}$, т.е. здесь нет целочисленных решений.



Осталось рассмотреть целые значения l, $l \in [-2,1]$. Составим таблицу:

l	-2	-1	0	1
k	0	-1	2	1
$y = 2k$	0	-2	4	2
$z = 4l + 3$	-5	-1	3	7
$x = 19 - yz$	19	17	7	5

Следовательно, в случае 1 имеем 4 решения: (19;0;-5), (17;-2;-1), (7;4;3), (5;2;7).

Остальные 4 решения находим, рассматривая случай б).

Пример 15. По кольцевому шоссе длиной 3 км едут три велосипедиста со скоростями 33, 19 и 11 км/ч. На шоссе расположены три точки A, B, C на равных расстояниях друг от друга. Движение велосипедистов происходит в одном направлении от A к B и далее к C. В один момент первый велосипедист находится в точке A, второй – в точке B, третий – в точке C. Через какое минимальное время все три велосипедиста поравняются?

Решение. Пусть через t часов поравняются все три велосипедиста. Тогда велосипедисты пройдут соответственно расстояния: $(33t)$км, $(19t)$ км, $(11t)$ км. Чтобы состоялась встреча, соответствующие разности пройденных путей должны быть кратны 3:

$$\begin{cases} 33t-11t-2=3k, \\ 33t-19t-1=3l, \\ 19t-11t-1=3m, \\ k,l,m\in\{0;1;2;...\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{3k+2}{22}, \\ t=\dfrac{3l+1}{14}, \\ t=\dfrac{3m+1}{8}, \\ k,l,m\in\{0;1;2;...\}. \end{cases}$$

Т.к. t должно быть минимальным, то из условия $t=\dfrac{3l+1}{14}=\dfrac{3m+1}{8}$

находим $l=2,\quad m=1,\quad t=\dfrac{1}{2}$. Получены необходимые условия. Проверим на достаточность: найдем решение в целых числах уравнения

$$\frac{1}{2}=\frac{3k+2}{22} \quad \Leftrightarrow \quad 11=3k+2.$$

Решением последнего уравнения является $k = 3$.

Ответ: через 30 мин.

Пример 16. Найдите число целочисленных решений системы

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2-8\right)^2(xy-1)=-\sqrt{y^2-x^2}, \\ |y|<3. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. 1. Сначала заметим, что если (x_0, y_0) – решение (1), то $(-x_0, -y_0)$ – также решение (1). Так как (x; 0) не является решением (1), то можно ограничиться определением числа целочисленных решений (x_0, y_0) для $y_0 > 0$, а затем полученное число удвоить.

2. Отметим также, что пара $(0; y_0)$, $y_0 > 0$, не является решением (1). Действительно, при $x = 0$ система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} x = 0, \\ (y^2 - 8)^2 = y. \end{cases}$$

Так как возможно только $y = 1$ и $y = 2$, то, подставляя эти значения во второе уравнение полученной системы, убеждаемся в истинности сказанного.

3. Подсчитаем число целочисленных решений (1) двумя способами: перебором и графически.

Первый способ – перебор целесообразен тем, что y может принимать лишь два значения $y = 1$, $y = 2$, а переменная x $(|x| \le y)$ – шесть значений:

при $y = 1$ $\quad x \in \{-1; 1\}$;

при $y = 2$ $\quad x \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

Иначе говоря, найдены **необходимые** условия на x и y, $y > 0$. Проверим на **достаточность**. Данная система равносильна совокупности следующих двух систем:

а) $\begin{cases} y = 1, \\ (x^2 - 7)^2 (1 - x) = \sqrt{1 - x^2}; \end{cases}$ $\qquad$ б) $\begin{cases} y = 2, \\ (x^2 - 4)^2 (1 - 2x) = \sqrt{4 - x^2}. \end{cases}$

Из системы а) следует, что правая часть равна нулю при $x = \pm 1$, а левая равна нулю только при $x = 1$. Следовательно, (1; 1) – решение (1).

Из системы б) следует, что $x = \pm 2$ – решение второго уравнения, т.е. (–2; 2) и (2; 2) – решения (1). Пусть теперь $x \ne \pm 2$. Тогда должно быть $1 > 2x$ или $x < \frac{1}{2}$. Поэтому либо $x = -2$, либо $x = -1$.

Значение $x = -2$ уже исследовано. При $x = -1$ имеем: $3^2 \cdot 3 = \sqrt{3}$, что невозможно.

Учитывая замечание, сделанное в пункте 1, получаем, что система (1) имеет 6 целочисленных решений.

Второй способ – графический, он более громоздкий, но применим не только для тех случаев, когда перебор незначителен, чем и воспользовались в первом случае.

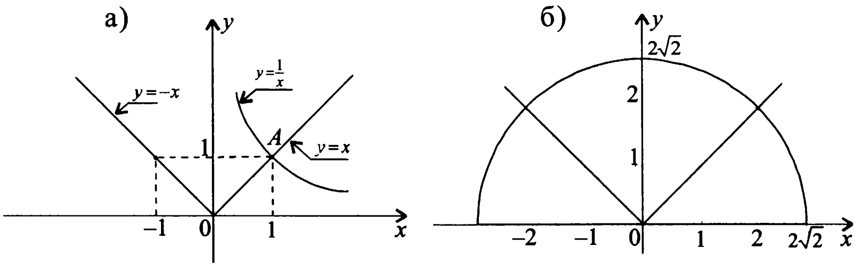
4. Исследуем случай, когда правая часть равна нулю (короче «нули»), т.е. $|y| = |x|$.

Тогда либо $xy = 1$, либо $x^2 + y^2 = 8$. Так как $y > 0$, то искомые решения найдем как объединение множеств целочисленных решений следующих двух систем:

$$a)\begin{cases} y = |x|, \\ 0 < y < 3, \\ xy = 1; \end{cases} \qquad б)\begin{cases} y = |x|, \\ 0 < y < 3, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\overline{x = 1,\ y = 1}$$

Система *а)* имеет единственное решение (1; 1) (см. рис. *а)*); система *б)* имеет 2 решения (2; 2) и (–2; 2) (см. рис. *б)*).С учетом



(1; 1) – решение

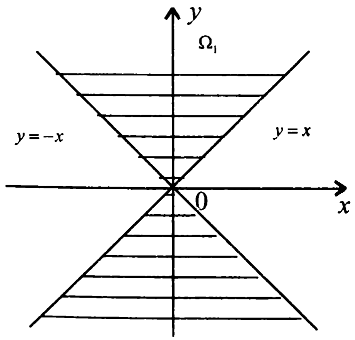
(2; 2), (–2; 2) – два решения

замечания об удвоении числа решений получим, что в случае $|y| = |x|$ число целочисленных решений равно 6.

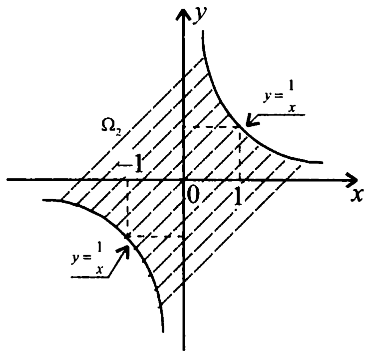
5. Рассмотрим случай $|y| > |x|$. Замечание, сделанное в начале решения, остается в силе, поэтому рассматриваем лишь положительные значения y. Тогда правая часть отрицательна. Чтобы данная система имела решение, необходима справедливость условия $xy < 1$. Иначе говоря, искомые решения найдем как множество всех решений системы:

$$\begin{cases} y > |x|, 0 < y < 3, \\ xy < 1, \\ \left(x^2 + y^2 - 8\right)^2 (xy - 1) = -\sqrt{y^2 - x^2} \\ y \in \boldsymbol{N},\ x \in \boldsymbol{Z}. \end{cases} \qquad (2)$$

Систему (2) решим графически. Сначала построим множества Ω_1 и Ω_2 точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соответственно неравенствам $|y| > |x|$, $xy < 1$:



$\Omega_1 = \{(x,y)\ |y|>|x|\}$

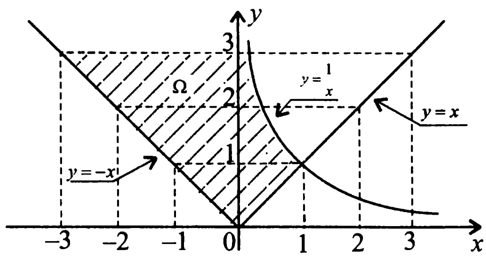


$\Omega_2 = \{(x,y): x \cdot y < 1\}$

Тогда множество Ω точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y > |x|, \, 0 < y < 3, \\ xy < 1, \, x \in \mathbb{Z}, \, y \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

имеет вид:



Во множестве Ω имеются только три точки (0; 1), (0; 2) и (–1; 2), претендующие на решение системы (2) (здесь учитываем, что граница не принадлежит множеству Ω). Подстановкой в уравнение $\left(x^2+y^2-8\right)^2(xy-1)=-\sqrt{y^2+x^2}$ проверим, являются ли они решениями:

1) $x=0,\ y=1,\ (1-8)^2(-1)=-1$ – неверно,

точка (0; 1) не является решением;

2) $x=0,\ y=2,\ (4-8)^2(-1)=-2$ – неверно,

точка (0; 2) не является решением;

3) $x=-1,\ y=-2,\ (1+4-8)^2(-2-1)=-\sqrt{4-1},\ 3\cdot 9=\sqrt{3}$ – неверно,

точка (–1; 2) не является решением.

Итак, второй случай $(|y|>|x|)$ не содержит новых решений.

Ответ: 6.

Пример 17. На автостоянке стояли «Мерседесы», «Запорожцы» и прочие иномарки в количественном отношении 2: 3: 6. После того, как на стоянку подъехало некоторое количество «Мерседесов» и «Запорожцев» общим числом не более 100 машин, а 40% прочих иномарок уехало, количественное соотношение стало 5: 7: 4. Сколько автомобилей уехало со стоянки?

Решение. Пусть подъехало x «Мерседесов» (М), y – «Запорожцев» (З), а уехало z прочих иномарок (ПИ). В принятых обозначениях составим расчетную таблицу, характеризующую динамику изменения количества машин на автостоянке:

Кол-во машин	*Марки машин*			*Соотношение*
	М	З	ПИ	
было	$\frac{5}{6}z$	$\frac{5}{4}z$	$\frac{5}{2}z$	2: 3: 6
стало	$\frac{5}{6}z+x$	$\frac{5}{4}z+y$	$\frac{3}{2}z$	5: 7: 4

Поясним правило заполнения хотя бы первой строки. Известно, что 40% прочих иномарок (ПИ) уехало, что составляет z машин. Следовательно, было машин ПИ $\frac{z}{0,4}=\frac{5}{2}z$, а стало $\frac{5}{2}z-z=\frac{3}{2}z$. Используя соотношение 2: 3: 6, получим, что число «Мерседесов» и «Запорожцев» соответственно равно:

$$\frac{\frac{5}{2}z}{6}\cdot 2=\frac{5}{6}z; \quad \frac{\frac{5}{2}\cdot z}{6}\cdot 3=\frac{5}{4}z.$$

Далее, используя соотношение 5: 7: 4, получим:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}z+x=\frac{\frac{3}{2}z}{4}\cdot 5, \\ \frac{5}{4}z+y=\frac{\frac{3}{2}z}{4}\cdot 7, \\ x+y\le 100, \\ x,y,z\in \boldsymbol{N}. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) – математическая модель нашей задачи. Теперь для решения данной задачи достаточно решить систему (1) в натуральных числах. Для этого упростим первые два уравнения этой системы:

$$\frac{5}{6}z + x = \frac{15}{8}\cdot z; \qquad \frac{5}{4}z + y = \frac{21}{8}z. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $z \vdots 8$ и $z \vdots 6$, т.е. $z = 24k,\ k \in \mathbf{N}$.

Подставляя $z = 24k$ в (2), получим:

$$20k + x = 45k, \qquad x = 25k; \qquad 30k + y = 63k, \qquad y = 33k.$$

Так как $x + y \le 100$, то $58k \le 100$, т.е. $k = 1$, $z = 24$.

Ответ: 24 машины.

Пример 18. Ваня купил раков, вчера – мелких, по цене 510 руб. за штуку, а сегодня – по 990 руб., но очень крупных. Всего на покупку истратил 25200 руб., из них переплаты из-за отсутствия сдачи составили от 160 до 200 руб. Сколько Иван купил раков вчера и сколько – сегодня?

Решение. Пусть x – число раков, купленных вчера; y – число раков, купленных сегодня; z – переплата суммарная. Тогда математическая модель этой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 510x + 990y + z = 25200, \\ 160 \le z \le 200; \\ x \in \mathbf{N},\ y \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Разделим обе части уравнения (1) на 30:

$$17x + 33y + \frac{z}{30} = 840. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $z \vdots 30$ и $160 \le z \le 200$. Поэтому $z = 180$. Следовательно, уравнение (2) равносильно следующему:

$$17x + 33y = 834 \quad \text{или} \quad x = 50 - 2y + \frac{y-16}{17}.$$

Число $\frac{y-16}{17}$ должно быть целым, причем $834 - 33y > 0$. Первому условию уравнения удовлетворяют числа 16, 33, …. Но для значений $y \geq 33$ выражение $834 - 33y < 0$. Следовательно, $y = 16$, $x = 18$.

Ответ: 18 и 16.

Пример 19. В магазине «Непарная обувь» за 2 дня продали 2 одинаковых правых сапога, 13 одинаковых левых сапог и один валенок. В первый день была выручена та же сумма, что и во второй. Левый сапог дешевле правого и дороже валенка на одну и ту же сумму. Сколько левых и сколько правых сапог продали в один день с валенком?

Решение. Пусть в первый день продали валенок, y штук правых сапог и x штук левых сапог. Обозначим: стоимость валенка через u, разницу между стоимостью валенка и левого сапога – через v.

Расчетная таблица имеет вид:

День / *Количество*	*1-й*	*2-й*	*Цена одного экземпляра*
валенок	1	–	u
левых сапог	x	$13 - x$	$u + v$
правых сапог	y	$2 - y$	$u + 2v$
Выручка	$u + x(u+v) +$ $+ y(u + 2v)$	$(13 - x)(u + v) +$ $+ (2 - y)(u + 2v)$	

Из условия задачи следует:

$$\begin{cases} u + x(u+v) + y(u+2v) = (13-x)(u+v) + (2-y)(u+2v), & (1) \\ 0 \leq x \leq 13, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad u > 0, \quad v > 0, \quad x \in \boldsymbol{N}, \quad y \in \boldsymbol{N}. & (2) \end{cases}$$

Система (1) – (2) – модель нашей задачи. Уравнение (1) представим в виде:

$$u(1+x+y-13+x-2+y)=(-x-2y+13-x+4-2y)v$$

или

$$u(2x+2y-14)=(17-2x-4y)v. \qquad (3)$$

Для решения уравнения (3) с четырьмя переменными воспользуемся ограничениями, отмеченными в (2). Переменная y может принимать значения: 0; 1; 2. Тогда (3) равносильно совокупности 3 систем:

$$а)\begin{cases} y=0; \\ u(2x-14)=(17-2x)v; \end{cases} \qquad б)\begin{cases} y=1; \\ u(2x-12)=(13-2x)v; \end{cases}$$

$$в)\begin{cases} y=2; \\ u(2x-10)=(9-2x)v. \end{cases}$$

Рассмотрим систему *а)*. Так как $u > 0$ и $v > 0$, то знаки выражений $2x - 14$ и $17 - 2x$ должны совпадать, причем $x \in N$, $0 \le x \le 13$. Заметим, ни одно из этих выражений не может принимать нулевые значения.

Иначе говоря, либо

$$\underset{x=8}{\underline{\begin{cases} 2x-14>0, \\ 17-2x>0; \end{cases}}} \quad \text{либо} \quad \underset{\varnothing}{\underline{\begin{cases} 2x-14<0, \\ 17-2x<0. \end{cases}}}$$

Отсюда следует: $x = 8$, $y = 0$ – первое решение.

Теперь исследуем систему *б)*. Рассуждая так же, как и выше, получим

$$\text{либо} \quad \underset{\varnothing}{\underline{\begin{cases} 2x-12>0, \\ 13-2x>0; \end{cases}}} \quad \text{либо} \quad \underset{\varnothing}{\underline{\begin{cases} 2x-12<0, \\ 13-2x<0. \end{cases}}}$$

Наконец, легко убедиться, что система *в)* также не имеет решения.

Ответ: только 8 левых сапог.

Пример 20. При каких значениях a и b системы (*) и (**) равносильны, где

$$\begin{cases} ax-b=1, \\ bx-a-1, \\ ab\neq 0; \end{cases} \quad (*) \qquad\qquad \begin{cases} x=\dfrac{1+b}{a}, \\ (a-b)(a+b-1)=0\ ? \end{cases} \quad (**)$$

Примечание. Особо обратите внимание на равносильность (уравнений, неравенств, систем и т. д.), т. к. *более половины ошибок абитуриентов связано с нарушением равносильности.*

Решение. 1. Найдем решение системы (*). Т. к. $ab\neq 0$, то

$$\begin{cases} ax-b=1, \\ bx-a=1, \\ ab\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+b}{a}, \\ x=\dfrac{1+a}{b} \\ ab\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+b}{a}, \\ \dfrac{1+b}{a}=\dfrac{1+a}{b}, \\ ab\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+b}{a}, \\ (a-b)(a+b+1)=0, \\ ab\neq 0. \end{cases}$$

Сравним полученный ответ с системой (**) в двух случаях:

первый: $a=b$, $\begin{cases} x=\dfrac{1+a}{a} \\ a\neq 0. \end{cases}$ – решение обеих систем,

Следовательно (*) ~ (**) (равносильны) при $a=b\neq 0$;

второй: $\begin{cases} a=-b-1, \\ ab\neq 0, \\ x=-1 \end{cases}$ – решение системы (*);

$\begin{cases} a+b=1, \\ x=\dfrac{1+b}{a}, \\ a\neq 0 \end{cases}$ – решение системы (**).

Для равносильности данных систем достаточно, чтобы система

$$\begin{cases} x=-1,\ ab\neq 0, \\ x=\dfrac{1+b}{a}, \\ a+b=1 \end{cases}$$

имела решение.

$$\begin{cases} x=-1,\ ab\neq 0, \\ x=\dfrac{1+b}{a}, \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+b}{a}=-1, \\ a+b=1, \\ ab\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1, \\ a+b=1, \\ ab\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

Ответ: $a=b\neq 0$.

Пример 21. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{x^2-1}{2}+x<-x+a+\dfrac{1}{2}x^2$: а) при любых значениях $a\in[1;5)$; б) для некоторых значений $a\in(1;4)$.

Решение. 1. Данное неравенство равносильно следующим:

$$x^2-1+2x<-2x+2a+x^2 \Leftrightarrow 4x<2a+1 \Leftrightarrow x<\frac{2a+1}{4}.$$

2. Ответим на вопрос а).

Наибольшее целое число x_0 найдем из условия

$$\begin{cases} x_0\in Z, \\ x_0<\dfrac{2a+1}{4}, \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0\in Z, \\ x_0<\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x_0=0.$$

3. Ответим на вопрос б).

Наибольшее целое число x_0 найдем из условия $\begin{cases} x_0 \in Z, \\ x_0 < \dfrac{2a+1}{4}. \\ \dfrac{7}{2} < a < 4 \end{cases}$

Целая часть числа $\dfrac{2a+1}{4}$, т. е. $[\dfrac{2a+1}{4}] = 2$ при $\dfrac{7}{2} < a < 4$.

Поэтому $x_0 = 2$.

Ответ: а) 0; б) 2.

Пример 22. Дано неравенство

$$\left||x-2|-2\right| + |x+a| \le 3. \qquad (*)$$

При каких значениях параметра a неравенство (*) верно при всех: а) $x > 1$; б) $x < -1$; в) $x \in [1;2]$?

Решение. 1. Неравенство (*) равносильно совокупности систем неравенств а) и б), где

$$\text{а)} \begin{cases} x \le 2, \\ |x| + |x+a| \le 3; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} x \ge 2, \\ |x-4| + |x+a| \le 3. \end{cases}$$

2. Найдем ответ на вопрос задачи а). Система а) не имеет искомых значений параметра a, т. к. в ней рассматриваются лишь значения $x \le 2$. Система б) также не содержит искомых значений a, т.к. в ней значения $x \ge 2$.

Ответ для а): $a \in \varnothing$.

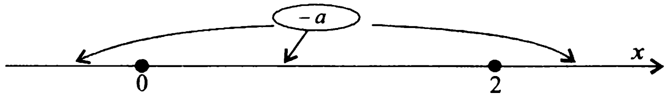
Примечание. В этом легко убедиться, применяя графический способ решения.

3. Искомые значения a для вопроса б) могут быть найдены только с помощью системы а). Убедимся, что и она не содержит искомых значений параметра a. Действительно, для любого a значение $x = -4$ не является решением системы а), т. к. $|-4| + |-4+a| \ge |-4| = 4 > 3$.

Ответ для б): $a \in \varnothing$.

4. Рассмотрим более подробно задачу в). Искомые значения параметра a так же, как и выше, могут быть найдены только с помощью системы а).

Значение $-a$ может принадлежать только одному из следующих трех промежутков (см. рис.):



Иначе говоря, в этом случае система а) равносильна совокупности следующих трех систем:

$$1)\ \begin{cases} -a \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -a, \\ -x - x - a \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} -a \le x \le 0, \\ -x + x + a \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ x + x + a \le 3; \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 0 \le -a \le 2, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0, \\ -x - x - a \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le -a, \\ x - x - a \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} -a \le x \le 2, \\ x + x + a \le 3; \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} -a \ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0, \\ -x - x - a \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ x - x - a \le 3. \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

Система 1) не содержит искомых значений a. Из системы 2) следует, что искомые значения a должны удовлетворять условию $1 \le -a \le 2$. Из 3) следует, что искомые значения a удовлетворяют условию $2 \le -a \le 3$. Тогда $-a$ меняется в пределах $1 \le -a \le 3$, т. е. $-3 \le a \le -1$ – искомые значения.

Ответ: а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) $[-3;-1]$.

Пример 23. Определите равносильность следующих двух неравенств:

$$(a-2)x < b+1 \text{ и } (1+b)x > a-2.$$

Решение. Для упрощения вычислений введем обозначения: $a-2=c$, $b+1=d$. Тогда данные неравенства имеют вид: $cx < d$ и $dx > c$.

1. Пусть $c = 0 \Rightarrow 0 \cdot x < d,\ d \cdot x > 0$.

а) Если $d=0$, то оба неравенства не имеют решений, поэтому они равносильны ($c=d=0$ неравенства равносильны).

б) Если $d>0$, то любое $x \in R$ удовлетворяет неравенству $0 \cdot x < d$; а второе неравенство $d \cdot x > 0$ верно только для $x>0$. Поэтому данные неравенства не равносильны при $c=0,\ d>0$.

в) Если $d<0$, то неравенство $0 \cdot x < d$ не имеет решения, а неравенство $d \cdot x > 0$ имеет решение $x<0$.

Следовательно, данные неравенства не равносильны при $c=0,\ d<0$. Итак, при $c=d=0$ неравенства равносильны; а при $c=0,\ d \neq 0$ не равносильны.

2. Пусть $c>0 \Rightarrow x<\dfrac{d}{c}$ и $dx>c$. Для равносильности этих неравенств необходимо, чтобы $d<0$.

Тогда

$$x<\frac{c}{d},\ x<\frac{d}{c} \Rightarrow \frac{c}{d}=\frac{d}{c} \Leftrightarrow c^2=d^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=d, \\ c=-d \end{array}\right. \Leftrightarrow c=-d,\ d<0.$$

Здесь учтено, что $c>0$, $d<0$.

Следовательно, неравенства равносильны только при

$$c=-d,\ d<0.$$

3. Пусть $c<0 \Rightarrow x>\dfrac{d}{c};\ x>\dfrac{c}{d},\ d>0$. Для равносильности необходимо выполнение равенства $\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=d, \\ c=-d \end{array}\right. \Leftrightarrow c=-d,\ d>0$.

Итак, неравенства равносильны только при $c=-d$, $d \in R$.

Ответ: неравенства равносильны только при $a=1-b$, $b \in R$.

Пример 24. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$-1<x<\frac{3a}{2a-1}:$$

а) для любого значения $a \in [1;2)$;

б) для некоторых значений $a \in [1;2)$.

Решение. 1. Убедимся, что функция $f(a) = \frac{3a}{2a-1}$ – убывающая на всем промежутке $[1;2)$. Способов доказательства несколько, отметим, как бы, два полярных способа:

а) кто знает производную функции, то через производную. Для любого $a \in (1;2)$ производная $f'(a) = \frac{-3}{(2a-1)^2} < 0$, поэтому функция f убывает на $(1;2)$;

б) кто не знает производную, тому необходимо доказать истинность неравенства $\frac{3b}{2b-1} > \frac{3c}{2c-1}$ для всех b и c, $1 \le b < c < 2$, что тоже не представляет трудности. Действительно,

$\frac{3b}{2b-1} > \frac{3c}{2c-1} \Leftrightarrow b(2c-1) > c(2b-1) \Leftrightarrow -b > -c \Leftrightarrow b < c$ – верное неравенство.

Итак, функция $f(a) = \frac{3a}{2a-1}$ убывает на промежутке $[1;2)$ от 3 до 2, т.е $2 < f(a) \le 3$.

2. Ответим на вопрос задачи а).

В данном случае $x \le 2$, т. е. $x \in (-1;2]$, $x \in Z$, $x \in \{0;\ 1;\ 2\}$. Сумма $0+1+2$ равна 3.

Ответим на вопрос задачи б).

При $a = 1$ $f_{\max} = f(1) = 3$, тогда $-1 < x < 3$, $x \in \{0;1;2\}$. Сумма целочисленных решений равна 3.

Ответ: а) 3; б) 3.

Пример 25. Найдите все $a\ (a>0)$, при каждом из которых для любого $x \in [3;\ 5]$ верно неравенство (1), а для любого $x \in [-5;\ -3]$ это неравенство неверно.

$$\left|ax+2|x|-11\right|<5 \qquad (1)$$

Решение. 1. Решим неравенство (1). Ясно, что

$$(1) \Leftrightarrow -5<ax+2|x|-11<5 \Leftrightarrow 6<ax+2|x|<16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ 6<(a+2)x<16; \end{cases} \Leftrightarrow a) \begin{cases} x>0, \\ \dfrac{6}{a+2}<x<\dfrac{16}{a+2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ 6<(a-2)x<16; \end{cases} \Leftrightarrow б) \begin{cases} x<0,\ a<2, \\ \dfrac{6}{a-2}>x>\dfrac{16}{a-2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

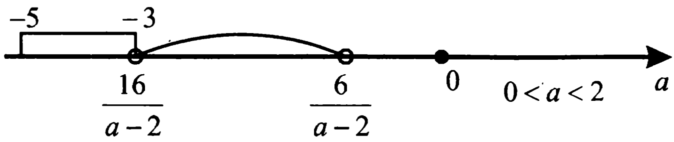
2. Найдем множество Ω_1 значений параметра $a\ (a>0)$, при которых неравенство (1) верно для любого $x \in [3;\ 5]$. Отсюда следует, что отрезок $[3;\ 5]$ должен принадлежать множеству решений неравенства (1). Ясно, что $\Omega_1 = \left\{a, a>0, \dfrac{6}{a+2}<3; 5<\dfrac{16}{a+2}\right\}$.

Отсюда следует: $\begin{cases} 3a+6>6, \\ 5a+10<16 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<1{,}2$. $\Omega_1=(0;\ 1{,}2)$.

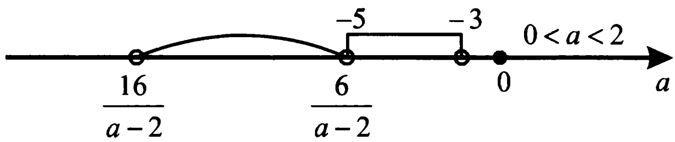
3. Теперь найдем множество Ω_2 значений параметра a, при которых для любого $x \in [-5;\ -3]$ неверно неравенство (1). Отсюда следует, что пересечение отрезка $[-5;\ -3]$ со множеством решений (1) должно быть пустым. Пересечение этого отрезка со множеством решений системы a) заведомо является пустым, т.к. $x>0$ – в системе a).

Чтобы пересечение отрезка $[-5;-3]$ со множеством решений системы *б*) было пустым, необходимо и достаточно выполнение одного из условий: $-3 \le \dfrac{16}{a-2}$ или $\dfrac{6}{a-2} \le -5$.

Изобразим сказанное на оси *x:*



или



Иначе говоря, Ω_2 представляет собой множество решений следующей совокупности (напоминаем $0 < a < 2$):

$$\left[\begin{array}{l} -3 \le \dfrac{16}{a-2}, \\ \dfrac{6}{a-2} \le -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3a+6 \ge 16, \\ 6 \ge -5a+10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le -\dfrac{10}{3}, \\ a \ge 0{,}8 \end{array}\right.$$

Т.к. $0 < a < 2$, то $\Omega_2 = [0{,}8;\ 2)$.

4. Решением данной задачи является пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$, т.е.

$$\begin{cases} 0 < a < 1{,}2, \\ 0{,}8 \le a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}8 \le a < 1{,}2.$$

Ответ: $[0{,}8;\ 1{,}2)$.

Пример 26. При каких значениях $a\ (a > 0)$ множество решений неравенства (1) содержится в отрезке длиной 50 и при этом содержит отрезок длиной 5?

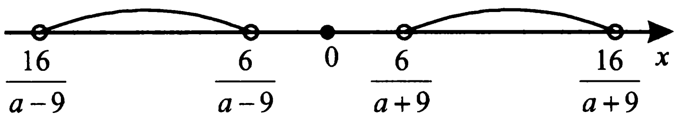
$$|ax+9|x|-11|<5. \qquad (1)$$

Решение. 1. Найдем решение неравенства (1):

$$(1) \Leftrightarrow -5<ax+9|x|-11<5 \Leftrightarrow 6<ax+9|x|<16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0, \\ 6<(a+9)x<16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \dfrac{6}{a+9}<x<\dfrac{16}{a+9}; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ 6<(a-9)x<16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0,\ a<9, \\ \dfrac{6}{a-9}>x>\dfrac{16}{a-9}. \end{cases} \end{array}\right.$$

2. На оси отметим множество решений неравенства (1):



3. Множество решений неравенства (1) содержится в отрезке длиной 50, поэтому

$$\frac{16}{a+9}-\frac{16}{a-9}\le 50,\ 0<a<9. \qquad (2).$$

4. Множество решений неравенства (1) содержит отрезок длиной 5, поэтому либо $\dfrac{6}{a-9}-\dfrac{16}{a-9}>5$, либо $\dfrac{16}{a+9}-\dfrac{6}{a+9}>5$. Пусть Ω_1 множество решений совокупности следующих двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a<9, \\ \dfrac{6}{a-9}-\dfrac{16}{a-9}>5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<9, \\ \dfrac{2}{9-a}>1; \end{cases} \Leftrightarrow 7<a<9; \\ \begin{cases} a>0, \\ \dfrac{16}{a+9}-\dfrac{6}{a+9}>5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ \dfrac{2}{a+9}>1; \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing. \end{array}\right.$$

Следовательно, $\Omega_1 = (7;\ 9)$.

5. Вычислим Ω_2 множество решений системы неравенств (2):

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 8\left(\dfrac{1}{a+9} - \dfrac{1}{a-9}\right) \le 25, \\ 0 < a < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a^2 \le 9 \cdot 209, \\ 0 < a < 9; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \le 0{,}6\sqrt{209}.$$

6. Решением данной задачи является пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \left(7;\ 0{,}6\sqrt{209}\right]$.

Ответ: $\left(7;\ 0{,}6\sqrt{209}\right]$.

Пример 27. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x - ay + 1| + |ax - 2y| \le 4\cos\pi x - \left(\dfrac{1}{|x - ay + 1|} + \dfrac{1}{|ax - 2y|}\right), & (1) \\ x - ay + 1 >,\ ax - 2y < 0,\ a \in R. & (2) \end{cases}$$

Решение. 1. Заметим, что $\dfrac{1}{b^2} + b^2 \ge 2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $b^2 = 1$.

2. Представим (1) в виде

$$\left(c^2 + \frac{1}{c^2} + d^2 + \frac{1}{d^2}\right) \le 4\cos\pi x, \qquad (3)$$

где $c^2 = |x - ay + 1|$, $d^2 = |ax - 2y|$.

3. Левая часть (3) не меньше 4, а правая – не больше 4. Следовательно, неравенство (3) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$c^2 = 1,\ d^2 = 1,\ \cos\pi x = 1. \qquad (4)$$

4. С учетом (2) и (4) получим:

$$\begin{cases} x - ay + 1 = 1, \\ ax - 2y = -1, \\ \pi x = 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k,\ k \in Z, \\ x = ay, \\ (a^2 - 2)y = -1. \end{cases}$$

Если $a=0$, то $x=0$, $y=\frac{1}{2}$ – решение системы (1) – (2). При $a^2=2$, т.е. $a=\pm\sqrt{2}$ указанная система не имеет решения. Пусть теперь $a\neq 0,\ a^2\neq 2$. Тогда $y=\frac{x}{a}=\frac{2k}{a}$ (из первых двух уравнений полученной системы), $y=\frac{1}{2-a^2}$ (из третьего уравнения).

Следовательно,

$$\frac{2k}{a}=\frac{1}{2-a^2} \text{ или } 2ka^2+a-4k=0 \qquad (5)$$

Т.к. $a\neq 0,\ a^2\neq 2$, то $y\neq 0,\ x\neq 0$ и $k\neq 0$. Поэтому уравнение (5) является квадратным, причем $a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+32k^2}}{4k}$.

Вычислим значения x и y (напоминаем, что $a\neq 0,\ a^2\neq 2$):

$$x=2k,\ y=\frac{x}{a}=\frac{2k}{\frac{-1\pm\sqrt{1+32k^2}}{4k}}=\frac{8k^2}{-1\pm\sqrt{1+32k^2}}=\frac{1\pm\sqrt{1+32k^2}}{4}.$$

Ответ: $x=0,\ y=\frac{1}{2}$ при $a=0$;

$x=2k,\ y=\frac{1\pm\sqrt{1+32k^2}}{4}$ при $a=\frac{-1\pm\sqrt{1+32k^2}}{4k}$, $k\neq 0,\ k\in Z$;

$\varnothing$ (нет решения) при $a=\pm\sqrt{2}$.

Пример 28. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{ax-8}{x}\leq 8$ равно –5.

Решение. 1. Найдем необходимое условие на параметр a. Т.к. $x=-5$ – решение, то истинно неравенство:

$$\frac{-5a-8}{-5}\le 8 \Leftrightarrow a+1{,}6\le 8 \Leftrightarrow a\le 6{,}4$$

2. Значение $a=6$ проверим на достаточность:

$$\begin{cases}\dfrac{6x-8}{x}\le 8,\\ x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x-8\ge 8x,\\ x<0\end{cases} \Leftrightarrow x\le -4 .$$

Отсюда следует значение $a=6$ проверку на достаточность не прошло.

Испытаем значение $a = 5$ на достаточность:

$$\begin{cases}\dfrac{5x-8}{x}\le 8,\\ x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x-8\ge 8x,\\ x<0\end{cases} \Leftrightarrow x\le -\frac{8}{3} .$$

Значение $a=5$ проверку на достаточность не прошло.

Наибольшее целое отрицательное решение соответствующего неравенства при значениях a, равных $6; 5; 4$ и т.д., отличается от $x=-5$. Это наводит на мысль, что такого значения a, при котором $x=-5$ является наибольшим целым отрицательным решением данного неравенства, не существует. Чтобы убедиться в этом, докажем, что $x=-4$ является наибольшим целым отрицательным решением данного неравенства при любом целом значении параметра $a\le 6$.

Действительно, при $x=-4$ имеем:

$$\frac{-4a-8}{-4}\le 8 \Leftrightarrow a+2\le 8 \Leftrightarrow a\le 6$$

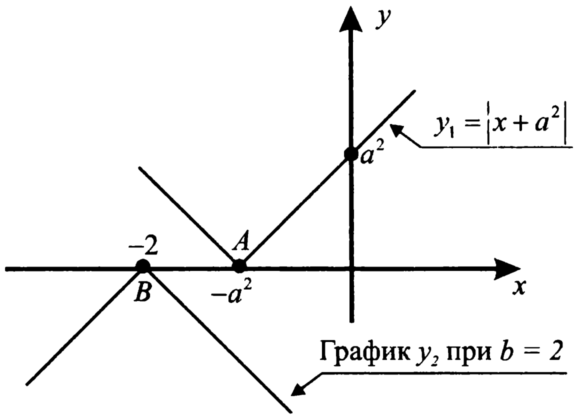
Ответ: $\varnothing$ (такого значения параметра a нет).

Пример 29. При каких значениях параметров a и b уравнение

$$\left|x+a^2\right|=|b-2|-|x+2| \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

Решение. Построим графики функций: $y_1 = |x + a^2|$ и $y_2 = |b-2| - |x+2|$.



Уравнение (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $A = B$, т.е. $b = 2$ и $-2 = -a^2$, $a = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $a = \pm\sqrt{2}$, $b = 2$.

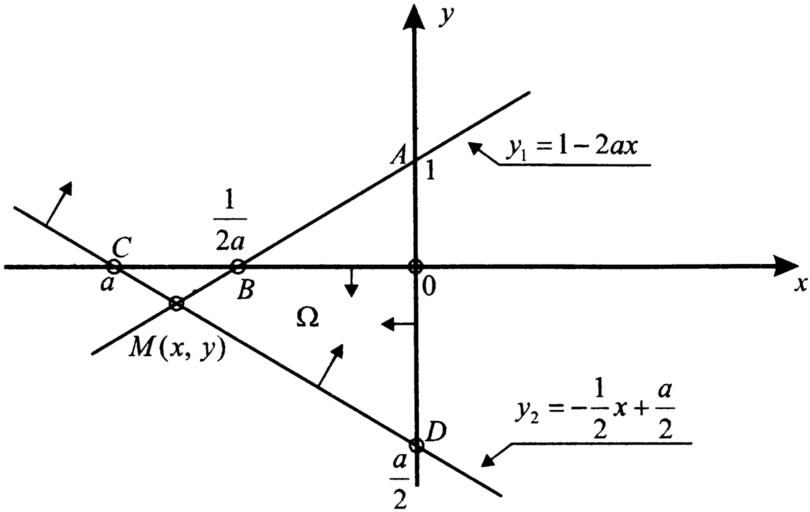
Пример 30. Найдите все значения параметра *a*, для которых существует пара $(x;\, y)$, $x < 0$, $y < 0$, являющаяся решением системы

$$\begin{cases} 2ax + y = 1, \\ x + 2y > a \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. 1. Если $a = 0$, то $y = 1$, следовательно, искомой пары $(x;\, y)$, $x < 0$, $y < 0$ нет, поэтому $a \neq 0$. Если $a > 0$ и $x < 0$, то из первого уравнения системы следует: $y = 1 - 2ax > 1$.

Итак, искомые значения параметра следует искать только для $a < 0$.

2. Построим графики функций: $y_1 = 1 - 2ax$ и $y_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$, считая $a < 0$.



Системе неравенств $\begin{cases} x + 2y > a, \\ x < 0,\ y < 0 \end{cases}$ удовлетворяют только точки внутренности Ω треугольника CDO. Прямая $l: y_1 = 1 - 2ax$ должна пересекаться с множеством Ω, $l \cap \Omega \neq \varnothing \Leftrightarrow a < \frac{1}{2a} < 0$. Т.к. $a < 0$, то неравенство $\frac{1}{2a} < 0$. истинно. Найдем решение неравенства $a < \frac{1}{2a}$ при $a < 0$:

$$a^2 > \frac{1}{2}; |a| > \frac{1}{\sqrt{2}}, a < -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Пример 31. При каких значениях параметра a система

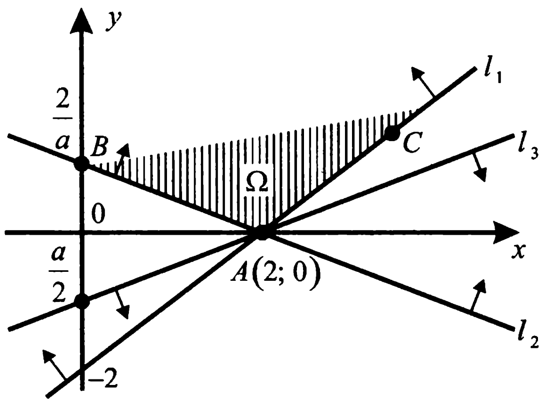
$$\begin{cases} x-y\le 2, \\ x+ay\ge 2, \\ x-2y\ge a \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

Решение. Построим прямые l_1, l_2, l_3 и полуплоскости, соответствующие неравенствам системы (1), где $l_1: y=x-2$; $l_2: x+ay=2$; $l_3: x-2y=a$.

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $A(2;0)$. Пусть Ω – множество решений первых двух неравенств. Рассмотрим пересечение

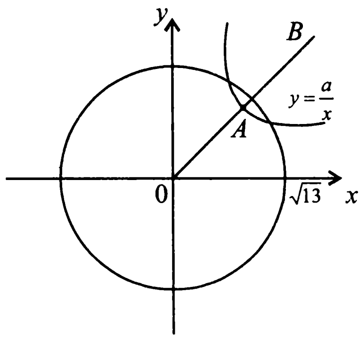
$$\Omega\cap l_3=\left[\begin{array}{l} \varnothing, \\ \{A\}, \\ \Phi, \text{ где } \Phi \text{ - отрезок.} \end{array}\right.$$



Система (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\Omega \cap l_3 = \{A\}$. Из условия $A \in l_3$ найдем **необходимые** условия на параметр $\begin{cases} x-2y=a, \\ x=2, \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=2$.

Проверим значение $a=2$ на **достаточность**. При $a=2$ система (1) имеет вид: $\begin{cases} y \ge x-2, \\ y \ge 1-\dfrac{1}{2}x, \\ y \le \dfrac{1}{2}x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=0. \end{cases}$

Ответ: 2.



Пример 32. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ xy=a, \quad a>0 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет: а) 4 решения; б) 2 решения; в) не имеет решения.

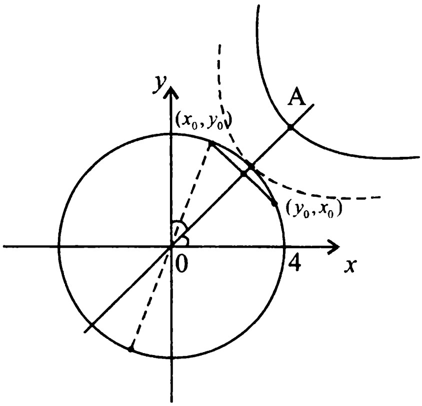
Решение. Заметим, что если (x_0, y_0) – решение (1), то:

1) $(-x_0, -y_0)$ – решение (1);

2) (y_0, x_0) – решение (1).

Пусть $[OA)$ – биссектриса первой четверти, длина отрезка $|OA|=\sqrt{2a}$ (находим из условия $x=y$, $x^2=a$, $x=\sqrt{a}$, $|OA|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2a}$. Если $|OA|=\sqrt{2a}=4$, т. е. $a=8$, то система

(1) имеет 2 решения; если $a>8$, то нет решений. При $0<a<8$ система (1) имеет 4 решения.



Ответ: а) $0<a<8$; б) $a=8$; в) $a>8$.

Пример 33. Докажите, что система

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2-2x}-2x+x^2+(x+y)^2\le 2\sqrt{2}, \quad x>2, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge -2+(x+y)(2x^2-xy+y^2) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть

$$\varphi(x)=\frac{2}{x^2-2x}-2x+x^2.$$

Т. к. $x>2$, то $x^2-2x>0$,

$$\varphi(x)=\frac{2}{x^2-2x}+\frac{x^2-2x}{1}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{x^2-2x}+\frac{x^2-2x}{\sqrt{2}}\right)\ge 2\sqrt{2}.$$

Поэтому первое неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда имеет место равенство, что обеспечивается лишь условиями: $x=-y$ и $x^2-2x=\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2-2x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Отсюда следует: $x=1+\sqrt{1+\sqrt{2}}=-y$.

При этих условиях второе неравенство имеет решение. Следовательно, данная система имеет единственной решение $x=-y=1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Пример 34. При каких значениях параметра *a* функция

$$h(x)=-2^{-ax^2+\left(a^2+4a-4\right)x-a^{2006}}$$

имеет максимум в точке $x_0=2$?

Решение. 1. Если функция $y=f(x)$ имеет максимум в точке $x_0=2$, то функция $-f(x)$ имеет минимум в этой точке. Поэтому искомое значение параметра *a* найдем из условия: функция

$$h(x)=2^{-ax^2+\left(a^2+4a-4\right)x-a^{2006}}$$

имеет минимум в точке $x_0=2$. Эта задача равносильна другой задаче: при каких *a* функция $\varphi(x)=-ax^2+\left(a^2+4a-4\right)x-a^{2006}$ имеет минимум в точке $x_0=2$.

2. Исследуем экстремальные значения функции $y=\varphi(x)$. Если $a=0$, то $y=\varphi(x)$ не имеет ни максимум, ни минимума. Если $a>0$, то эта функция не имеет минимума. Следовательно, искомое значение *a* следует искать среди $a<0$.

При $a<0$ функция $y=\varphi(x)$ имеет минимум в точке $x_0=\dfrac{a^2+4a-4}{2a}=2$. Отсюда следует: $a=\pm 2$.

Т.к. $a<0$, то $a=-2$.

Ответ: –2.

Пример 35. Решите неравенство

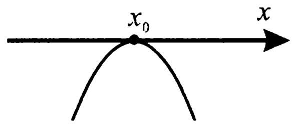
$$2ax^2 - 2x(1-1{,}5a) - 3 > 0\,,\ a \in R\,. \qquad (1)$$

Решение. 1. При $a = 0$ неравенство (1) имеет вид: $-2x - 3 > 0$, $x < -1{,}5$. Следовательно, $x < -1{,}5$ – решение (1) при $a = 0$.

2. Пусть $a \neq 0$. Вычислим $\frac{1}{4}D$ (D – дискриминант):

$$\frac{1}{4}D = (1-1{,}5a)^2 + 6a = (1{,}5a+1)^2 \geq 0\,,\ \ D = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}.$$

Пусть $a = -\frac{2}{3}$. Тогда квадратный трехчлен, находящийся в левой части (1), принимает неположительные значения (см. рис.):



Отсюда следует: (1) не имеет решения при $a = -\frac{2}{3}$.

Вычислим корни квадратного трехчлена при $a \neq 0$ и $a \neq -\frac{2}{3}$:

$$x_{1,2} = \frac{1-1{,}5a \pm (1{,}5a+1)}{2a}\,;\ x_1 = \frac{1}{a}\,,\ x_2 = -\frac{3}{2}\,.$$

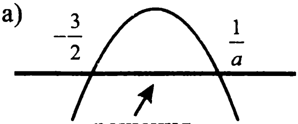
Левую часть (1) можно представить в виде:

$$2a\left(x - \frac{1}{a}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0\,. \qquad (2)$$

3. Если $a > 0$, то любое число x, $x < -\frac{3}{2}$ или $x > \frac{1}{a}$, является решением (2), а следовательно, и неравенства (1)

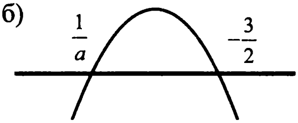
4. Пусть $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Если $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$, то $-\frac{3}{2} < \frac{1}{a}$, $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{a}\right)$ – решения (2) (см. рис. а)).

а)

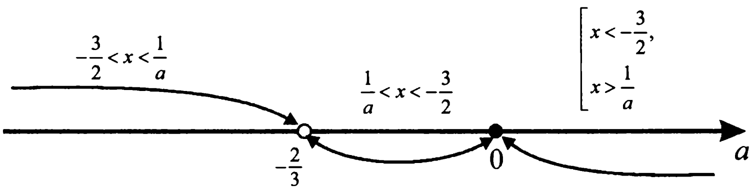


Если же $a \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$, то $\frac{1}{a} < -\frac{3}{2}$. Поэтому решениями неравенства (2) являются все $x \in \left(\frac{1}{a}; -\frac{3}{2}\right)$ (см. рис. б).

б)



Чтобы не ошибиться в написании ответа, изобразим на оси параметра a решения неравенства (1):



Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{a}\right)$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$;

$x \in \left(\frac{1}{a}; -\frac{3}{2}\right)$ при $a \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$;

$\varnothing$ (нет решения) при $a = -\frac{2}{3}$;

$x \in (-\infty; -1{,}5)$ при $a = 0$;

$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{a}; \infty\right)$ при $a \in (0; \infty)$.

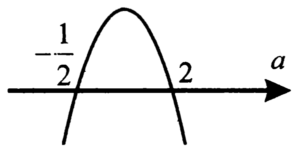
Пример 36. Решите неравенство

$$ax^2 + 2x + a - \frac{3}{2} > 0, \quad a \in R. \qquad (1)$$

Решение. Пусть Ω – множество решений неравенства (1). Найдём это множество.

1. При $a = 0$ решением (1) является любое x, $x > \frac{3}{4}$.

2. $a \neq 0$, вычислим дискриминант D:



$\frac{1}{4}D = 1 - a(a - \frac{3}{2}) = -a^2 + \frac{3}{2}a + 1$;

$D = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ или $a = 2$;

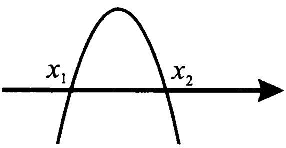
$D < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{2}$ или $a > 2$;

$D > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a < 0, \; 0 < a < 2$.

3. Пусть $D < 0$. При a, $a < -\frac{1}{2}$, неравенство (1) не имеет решения. Если $a > 2$, то (1) верно при всех $x \in R$. Итак, случай $D < 0$ рассмотрен полностью.

4. Пусть $D=0$. При $a=-\frac{1}{2}$ неравенство (1) не имеет решения, поэтому $a \neq -\frac{1}{2}$. При $a=2$ неравенство (1) имеет вид: $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 > 0$, которое верно для любого $x \in R$, $x \neq -\frac{1}{2}$.

5. Пусть $D>0$. При $-\frac{1}{2}<a<0$ ветви параболы направлены вниз.

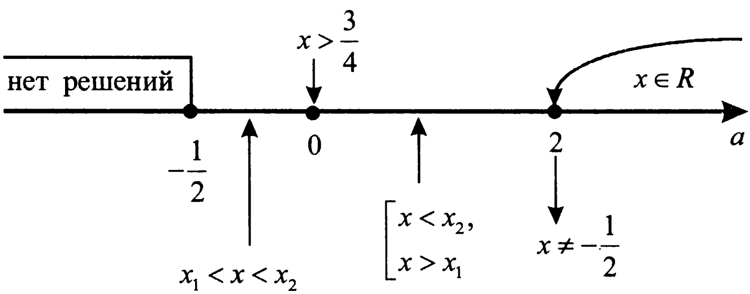


Любое x, $x_1<x<x_2$, является решением (1), где

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{\frac{1}{4}D}}{a}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{\frac{1}{4}D}}{a}.$$

Если же $0<a<2$, то множество $(-\infty;\ x_2)\cup(x_1;\ +\infty)$, является решением (1).

Отметим сказанное на оси параметра a:



Ответ: $\varnothing$ (нет решений) при $a \leq -\frac{1}{2}$;

$$x \in \left(\frac{-1+\sqrt{-a^2+1{,}5a+1}}{a};\ \frac{-1-\sqrt{-a^2+1{,}5a+1}}{a} \right)$$

при $-\frac{1}{2} < a < 0$;

$x \in \left(\frac{3}{4};\ \infty \right)$ при $a = 0$;

$$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{-a^2+1{,}5a+1}}{a};\ \frac{-1+\sqrt{-a^2+1{,}5a+1}}{a} \right)$$

при $0 < a < 2$;

$x \in R \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ при $a = 2$;

$x \in R$ при $a > 2$.

Пример 37.* При каких значениях параметра a неравенство

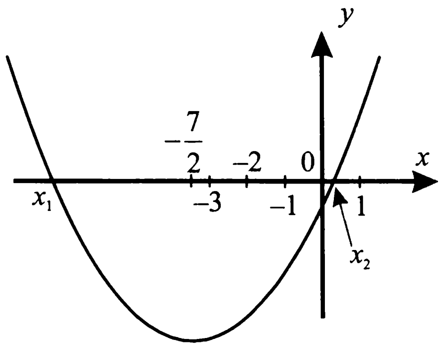
$$x^2 + 7x + a \le 0$$

имеет 8 и только 8 целых решений?

Решение. Парабола $y = x^2 + 7x + a = \left(x + \frac{7}{2} \right)^2 + b$ – симметрична относительно прямой $x = -3{,}5$, где b – некоторое выражение, зависящее от a. Найдем корни квадратного трехчлена:

$$x_1 = -\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} - a};\quad x_2 = -\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} - a}.$$

Ясно, что $\frac{49}{4} > a$, т.е. $a < 12{,}25$. Отрезок $\left[-\frac{7}{2};\ x_2 \right]$ должен содержать 4 целых решения: –3; –2; –1; 0. Отсюда следует: $0 \le x_2 < 1$.



Остальные 4 целых решения получим за счет симметрии относительно прямой $x=-3,5$.

Найдем искомые значения параметра a как множество решений системы

$$\begin{cases} a<12,25, \\ 0\le\dfrac{-7+\sqrt{49-4a}}{2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<12,25, \\ 7\le\sqrt{49-4a}<9 \end{cases} \Leftrightarrow -8<a\le 0.$$

Ответ: $(-8;\ 0]$.

Пример 38. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a},\ a\in R. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Ясно, что $xy\ne 0$, $a\ne 0$. Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=a-\dfrac{1}{a}$. Пусть $t=\dfrac{y}{x}$, $t\ne 0$, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{t}$. Тогда

$$t-\frac{1}{t}=a-\frac{1}{a}\Leftrightarrow t-a=\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\Leftrightarrow t-a=\frac{a-t}{at}\Leftrightarrow (t-a)\left(1+\frac{1}{at}\right)=0,$$

$$t_1=a\,,\; t_2=-\frac{1}{a}.$$

Система (1) равносильна

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y}{x}=a,\\ xy-\dfrac{x}{y}=a;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a},\\ y=\pm\sqrt{a^2+1};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{a},\\ xy-\dfrac{x}{y}=a;\end{array}\right.\Leftrightarrow\varnothing.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$; $y=\pm\sqrt{a^2+1}$ при $a\neq 0$;

$\varnothing$ (нет решений) при $a=0$.

Пример 39. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

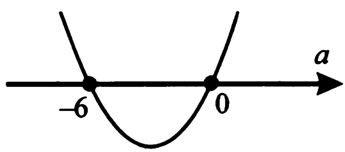
$$\frac{x^2+a^2}{a(a+6)}\geq 1 \qquad (1)$$

верно для всех $x\in(-1;\,1)$?

Решение. Найдем решение неравенства (1).

1. Ясно, что решения следует искать только для значений a, при которых $a(a+6)>0$. Тогда

$$(1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a(a+6)>0,\\ x^2\geq 6a;\end{array}\right.\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-6, \\ a>0 \end{array}\right. \\ x^2 \geq 6a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<-6, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} a>0, \\ |x| \geq \sqrt{6a} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow a<-6 \text{ – искомые значения.}$$

При $a>0$ неравенство (1) верно не при всех $x \in (-1; 1)$. Отсюда следует, что только $a<-6$ являются искомыми.

Ответ: $(-\infty; -6)$.

Пример 40. При каких значениях параметра *a* уравнение

$$16^x - a \cdot 4^{x+1} + 3a^2 - 2a = 0$$

имеет единственный корень?

Решение. 1. Введем обозначение $4^x = t$, $t>0$. Тогда данное уравнение имеет вид: $t^2 - 4at + 3a^2 - 2a = 0$. Это уравнение должно иметь **единственное решение во множестве, определяемом неравенством** $t>0$. Дискриминант *D* должен быть неотрицательным, поэтому

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 3a^2 + 2a \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq 0, \\ a \leq -2. \end{array}\right.$$

При $D=0$ или $\left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=-2 \end{array}\right.$ переменная *t* принимает соответственно значения:

$$t = 2a \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = 2a = \left|\begin{array}{l} 0,\ a=0, \\ -4,\ a=-2. \end{array}\right.$$

Т.к.переменная *t* может принимать только положительные значения, то $a \neq 0$ и $a \neq -2$.

2. Пусть $D>0$, т.е. $a>0$ или $a<-2$. Тогда

$$t_1 = 2a + \sqrt{a^2 + 2a},\ t_2 = 2a - \sqrt{a^2 + 2a}.$$

Если $a>0$, то $t_1>0$.

Выясним при каких a ($a>0$) $t_2 \le 0$:

$$\begin{cases} t_2 \le 0, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \le \sqrt{a^2+2a}, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 \le 2a, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a\le\frac{2}{3}.$$

Следовательно, для рассматриваемого случая только значения $a\in\left(0;\ \frac{2}{3}\right]$ являются искомыми, т.к. возможно только $t=2a+\sqrt{a^2+2a}$.

Пусть теперь $a<-2$. Тогда $t_2<0$. Заметим, что

$$t_1>0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+2a}>-2a \Leftrightarrow 2a>3a^2 \Leftrightarrow \varnothing$$

В данном случае нет искомых значений параметра a.

Ответ: $\left(0;\ \frac{2}{3}\right]$.

Пример 41. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$4x^2+4y^2+axy \ge x+y-\frac{1}{16} \qquad (1)$$

верно для любых x и y, удовлетворяющих условию $|x|=|y|$.

Решение. 1. Найдем Ω_1 – множество значений параметра a, при каждом из которых неравенство (1) верно для любого x, $x=y$:

$$\begin{cases} x=y, \\ 4x^2+4y^2+axy \ge x+y-\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ (8+a)x^2-2x+\frac{1}{16} \ge 0. \end{cases}$$

Т.к. второе неравенство должно быть верно для любого $x\in R$, то искомые значения a найдем как решения системы

$$\begin{cases} 8+a>0 \\ 1-\dfrac{8+a}{16}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\ge 8.$$

Следовательно, $\Omega_1=[8,+\infty)$.

2. Найдем Ω_2 – множество значений *a*, при каждом из которых неравенство (1) верно для любого $x\in R$, $x=-y$:

$$\begin{cases} x=-y, \\ 4x^2+4y^2+axy\ge x+y-\dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y, \\ (8-a)x^2\ge -\dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Второе неравенство должно быть верно для любого $x\in R$. А это возможно только при $8\ge a$, поэтому $\Omega_2=(-\infty,8]$.

3. Пересечение $\Omega_1\cap\Omega_2=\{8\}$ определяет только необходимое условие на параметр *a*. Проверим на *достаточность*.

При $a=8$ данное неравенство имеет вид:

$$4x^2+4y^2+8xy\ge x+y-\frac{1}{16} \Leftrightarrow \left((2x+2y)-\frac{1}{4}\right)^2\ge 0.$$

Последнее неравенство истинно. Следовательно, $a=8$ – искомое значение.

Ответ: 8.

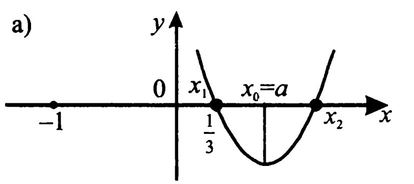
Пример 42. При каких значениях параметра *a* любое число $x\in[-1;\ \frac{1}{3})$ является решением неравенства $x^2-2ax+\frac{a}{2}>0$?

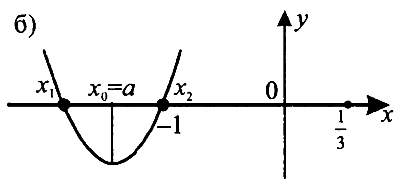
Решение. 1. Пусть $D = a^2 - \frac{a}{2}$, $D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$ Если $D < 0$, т.е. $0 < a < \frac{1}{2}$, то данное неравенство верно при всех $x \in R$, тем более при $x \in [-1;\ \frac{1}{3})$. Отсюда следует, что $a \in (0;\ \frac{1}{2})$ – искомое значение.

2. Пусть $D = 0$. Если $a = 0$, то данное неравенство имеет вид $x^2 > 0$, которое является ложным при $x = 0$. Поэтому $a = 0$ не является искомым значением. Если $a = \frac{1}{2}$, то данное неравенство представимо в виде $(x-1)^2 > 0$, которое верно при всех $x \in [-1;\ \frac{1}{3})$.

Следовательно, $a = \frac{1}{2}$ – искомое значение.

3. Рассмотрим теперь случай, когда $D > 0$, т. е. $a < 0$ или $a > \frac{1}{2}$; $x_1 = a - \sqrt{D}$, $x_2 = a + \sqrt{D}$. Множество $[-1;\ \frac{1}{3})$ принадлежит множеству решений данного неравенства тогда и только тогда, когда $x_1 \geq \frac{1}{3}$ или $x_2 < -1$ (см. рис. а) и б)).





Заметим, что абсцисса x_0 вершины пораболы $y = x^2 - 2ax + \frac{a}{2}$ равна $x_0 = a$. Искомые значения a найдем как множество решений совокупности следующих двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} a > \frac{1}{3}, \\ f(\frac{1}{3}) \geq 0; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} a < -1, \\ f(-1) > 0, \; f(x) = x^2 - 2ax + \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Решим эти системы:

$$\text{а)} \begin{cases} a > \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{9} - \frac{2}{3}a + \frac{a}{2} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3} \geq \frac{1}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{3};$$

$$\text{б)} \begin{cases} a < -1, \\ 1 + 2a + \frac{a}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1, \\ a > -0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

С учетом того, что $D > 0$, т. е. $a < 0$ или $a > \frac{1}{2}$, получим $\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}$.

Из результатов пунктов 1, 2 и 3 следует: $0 < a \leq \frac{2}{3}$.

Ответ: $(0; \frac{2}{3}]$

Пример 43. Найдите все целые значения параметра a, $-2 < a < 3$, при которых уравнение

$$4^{-x} + a \cdot 2^{1-x} - 3a^2 - 4a = 0$$

имеет единственный корень.

Решение. 1. Введем обозначение: $2^{-x}=t$, $t>0$. Тогда $4^{-x}=t^2$, данное уравнение в новых обозначениях имеет вид:

$$t^2+2at-3a^2-4a=0\,.$$

Здесь очень важно уяснить себе, что надо делать с этим уравнением? Ответ: найти соответствующие значения a, при которых полученное уравнение имеет единственное решение в области $t>0$.

Ясно, что дискриминант D этого уравнения должен быть неотрицательным (в противном случае оно не имеет корня):

$$\frac{D}{4}=4a(a+1)\,,\quad D=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=-1,\end{array}\right.\quad D>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<-1,\\ a>0.\end{array}\right.$$

2. Если $D=0$, т.е. $a=0$ или $a=-1$, то уравнение имеет единственное решение:

$$t=-a\pm\sqrt{\frac{D}{4}}=-a\,;\quad t=-a=\left|\begin{array}{l}0,\ a=0,\\ 1,\ a=-1.\end{array}\right.$$

Т.к. $t>0$, то в данном случае $a=-1$ – единственное искомое значение параметра a.

3. Пусть теперь $D>0$, т.е. $a<-1$ или $a>0$. Т.к. по условию $a\in(-2;\,3)$, то принадлежность $a\in\{1;\,2\}$ является *необходимым* условием на этот параметр a.

Проверим на *достаточность*. Сначала вычислим корни относительно t: $t_{1,2}=-a\pm2\sqrt{a(a+1)}$. Корень $t_1=-a-2\sqrt{a(a+1)}<0$. Выясним среди значений $a\in\{1;\,2\}$ существуют ли такие, при которых $t_2=2\sqrt{a(a+1)}-a>0$: $t_2=2\sqrt{2}-1>0$ при $a=1$; $t_2=2\sqrt{6}-2>0$ при $a=2$.

Следовательно, указанные значения a и достаточны для того, чтобы данное уравнение имело единственный корень.

Ответ: $\{-1;\ 1;\ 2\}$.

Пример 44. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{x^2+2a^2}{a(a+4)} \geq 2$$

верно при всех $x \in (-2;\ 2)$.

Решение. 1. Применим принцип необходимости и достаточности. Найдем **необходимые** условия на параметр a, используя, что $x=0$ является решением данного неравенства:

$$x=0\,,\quad \frac{2a^2}{a(a+4)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a}{a+4} \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+4>0, \\ a \geq a+4 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing, \\ \begin{cases} a+4<0, \\ a \leq a+4 \end{cases} \Leftrightarrow a<-4. \end{array}\right.$$

Итак, необходимое условие на параметр a: $a<-4$.

Проверим на **достаточность**. При $a<-4$ выражение $a(a+4)>0$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству:

$$x^2+2a^2 \geq 2a^2+8a \Leftrightarrow x^2 \geq 8a.$$

Последнее неравенство верно при всех $x \in R$, в том числе для $x \in (-2;\ 2)$.

Ответ: $(-\infty;\ -4)$.

Пример 45. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+2(a-1)x+a^2+2=0$$

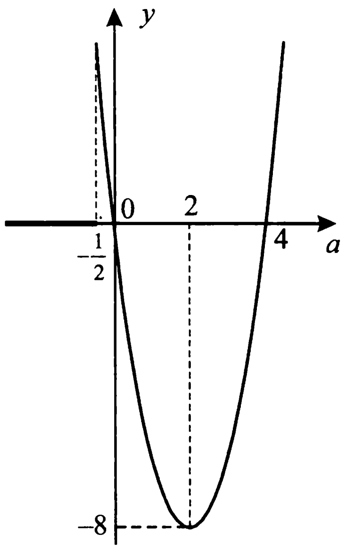
является наименьшей? Чему она равна?

Решение. Искомое значение параметра a найдем из условий:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - \text{наим}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 - a^2 - 2 \ge 0, \\ \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - \text{наим}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 1 \ge 0, \\ 4(a-1)^2 - 2\left(a^2 + 2\right) - \text{наим}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -\frac{1}{2}, \\ 2a^2 - 8a - \text{наим}. \end{cases}$$

Построим график и отметим условие $a \le -\frac{1}{2}$,



$y = 2a^2 - 8a$,

$y(0) = 0$, $a_1 = 0$,

$y(4) = 0$, $a_2 = 4$,

$y(2) = -8$,

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 = 4{,}5$.

При $a = -\frac{1}{2}$ функция $f(a) = 2a^2 - 8a$ принимает наименьшее значение, равное

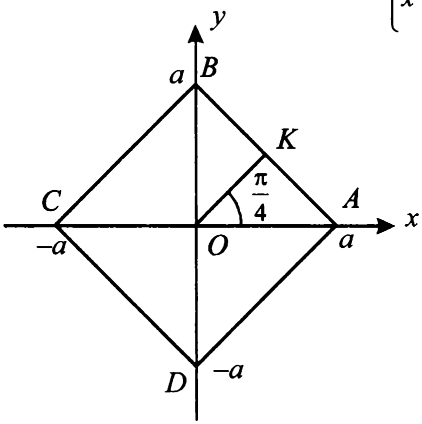
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5 – наименьшее значение при $a = -\frac{1}{2}$.

Замечание. Типичная ошибка, ограничиваются нахождением наименьшего значения функции $y = 2a^2 - 8a$, $y_{\min} = y(2) = -8$. Но это неправильно, по условию мы должны обеспечить существование корней: $D \ge 0 \Leftrightarrow a \le -\frac{1}{2}$. Далее, только для $a \le -\frac{1}{2}$ необходимо находить наименьшее значение функции $y = 2a^2 - 8a$.

Пример 46. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a; \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{a^2} \end{cases} \qquad (1)$$



имеет 4 и только 4 различных решения.

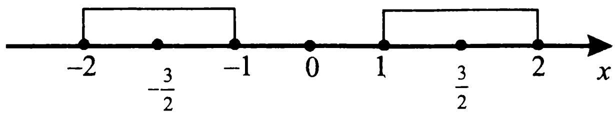
Решение. Если (x, y) – решение системы (1), то $(-x, -y)$, $(-x, y)$, $(x, -y)$ также являются решением системы (1). Поэтому достаточно найти решение (1) только для $x \ge 0$ и $y \ge 0$, т.е. в первой четверти. Построим множества точек плоскости, удовлетворяющих уравнениям системы (1). Первому уравнению удовлетворяют точки сторон квадрата $ABCD$, а второму – точки окружности $\omega = \text{окр}\left(0; \frac{1}{a}\right)$ с центром в начале координат и радиуса $\frac{1}{a}$. Заметим, что из вида системы следует положительность параметра, $a > 0$. Задача имеет 4 и только 4 решения только в двух случаях: 1) радиус $\frac{1}{a} = a$, т.е. $a = 1$; 2) $\frac{1}{a} = OK = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$, т.е. $a = \sqrt[4]{2}$ (K – точка касания окружности ω и стороны AB квадрата).

Ответ: $\left\{1; \sqrt[4]{2}\right\}$.

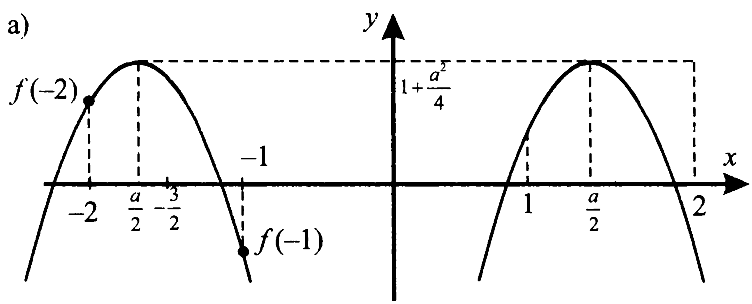
Пример 47. Каково максимальное значение функции $f(x)=1+ax-x^2$, если известно, что x – решение неравенства $x^4-5x^2+4\le 0$?

Решение. 1. Найдем решение данного неравенства:

$$x^4-5x^2+4\le 0 \Leftrightarrow 1\le x^2\le 4 \Leftrightarrow 1\le|x|\le 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x\le -1,\\ 1\le x\le 2.\end{array}\right.$$

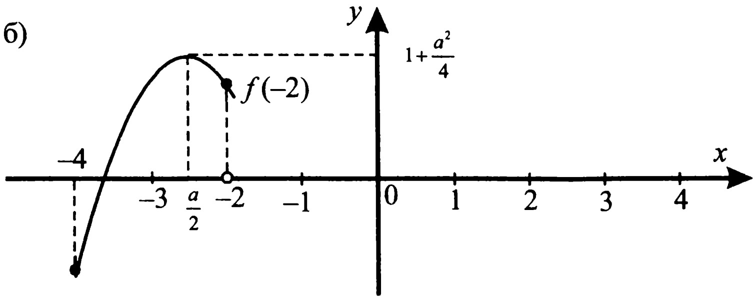


2. Абсциссой вершины параболы (наивысшей точки или максимума функции $y=f(x)$) является точка $x_0=\frac{a}{2}$, т.к. $f(x)=\frac{a^2}{4}+1-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$, причем $f_{\max}=f\left(\frac{a}{2}\right)=1+\frac{1}{4}a^2$ при $\frac{a}{2}\in[-2;-1]\cup[1;2]$ (см. рис. а)).



$f_{\max}=f(-2)$ при $\frac{a}{2}<-2$ (см. рис. б)).

б)



Аналогично рассуждая, получим: $f_{\max} = f(-1)$ при $-1<\frac{a}{2}\le 0$;

$f_{\max} = f(1)$ при $0<\frac{a}{2}<1$; $f_{\max} = f(2)$ при $\frac{a}{2}>2$.

Ответ: $f_{\max} = 1+\frac{a^2}{4}$, $a\in[-4;-2]\cup[2;4]$;

$f_{\max} = f(-2) = -2a-3$, $a<-4$;

$f_{\max} = f(-1) = -a$, $-2<a\le 0$;

$f_{\max} = f(1) = a$, $0<a<2$;

$f_{\max} = f(2) = 2a-3$, $a>4$.

Пример 48. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение

$$(1+a)\frac{x^2}{x^2+1}-3a\frac{x^2+1}{x^2}+4a=0 \qquad (1)$$

Решение. 1. Пусть $t=\frac{x^2}{x^2+1}$. Т. к. $x\ne 0$, то $0<t<1$. Уравнение (1) в новых обозначениях имеет вид

$$(1+a)t-3a\cdot\frac{1}{t}+4a=0 \Leftrightarrow (1+a)t^2+4a\cdot t-3a=0. \qquad (2)$$

Если $a=-1$, то $t=\frac{3}{4}$, $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Следовательно, $a=-1$ – одно из искомых значений.

2. Рассмотрим теперь случай, когда $a \neq -1$. Вычислим дискриминант уравнения (2):

$$\frac{1}{4}D = D_1 = 4a^2 + 3a(1+a) = 7a^2 + 3a;\ D \geq 0,$$

если $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; -\frac{3}{7}]$ или $a \geq 0$.

Тогда $t_{1,2} = \dfrac{-2a \pm \sqrt{D_1}}{1+a}$. Искомые значения параметра a, $a \neq -1$, найдем из условия, что $t_1 \in (0;1)$ или $t_2 \in (0;1)$.

а) Пусть $a \geq 0$, тогда $t_1 = \dfrac{-2a - \sqrt{D_1}}{1+a} \leq 0$. В этом случае значения a вычислим как решения системы неравенств

$$0 < t_2 < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{-2a + \sqrt{D_1}}{1+a} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a < \sqrt{D_1}, \\ \sqrt{D_1} < 1 + 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 3a > 0 \\ 2a^2 + 3a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a > 0.$

Следовательно, $a > 0$ – искомые значения.

б) Пусть $-\infty < a < -1$ или $-1 < a \leq -\frac{3}{7}$. Искомые значения a найдем как множество решений совокупности

$$\left[\begin{array}{l} t_1 \in (0;1), \\ t_2 \in (0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \dfrac{-2a - \sqrt{D_1}}{1+a} < 1, \\ 0 < \dfrac{-2a + \sqrt{D_1}}{1+a} < 1. \end{array}\right. \qquad (3)$$

При $a \in (-\infty; -1)$ совокупность (3) представима следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l}0<2a+\sqrt{D_1}<-1-a,\\0<2a-\sqrt{D_1}<-1-a.\end{array}\right.$$

Заметим, что неравенство $0<2a-\sqrt{D_1}$ не имеет решения при $a<-1$. Поэтому искомые значения a являются решениями системы

$$-2a<\sqrt{D_1}<-1-3a \Leftrightarrow 4a^2<7a^2+3a<1+6a+9a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3a^2+3a>0,\\2a^2+3a+1>0\end{cases} \Leftrightarrow a<-1.$$

Итак, $a<-1$ – искомые значения.

При $a\in(-1;-\frac{3}{7}]$ совокупность (3) имеет вид

$$\left[\begin{array}{l}0<-2a-\sqrt{D_1}<1+a,\\0<-2a+\sqrt{D_1}<1+a\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{D_1}<-2a,\\-1-3a<\sqrt{D_1}\end{cases}\Leftrightarrow\\\sqrt{D_1}<1+3a\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}7a^2+3a<4a^2,\\1+6a+9a^2<7a^2+3a,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<a<0,\\-1<a<-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -1<a<-\frac{1}{2}.$$

С учетом принадлежности $a\in(-1;-\frac{3}{7}]$, получим $a\in(-1;-\frac{1}{2})$.

Ответ: $(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(0;\infty)$.

Пример 49. Решите уравнение

$$(x+a)^4+(x+b)^4=2 \qquad (1)$$

Решение. Сделаем подстановку $x+\frac{a+b}{2}=t$.

Тогда $x+a=t+\frac{a-b}{2}=t+c$, где $c=\frac{a-b}{2}$; $x+b=t-\frac{a-b}{2}=t-c$.

В новом обозначении уравнение(1) имеет вид:

$$(t+c)^4+(t-c)^4=2 \Leftrightarrow ((t+c)^2-(t-c)^2)^2+2(t^2-c^2)^2=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2t\cdot 2c)^2+2(t^2-c^2)^2=2 \Leftrightarrow t^4+6c^2t^2+c^4-1=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^2=0{,}5\left(\sqrt{8c^4+1}-3c^2\right).$$

Заметим, что: $0\le t^2 \Leftrightarrow 1\ge|c| \Leftrightarrow 1\ge\frac{|a-b|}{2} \Leftrightarrow |a-b|\le 2$.

Из последнего неравенства следует: нет решений при $|a-b|>2$; $t=0$ при $|a-b|=2$, т. е. $x=\frac{a+b}{-2}$ – единственное решение при $|a-b|=2$; $t=\pm\sqrt{0{,}5\left(\sqrt{8c^4+1}-3c^2\right)}$ при $|a-b|<2$.

Ответ: нет решений при $|a-b|>2$;

$x=\frac{a+b}{-2}$ при $|a-b|=2$;

$$x=-\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{0{,}5\left(\sqrt{\frac{(a-b)^4}{2}+1}-3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)}$$ при $|a-b|<2$.

Пример 50. При каких значениях параметра a уравнение

$$12ax^5+15a^2x^4+4ax^3+8x-3=0$$

на промежутке $(-2;1]$ имеет хотя бы один положительный корень?

Решение. Пусть $f(x)=12ax^5+15a^2x^4+4ax^3+8x-3$. Заметим, что $f(0)=-3$. Вычислим

$$\int_0^1 f(x)dx = 12a\frac{x^6}{6} + 15a^2 \cdot \frac{x^5}{5} + 4a \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \Big|_0^1 =$$

$$= 2a + 3a^2 + a + 4 - 3 = 3a^2 + 3a + 1 > 0$$

(для любого $a \in R$). Отсюда следует, что непрерывная функция $y = f(x)$ на промежутке $[0;1]$ принимает и положительные значения. Т. к. $f(0) < 0$ и f – непрерывная функция, то найдется $x_0 \in (0;1]$, в которой $f(x_0) = 0$ при любом $a \in R$.

Ответ: $(-\infty;\infty)$.

Пример 51. При каких значениях параметра a системы

$$\begin{cases} x + y + 3 = a, \\ ax + y + 5a = a^2 + 6 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + (a^2 - 4a + 3)y + a^2 + 9 = 6a, \\ x^4 + y^2 = 2a - 6 \end{cases} \quad (2)$$

равносильны?

Решение. 1. Найдем решения системы (1):

$(a-1)x = a^2 + 9 - 6a \Leftrightarrow (a-1)x = (a-3)^2$.

Значение $a = 1$ не является решением полученного уравнения. Это означает, что система (1) не имеет решения при $a = 1$. Система (2) при $a = 1$ также не имеет решения, т. к. при $a = 1$ первое уравнение этой системы имеет вид: $x^2 + y^2 + 4 = 0$.

Следовательно, при $a = 1$ системы (1) и (2) равносильны, как не имеющие решений.

Пусть теперь $a \neq 1$,

тогда $x = \dfrac{(a-3)^2}{a-1}$, $y = a - 3 - x = a - 3 - \dfrac{(a-3)^2}{a-1} = (a-3)\dfrac{2}{a-1}$.

Итак, система (1) имеет при $a \neq 1$ единственное решение

$$x = \frac{(a-3)^2}{a-1}, \; y = \frac{2(a-3)}{a-1}. \quad (3)$$

2. Рассмотрим систему (2). Если (x_0, y_0) – решение (2), то $(-x_0, y_0)$ также является решением этой системы. Поскольку сис-

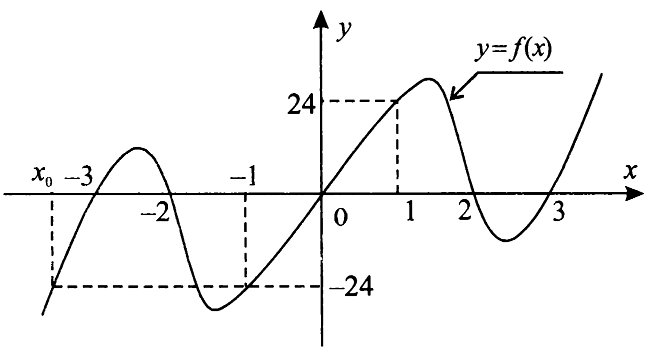
тема (1) имеет единственное решение при $a \neq 1$, то для равносильности этих систем необходимо, чтобы и система (2) имела единственное решение. Отсюда следует, что $x = 0$. Тогда из (3) следует: $a = 3,\ y = 0$. Подставляя $x = 0, y = 0$ и $a = 3$ в систему (2), убеждаемся, что (0; 0) – решение (2), причем при $a = 3$ других решений нет.

Ответ: $\{1; 3\}$.

Пример 52. При каких значениях параметра a уравнение $x(x^2-4)(9-x^2) = a$ имеет 5 целочисленных корней.

Решение. Решим графически, переписав данное уравнение следующим образом: $x(x^2-4)(x^2-9) = -a$. Пусть $f(x) = x(x^2-4)(x^2-9),\ \varphi(x) = -a$. Если $a = 0$, то имеются 5 целочисленных решения $0; \pm 2; \pm 3$. Теперь найдем целочисленные решения для $a \neq 0$. Функция $y = f(x)$ – нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

$f(1) = 24,\ f(-1) = -24$. Если $a > 0$, то данное уравнение может иметь лишь два целочисленных решения: $x = -1$ при $-a = f(-1) = -24$ и $x = x_0$ при $-a = f(x_0)$, x_0 – левее –3. Итак, при $a > 0$ данное уравнение может иметь не более двух целочисленных решений. Аналогично обстоит дело и при $a < 0$.



Ответ: 0.

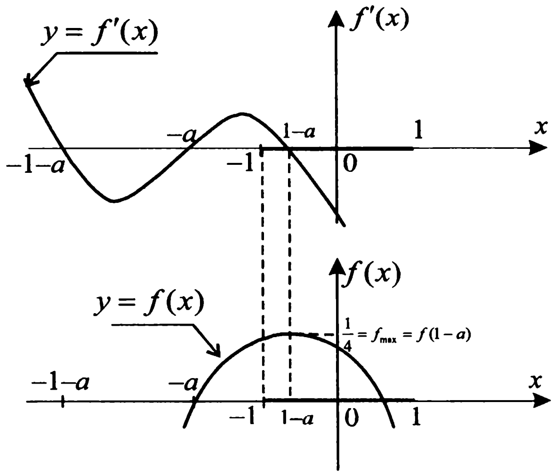
Пример 53. Для каждого значения $a>1$ найдите наибольшее значение функции $f(x)=-\frac{1}{4}(x+a)^4+\frac{(x+a)^2}{2}$ на промежутке $[-1;1]$.

Решение. 1. $f'(x)=-(x+a)^3+(x+a)=(x+a)(1-(x+a)^2)$,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a, \\ (x+a)^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a, \\ x=-a+1, \\ x=-a-1. \end{array}\right.$$

а) Пусть $1<a\le 2$. На промежутке $(-a;-a+1)$ функция $y=f(x)$ возрастает (см. рис. а), причем $-1<-a+1<1$, $x=1-a$ – точка максимума. Поэтому $f_{\max}=f(1-a)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

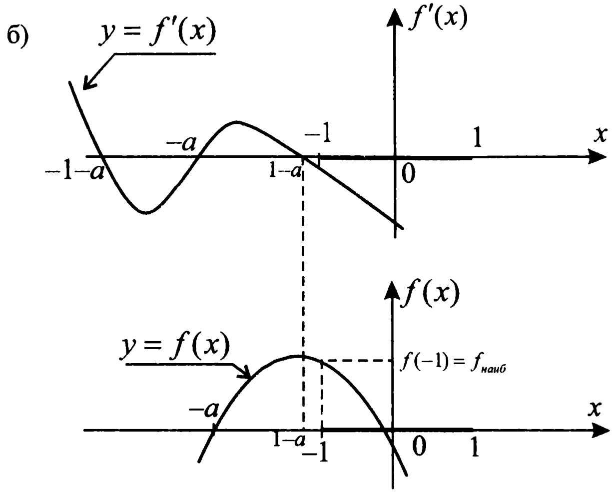
а)



б) Пусть теперь $a>2$ (см. рис. б). Точка $x=1-a$ – точка максимума, но при $a>2$ имеет место неравенство $1-a<-1$. Поэтому

$$f_{наиб.} = f(-1) = -\frac{1}{4}(a-1)^4 + \frac{(a-1)^2}{2} = \frac{(a-1)^2}{4}(2-(a-1)^2) =$$

$$= \frac{(a-1)^2}{4}(1+2a-a^2).$$



Ответ: $f_{\max} = f(1-a) = \frac{1}{4}$ при $1 < a \le 2$;

$f_{наиб.} = f(-1) = \frac{(a-1)^2}{4}(1+2a-a^2)$ при $a > 2$.

Пример 54. Сколько положительных корней имеет уравнение

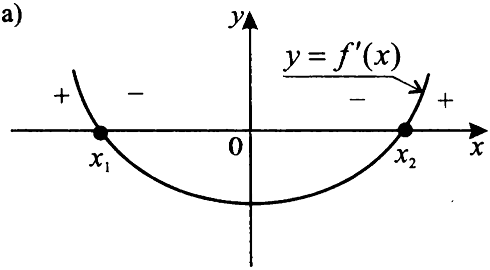
$$x^3 + ax^2 - x + \frac{\sqrt{a^2+3} - a}{3} = 0$$

Решение. 1. Пусть $f(x)=x^3+ax^2-x+\frac{\sqrt{a^2+3}-a}{3}$. Найдем экстремальные точки этой функции: $f'(x)=3x^2+2ax-1$,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2ax-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-a-\sqrt{D}}{3}, \\ x_2=\frac{-a+\sqrt{D}}{3} \end{array}\right., \ D=a^2+3.$$

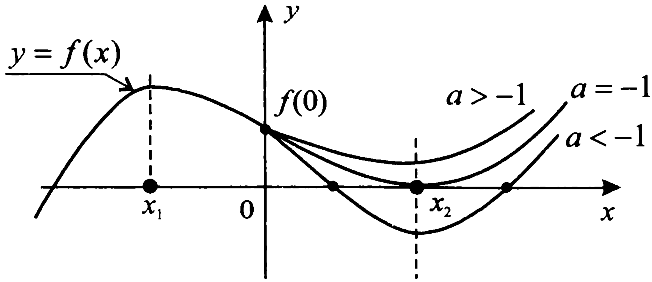
Заметим, что $x_1<0,\ x_2>0$. Для любых x, $x\in(x_1;\ x_2)$, производная $f'(x)<0$, поэтому функция $y=f(x)$ убывает на промежутке $(x_1;\ x_2)$. Вне этого промежутка $f'(x)>0$. Отсюда следует: x_1 – точка максимума, x_2 – точка минимума (см. рис. а)).

а)



2. Построим график функции $y=f(x)$. Т.к. $f(0)=\frac{\sqrt{a^2+3}-a}{3}>0$, а функция $y=f(x)$ убывает на $(x_1;\ x_2)$, то $f_{max}=f(x_1)>f(0)$. Теперь выясним значение $f(x_2)$ (см. рис. б)):

б)



$$f(x_2)=x_2^{\,3}+ax_2^{\,2}-x_2+x_2=x_2^{\,2}(x_2+a),$$

$$x_2+a=\frac{-a+\sqrt{D}}{3}+a=\frac{2a+\sqrt{D}}{3}\left|\begin{array}{l}>0,\ a\in(-1;\,+\infty);\\ =0,\ a=-1;\\ <0,\ a\in(-\infty;\,-1).\end{array}\right.$$

Поведение функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x=x_2$ зависит от знака $f(x_2)$:

$f(x_2)>0$ при $a\in(-1;+\infty)$; $f(x_2)=0$ при $a=-1$; $f(x_2)<0$ при $a\in(-1;\infty)$.

Теперь ответим на вопрос задачи.

Ответ: нет положительных корней при $a\in(-1;+\infty)$; один положительный корень при $a=-1$;

два положительных корня при $a\in(-\infty;-1)$.

Пример 55. Дана функция $f(x)=\left(a-\dfrac{1}{a}-x\right)\left(4-3x^2\right)$, $a<0$.

а) Докажите, что $f(x)$ имеет один максимум и один минимум.

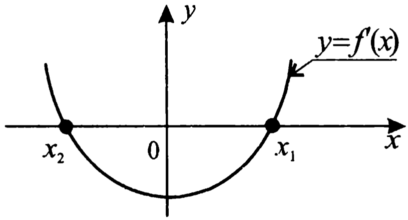
б) Найдите наименьшее значение разности $f_{\max}-f_{\min}$.

Решение. 1. Найдем критические точки функции $y=f(x)$:

$$f'(x)=3x^2-4-6x\left(a-\frac{1}{a}-x\right)=9x^2-6x\left(a-\frac{1}{a}\right)-4\ ;$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 9x^2-6x\left(a-\frac{1}{a}\right)-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{2}{3a}, \\ x_2=\dfrac{2a}{3}. \end{array}\right.$$

Т.к. $a<0$, то $x_1>0,\ x_2<0$. На промежутке $(x_2;\ x_1)$ производная $f'(x)<0$, поэтому функция $y=f(x)$ на этом промежутке убывает. Вне указанного промежутка $f'(x)>0$, следовательно, $f(x_2)$ – максимум функции, $f(x_1)$ – минимум (см. рис.).



Вычислим

$$f_{\max}-f_{\min}=f(x_2)-f(x_1)=$$

$$=\left(a-\frac{1}{a}-\frac{2a}{3}\right)\left(4-3\cdot\frac{4a^2}{9}\right)-\left(a-\frac{1}{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}\right)\left(4-3\cdot\frac{4}{9a^2}\right)=$$

$$=-\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=\frac{4}{9}\left(-a+\frac{1}{-a}\right)^3.$$

Т.к. $a<0$, то $-a+\dfrac{1}{-a}\geq 2$, $\left(-a+\dfrac{1}{-a}\right)^3\geq 8$.

Тогда наименьшее значение разности $f_{\max}-f_{\min}$ равно $\dfrac{32}{9}$.

Ответ: а) $f\left(\frac{2a}{3}\right)$ – максимум, $f\left(-\frac{2}{3a}\right)$ – минимум;
б) $\frac{32}{9}$.

Пример 56. Сколько отрицательных корней имеет уравнение

$$x^3 - ax^2 - x + \frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3} = 0\ ?$$

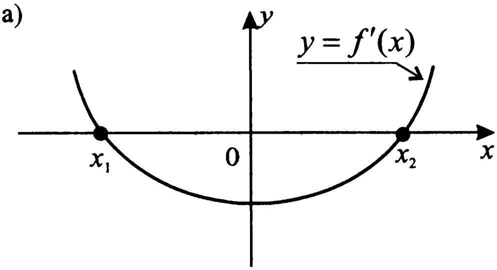
Решение. 1. Пусть $f(x) = x^3 - ax^2 - x + \frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3}$;
$f'(x) = 3x^2 - 2ax - 1$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2ax - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a-\sqrt{a^2+3}}{3}, \\ x_2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+3}}{3}. \end{array}\right.$$

Ясно, что $x_1 < 0,\ x_2 > 0$. На промежутке $(x_1;\ x_2)$ производная $f'(x) < 0$, поэтому функция $y = f(x)$ убывает на этом промежутке.

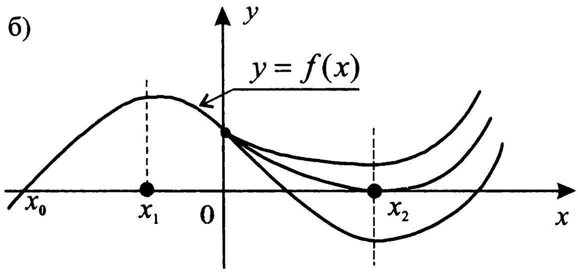
Вне указанного промежутка $f'(x) > 0$. Отсюда следует: x_1 – точка максимума, x_2 – точка минимума (см. рис. а)).

а)



Значение функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$ равно $f(0) = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 3}}{3} > 0$. Тогда $f_{max} = f(x_1) > f(0) > 0$. Следовательно, на промежутке $(x_1;\ 0)$ нет корней данного уравнения. Данное уравнение имеет единственный отрицательный корень x_0, т. к. функция $y = f(x)$ – непрерывная, возрастающая от $-\infty$ до $f(x_1) > 0$ (см. рис. б))

б)



Ответ: один, при любых значениях a.

Пример 57. Найдите число корней уравнения

$$x^3 - 2a^2x + a\sqrt{\frac{2}{3}} = 0 .$$

Решение. 1. Пусть $f(x) = x^3 - 2a^2x + a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Тогда

$$f'(x) = 3x^2 - 2a^2,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -a\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \\ x_2 = a\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{array}\right. .$$

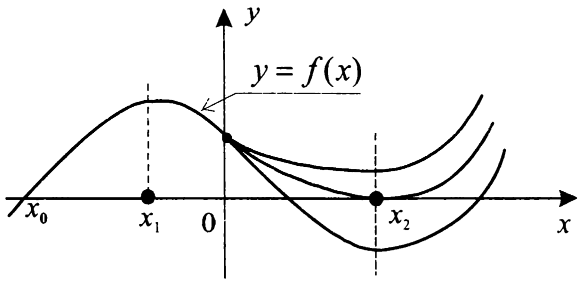
Если $a = 0$, то данное уравнение имеет вид: $x^3 = 0$, $x = 0$ – единственный корень.

2. Пусть $a > 0$. Тогда $x_1 < 0, x_2 > 0$, x_1 – точка максимума, x_2 – точка минимума (см. рис. а)). Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(x_1; x_2)$, поэтому $f(x_1) > f(0)$,

$f(0) = a\sqrt{\frac{2}{3}} > 0$, $f(x_1) > a\sqrt{\frac{2}{3}}$

(см. рис. б)). Вычислим значение $f(x_2)$,

б)



$$f(x_2) = x_2^{\,3} - 2a^2x_2 + x_2 = x_2\left(x_2^{\,2} - 2a^2 + 1\right) =$$

$$= x_2\left(\frac{2}{3}a^2 - 2a^2 + 1\right) = x_2\left(1 - \frac{4}{3}a^2\right).$$

Знак выражения $x_2\left(1 - \frac{4}{3}a^2\right)$ зависит только от знака $1 - \frac{4}{3}a^2$, т.к. $x_2 > 0$. Очевидно, $1 \ge \frac{4}{3}a^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \ge a^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \ge a > 0$.

Отсюда следует:

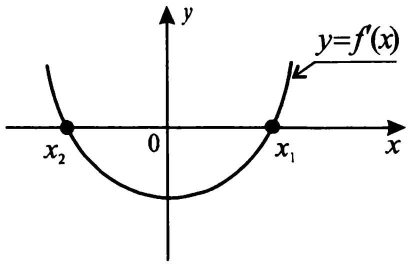
$f(x_2) > 0$ при $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, уравнение имеет один корень;

$f(x_2) = 0$ при $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, уравнение имеет два корня;

$f(x_2) < 0$ при $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$, уравнение имеет три корня;

3. Пусть $a < 0$. Тогда $x_2 < 0,\ x_1 > 0$, точки x_2 и x_1 меняются местами, x_2 – точка максимума, x_1 - точка минимума (см. рис. в)).

в)



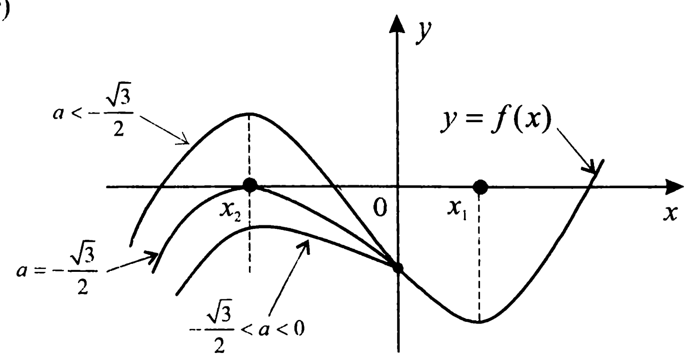
Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(x_2;\ x_1)$, $f(0) = a\sqrt{\frac{2}{3}} < 0$. Вычислим $f(x_2)$. Используя результаты предыдущего пункта, получим: $f(x_2) = x_2\left(1 - \frac{4}{3}a^2\right)$. Т.к. $x_2 = a\sqrt{\frac{2}{3}} < 0$, то:

$f(x_2) > 0$ при $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, уравнение имеет три корня;

$f(x_2) = 0$ при $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, уравнение имеет два корня;

$f(x_2) < 0$ при $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 0$, уравнение имеет один корень (см. рис. г)).

г)



Ответ: 3 корня при $a\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$; 2 корня при $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; один корень при $a\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 58. При каких значениях параметра a (a>0) все положительные решения неравенства $x^3-3ax^2+\frac{5}{4}a^2x\le 0$ являются решениями неравенства $a^2x^2-ax-2<0$?

Решение. 1. Положительным решением первого неравенства является любое число x, $\frac{a}{2}\le x\le\frac{5}{2}a$.

2. Решим второе неравенство. Применяя теорему Виета, легко убедиться, что $x_1=-\frac{1}{a}$, $x_2=\frac{2}{a}$ - корни соответствующего квадратного трехчлена. Поэтому любое число x, $-\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}$ - есть решение второго неравенства.

3. Искомые значения параметра a найдем как множество решений системы

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{a} < \dfrac{a}{2}, \\ \dfrac{5a}{2} < \dfrac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow 5a^2 < 4 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Пример 59. Решите неравенство

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x} \le 2x - 5. \qquad (1)$$

Решение ОДЗ: $2 \le x \le 3$. Введем подстановку: $\lambda = x - \dfrac{5}{2}$. Тогда $\sqrt{\lambda + \dfrac{1}{2}} - \sqrt{\dfrac{1}{2} - \lambda} = \sqrt{x-2} - \sqrt{3-x}$, $2x - 5 = 2\lambda$, $-\dfrac{1}{2} \le \lambda \le \dfrac{1}{2}$.

В новых обозначениях неравенство (1) имеет вид:

$$\sqrt{\lambda + \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \lambda} \le 2\lambda \qquad (2)$$

Неравенство (2) равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le \lambda < 0, \\ \sqrt{\lambda + \dfrac{1}{2}} - \sqrt{\dfrac{1}{2} - \lambda} \le 2\lambda; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 0 \le \lambda \le \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{\lambda + \dfrac{1}{2}} - \sqrt{\dfrac{1}{2} - \lambda} \le 2\lambda. \end{cases}$$

Обе части второго неравенства системы а) отрицательны, поэтому система а) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le \lambda < 0, \\ \sqrt{\dfrac{1}{2} - \lambda} - \sqrt{\lambda + \dfrac{1}{2}} \ge -2\lambda; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le \lambda < 0, \\ 1 - 2\sqrt{\dfrac{1}{4} - \lambda^2} \ge 4\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le \lambda < 0, \\ 1 - 4\lambda^2 \ge \sqrt{1 - 4\lambda^2}. \end{cases}$$

Так как $0 < \lambda^2 \le \dfrac{1}{4}$, то $1 - 4\lambda^2 \ge 0$. Значение $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ – решение второго неравенства полученной системы. Для значений λ, $-\dfrac{1}{2} < \lambda < 0$, выражение $1 - 4\lambda^2 > 0$. Поэтому, сокращая обе части второго неравенства на $\sqrt{1 - 4\lambda^2} > 0$, получим $\sqrt{1 - 4\lambda^2} \ge 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 - 4\lambda^2 \ge 1 \Leftrightarrow -\lambda^2 \ge 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Т. к. $\lambda \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$, то $\lambda \ne 0$.

Поэтому система а) имеет единственное решение:

$$\lambda = -\frac{1}{2},\ x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2},\ x_1 = 2.$$

Теперь решим систему б):

$$\text{б)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \lambda \le \dfrac{1}{2}, \\ 1 - 4\lambda^2 \le \sqrt{1 - 4\lambda^2}. \end{cases}$$

Число $\lambda = \frac{1}{2}$ – решение. Теперь найдем решение системы б) для λ, $0 \le \lambda < \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} 0 \le \lambda < \frac{1}{2}, \\ 1-4\lambda^2 \le \sqrt{1-4\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \lambda < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{1-4\lambda^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le \lambda < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует: $0 \le \lambda \le \frac{1}{2}$, $0 \le x - \frac{5}{2} \le \frac{1}{2}$ или $\frac{5}{2} \le x \le 3$.

Ответ: $\{2\} \cup [2,5;3]$.

Пример 60. Найдите все значения x, при каждом из которых

$$\max\left\{ \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + (3,6)^{3/2}}; \frac{2(x-1)}{5} + \frac{1}{x-1} \right\} < \sqrt{3,6}.$$

Решение. Условие данной задачи представим в виде системы

$$\begin{cases} \frac{2(x-1)}{5} + \frac{1}{x-1} < \sqrt{3,6}, \\ \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + (3,6)^{3/2}} < \sqrt{3,6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{0,4}\left(\frac{\sqrt{0,4}(x-1)}{1} + \frac{1}{\sqrt{0,4}(x-1)}\right) < \sqrt{3,6}, \\ x^3 - 3x^2 + 2x < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{0,4}(x-1)}{1} + \frac{1}{\sqrt{0,4}(x-1)} < 3 \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ 1 < x < 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} 1<x<2, \\ t=\sqrt{0,4}(x-1), \\ t+\dfrac{1}{t}<3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим систему

$$\begin{cases} 0<t<\sqrt{0,4}, \\ t+\dfrac{1}{t}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<t<\sqrt{0,4}, \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\sqrt{0,4}.$$

Тогда

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\sqrt{0,4}(x-1)<\sqrt{0,4} \Leftrightarrow 1+\frac{3\sqrt{0,4}-\sqrt{2}}{0,8}<x<2.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(1+\dfrac{3\sqrt{0,4}-\sqrt{2}}{0,8};2)$.

Пример 61. Докажите, что система

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x^3-\dfrac{1}{x^3}}}\geq\dfrac{2+\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}}, \\ \sqrt[4]{9x^4+3x^3y+2xy^3+2y^4}\geq\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. 1. Первое неравенство преобразуем учитывая что $y \neq 0$ и $x \neq 0$: $\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}} + \dfrac{-1}{\sqrt[3]{x^3+\dfrac{1}{x^3}}} \geq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Нетрудно убедиться, что

нет решения, если $\begin{cases} x>0, \\ xy<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>0, \\ xy>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<0, \\ xy<0. \end{cases}$

Рассмотрим более подробно случай, когда $x<0,\ \ xy>0$.

В этом случае:

а) $\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}} \leq \dfrac{1}{2}$, причем равенство достигается только при $x=y$;

б) $\dfrac{-1}{\sqrt[3]{x^3+\dfrac{1}{x^3}}} \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, причем равенство достигается только при $x=-1$.

Из а) и б) следует: $x=y=-1$ единственное решение первого неравенства.

2. Убедимся, что $x=y=-1$ является решением второго нера-вестава. Подставляя значения $x=-1$ и $y=-1$, получим $\sqrt[4]{9+3+2+2} \geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \geq \dfrac{3}{2}$ – верное неравенство. Следовательно, система имеет единственное решение.

Пример 62. Докажите, что система

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{-2} - \dfrac{3}{\sqrt{x^2+x+1}} \geq -\sqrt{6}, \\ (x-y)^2 \leq (2x+1-\sqrt{21})\sqrt[6]{x^4+xy+y^2} - \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. 1. Найдем решение первого неравенства

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)\le\sqrt{6}\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}\le 2,$$

где $t=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{6}}>0$, $t^2-2t+1\le 0$, $t=1$.

Тогда $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{6}}=1\Leftrightarrow x^2+x+1=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}, \\ x_2=\dfrac{-\sqrt{21}-1}{2}. \end{array}\right.$

Данная система может иметь решение только при $x=x_1$ или $x=x_2$. Если $x=x_1$, то второе неравенство имеет вид: $(x_1-y)^2\le-\dfrac{(x_1-y)^2}{x_1^2+y^2}$, которое верно тогда и только тогда, когда $x_1=y=\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}$.

Поэтому это неравенство имеет решение, причем единственное при $x_1=y=\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}$.

Пусть теперь $x=x_2$. Второе неравенство можно представить в виде: $\dfrac{1}{2}(x_2-y)^2+\dfrac{1}{2}\le(2x_2+1-\sqrt{21})\sqrt[6]{x_2^4+x_2y+y^2}+\dfrac{1}{\dfrac{x_2}{y}+\dfrac{y}{x_2}}$.

Т. к. $2x_2+1-\sqrt{21}=-2\sqrt{21}<0$, то правая часть полученного неравенства меньше $\frac{1}{2}$. Поэтому при $x=x_2$ данная система не имеет решения, чем и завершается решение данной задачи.

Пример 63. Решите уравнение

$$\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}, \quad a\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Решение.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a+x-|a|=\sqrt{(a+x)(2a+x)},\\ x>-a,\\ x\geq-2a\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{а)}\begin{cases}a\geq0,\ \ x>-a,\\ x=\sqrt{(a+x)(2a+x)};\end{cases}\\ \text{б)}\begin{cases}a<0,\ \ x\geq-2a,\\ 2a+x=\sqrt{(a+x)(2a+x)}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Система а) равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0,\ \ x>0\\ x=x;\end{cases}\Leftrightarrow\ \ a=0,\ \ x>0;\\ \begin{cases}x\geq0,\ \ a>0,\\ x^2=(a+x)(2a+x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq0,\ \ a>0,\\ x=-\frac{2}{3}a\end{cases}\Leftrightarrow\ \varnothing.\end{array}\right.$$

Следовательно, при $a=0$ решéнием системы а) являются $x>0$.

Теперь решим систему б). Заметим, что $x=-2a$ – очевидное ее решение. При $2a+x>0$ имеем:

$$\text{б)}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\ 2a+x>0,\\ \sqrt{2a+x}=\sqrt{a+x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\ a=0\end{cases}\Leftrightarrow\ \varnothing.$$

Итак, значение $x=-2a$ – решение системы б) при $a<0$.

Ответ: при $a = 0$ $x \in (0; \infty)$,

при $a < 0$ $x = -2a$,

при $a > 0$ нет решения.

Пример 64. Решите уравнение

$$2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a - x + \sqrt{x(a+x)}},\ a \in R. \qquad (1)$$

Решение. ОДЗ

$$x \geq -a,\ \ x \leq a,\ \ x(a+x) \geq 0 \qquad (2)$$

Если $a < 0$, то подсистема $x \geq -a$, $x \leq a$ противоречива. Следовательно, при $a < 0$ нет решения.

Если $a = 0$, то (1) имеет вид: $2\sqrt{x} - \sqrt{-x} = \sqrt{-x + \sqrt{x^2}}$; $x = 0$ – единственное решение (1).

Рассмотрим теперь $a > 0$. С учетом (2)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \geq 0 \\ 4a + 4x + a - x - 4\sqrt{a^2 - x^2} = a - x + \sqrt{x(a+x)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -0{,}6a, \\ 4(a+x) - 4\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{x(a+x)} \end{cases}$$

Прежде чем сократить обе части уравнения полученной системы на $\sqrt{a+x}$, выясним, может ли $x = -a$ быть корнем этой системы, а следовательно, и данного уравнения (1).

Значение $x = -a$ – корень второго уравнения, но не решение полученной системы. Проведя указанное сокращение, мы не теряем решения $x = -a$ уравнения (1). Так как $x \geq -0{,}6a$, то из (2) следует: $0 \leq x \leq a$. Тогда

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 4(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}) = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 16(2a - 2\sqrt{a^2 - x^2}) = x. \end{cases}$$

Решениями уравнения полученной системы являются:

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{64a}{1025}.$$

Ответ: при $a < 0$ нет решения, при $a \ge 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{64a}{1025}$.

Пример 65. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3\sqrt[3]{x} - 16(a-1)^2\sqrt[3]{8x+16} = \sqrt[6]{x^2+2x}$ имеет **единственное** решение.

Решение. 1. Ясно, что решение следует искать только для таких x, для которых $x^2 + 2x \ge 0$, т.е. $x \ge 0$ или $x \le -2$. Значение $x = -2$ не является решением данного уравнения. Если $x = 0$, то должно быть $a = 1$. Иначе говоря, при $a = 1$ значение $x_1 = 0$ является решением. Выясним имеет ли в этом случае данное уравнение решение, отличное от $x = 0$. Данное уравнение имеет вид : $3\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2+2x}$. Ясно, что решение этого уравнения следует искать только среди $x > 0$:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 3^6 \cdot x = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x = \dfrac{2}{3^6 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{3^6 - 1},\ x_2 > 0.$$

Итак, при $a = 1$ данное уравнение имеет 2 различных решения. Следовательно, $a \ne 1$. Теперь найдем искомые значения параметра a, считая $x^2 + 2x > 0$.

2. Пусть $x > 0$. Положим: $\sqrt[6]{x} = u,\ u > 0;\ \sqrt[6]{x+2} = v,\ v > 1$. Тогда $\sqrt[3]{x} = u^2,\ \sqrt[3]{x+2} = v^2$. Данное уравнение в новых обозначениях имеет вид: $3u^2 - 32(a-1)^2 v^2 = uv \Leftrightarrow 3\cdot\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 - 32(a-1)^2 = \dfrac{u}{v}$. Пусть $\dfrac{u}{v} = t,\ 0 < t < 1$. Подставим это значение в полученное уравнение:

$3t^2 - t - 32(a-1)^2 = 0$. Это уравнение должно иметь единственное решение относительно t, $0 < t < 1$; $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{D}}{6}$, где $D = 1 + 12 \cdot 32 \cdot (a-1)^2 > 1$, т. к. $a \neq 1$. Из этих двух значений t_1 и t_2 только одно приемлемо для t, $t = \dfrac{1+\sqrt{D}}{6}$. Искомые значения параметра a найдем из условия:

$$0 < \frac{1+\sqrt{D}}{6} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{D} < 5 \Leftrightarrow 1 + 12 \cdot 32(a-1)^2 < 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(a-1)^2 < 1 \Leftrightarrow |a-1| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < a < \frac{5}{4},\ a \neq 1.$$

3. Теперь найдем искомые значения параметра a для $x < -2$.

Положим $\sqrt[6]{-x} = u$, $u > 1$; $\sqrt[6]{-(x+2)} = v$, $v > 0$; $\dfrac{u}{v} = \sqrt[6]{\dfrac{x}{x+2}} = t$, $t > 1$.

Действительно, при $x < -2$ имеем: $\begin{cases} x < x+2, \\ x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x+2} > 1, \\ x+2 < 0 \end{cases}.$

Отсюда следует: $\sqrt[6]{\dfrac{x}{x+2}} > 1$.

Заметим, что при $x < -2$: $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{-x} = -(\sqrt[6]{-x})^2 = -u^2$;

$\sqrt[3]{x+2} = -\sqrt[3]{-(x+2)} = -(\sqrt[6]{-(x+2)})^2 = -v^2$;

$\sqrt[6]{x(x+2)} = \sqrt[6]{-x \cdot (-(x+2))} = \sqrt[6]{-x} \cdot \sqrt[6]{-(x+2)} = uv > 0$.

Подставляя полученные выражения в уравнение $3\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^2+2x}}-32(a-1)^2\frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[6]{x^2+2x}}=1$, получим $-3\cdot\left(\frac{u}{v}\right)^2+32(a-1)^2=\frac{u}{v}$

или $3t^2+t-32(a-1)^2=0$, где $t=\frac{u}{v}$. Полученное уравнение должно иметь единственное решение для $t>1$. Найдем корни: $t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{D}}{6}$.

Т. к. $t>1$, то $t=\frac{-1+\sqrt{D}}{6}$. Искомые значения параметра a вычислим из условия

$$\frac{-1+\sqrt{D}}{6}>1\Leftrightarrow\sqrt{D}>7\Leftrightarrow 1+12\cdot32(a-1)^2>49\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8(a-1)^2>1\Leftrightarrow|a-1|>\frac{1}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a>1+\frac{1}{2\sqrt{2}},\\ a<1-\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;1-\frac{1}{2\sqrt{2}})\cup(\frac{3}{4};1)\cup(1;\frac{5}{4})\cup(1+\frac{1}{2\sqrt{2}};\infty)$.

Пример 66. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $5\sqrt[5]{x+5}-3(a+1)^2\sqrt[5]{32x}=\sqrt[10]{x^2+5x}$ имеет два и только два различных решения.

Решение. 1. Область допустимых значений x найдем из условия: $x^2+5x\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge0,\\ x\le-5\end{array}\right.$.

Значение $x=0$ не является решением, а $x=-5$ – решение, если $a=-1$. Выясним при $a=-1$ данное уравнение имеет ли решение, отличное от $x=-5$. При $a=-1$ данное уравнение имеет вид :

$5\cdot\sqrt[5]{x+5}=\sqrt[10]{x(x+5)}$. Его решения следует искать только среди $x>0$. Тогда

$$\begin{cases} x>0, \\ 5^{10}(x+5)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x=\dfrac{5\cdot 5^{10}}{1-5^{10}} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing .$$

Следовательно, при $a=-1$ данное уравнение имеет только одно решение, поэтому $a\neq -1$.

2. Пусть $x>0$. Введем обозначения:

$$\sqrt[10]{x}=u,\ u>0;\ \sqrt[10]{x+5}=v,\ v>1;\ \frac{v}{u}>1 .$$

Тогда $\sqrt[5]{x}=u^2$, $\sqrt[5]{x+5}=v^2$, $\sqrt[10]{x^2+5x}=u\cdot v>0$. В новых обозначениях данное уравнение имеет вид:

$$5v^2-6(a+1)^2u^2=uv \Leftrightarrow 5\cdot\left(\frac{v}{u}\right)^2-6(a+1)^2=\frac{u}{v}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t^2-t-6(a+1)^2=0$$

где $t=\dfrac{v}{u}$, $t>1$.

Найдем корни полученного уравнения: $t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+120(a+1)^2}}{10}$.

Дискриминант $D=1+120(a+1)^2>1$ т. к. $a\neq -1$. Из двух значений для t приемлемо только одно: $t=\dfrac{1+\sqrt{D}}{10}$. Найдем Ω_1 – множество значений параметра a, при которых $t>1$:

$$\frac{1+\sqrt{D}}{10}>1 \Leftrightarrow \sqrt{D}>9 \Leftrightarrow 1+120(a+1)^2>81 \Leftrightarrow (a+1)^2>\frac{2}{3} \Leftrightarrow |a+1|>\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$\Omega_1=\left\{a:|a+1|>\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.$$

3. Теперь пусть $x<-5$. Введем обозначение: $\sqrt[10]{-x}=u,\ u>1;\ \sqrt[10]{-(x+5)}=v,\ v>0;\ \frac{v}{u}=\sqrt[10]{\frac{x+5}{x}}=t,\ 0<t<1$. Тогда

$$\sqrt[5]{x}=-\sqrt[5]{-x}=-(\sqrt[10]{-x})^2=-u^2,\ \sqrt[5]{x+5}=-\sqrt[5]{-(x+5)}=-v^2,$$

$$\sqrt[10]{x^2+5x}=\sqrt[10]{(-x)\cdot(-(x+5))}=u\cdot v>0$$

В новых обозначениях имеем:

$$-5v^2+6(a+1)^2u^2=uv \Leftrightarrow -5\cdot\left(\frac{v}{u}\right)^2+6(a+1)^2=\frac{v}{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t^2+t-6(a+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1-\sqrt{D}}{10}, \\ t=\dfrac{-1+\sqrt{D}}{10}. \end{array}\right.$$

Т. к. $t>0$, то $t=\frac{-1+\sqrt{D}}{10}$. Найдем Ω_2 – множество значений a, при которых справедливы неравенства:

$$0<t<1 \Leftrightarrow 0<\frac{-1+\sqrt{D}}{10}<1 \Leftrightarrow \sqrt{D}<11 \Leftrightarrow 1+120(a+1)^2<121 \Leftrightarrow |a+1|<1;$$

$$\Omega_2=\{a:|a+1|<1\}.$$

4. Для значений a, принадлежащих пересечению $\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2\neq\varnothing$, будем иметь два различных корня $t_1>1$ (см. п. 2) и $t_2<1$ (см. п. 3).

Т. к. соответствие между x и t взаимно однозначное, то данное уравнение будет иметь 2 различных решения относительно x при $a \in \Omega = \{a : \sqrt{\frac{2}{3}} < |a+1| < 1\}$.

Ответ: $(-2; -1-\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}} - 1; 0)$.

Пример 67. Решите неравенство

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+a} > 1, \qquad a \le -1. \qquad (1)$$

Решение.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -1, \\ \sqrt{3x-2} > 1 + \sqrt{x+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -1, \\ 2x - 3 - a > 2\sqrt{x+a}. \end{cases}$$

Найдем решение второго неравенства, введя подстановку

$$\sqrt{x+a} = t,\ t \ge 0,\ t^2 = x + a,\ \ x \ge -a. \qquad (2)$$

Указанное неравенство преобразуем следующим образом:

$2(x+a) - 3 - 3a > 2\sqrt{x+a}$. Оно в новых обозначениях имеет вид:

$$2t^2 - 2t - 3(a+1) > 0 \qquad (3)$$

Исследуем полученное неравенство:

1. Если дискриминант D такой, что $\frac{1}{4}D = 1 + 6(a+1) = 6a + 7 < 0$,

т. е. $a < -\frac{7}{6}$, то неравенство (3) верно при всех $t \ge 0$. Следовательно, $x \ge -a$ – решение данного неравенства при $a < -\frac{7}{6}$.

2.Если $D=0$, т.е. $a=-\frac{7}{6}$, то неравенство (3) можно представить так: $t^2-t+\frac{1}{4}>0$ или $\left(t-\frac{1}{2}\right)^2>0$, которое верно при всех $t\geq 0$, но $t\neq\frac{1}{2}$. Учитывая (2), получим: $x\geq -a$, $a=-\frac{7}{6}$, $x\geq\frac{7}{6}$;

$$\sqrt{x+a}\neq\frac{1}{2};\ \sqrt{x-\frac{7}{6}}\neq\frac{1}{2};\ x-\frac{7}{6}\neq\frac{1}{4},\ x\neq\frac{17}{12}.$$

Следовательно, при $a=-\frac{7}{6}$ множеством всех решений (1) является объединение двух промежутков:

$$\left[\frac{7}{6};\frac{17}{12}\right)\cup\left(\frac{17}{12};\infty\right).$$

3. Если $D>0$, т. е. $-1\geq a>-\frac{7}{6}$, то квадратный трехчлен, находящийся в левой части (3), имеет два корня

$$t_1=\frac{1-\sqrt{6a+7}}{2},\ t_2=\frac{1+\sqrt{6a+7}}{2}.$$

Неравенство (3) равносильно совокупности: $t<t_1$ или $t>t_2$. Если $a=-1$, то $t_1=0$, которые не являются решением (3). Тогда решениями (3) являются все значения t, $t>t_2=1$, $\sqrt{x-1}>1$ или $x>2$. Итак, $(2;\infty)$ – множество решений (1) при $a=-1$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $a\in\left(-\frac{7}{6};-1\right)$. Из неравенств $0\leq t<t_1$ и $t>t_2$ следует:

$$\sqrt{x+a} < \frac{1-\sqrt{6a+7}}{2} \Leftrightarrow -a \le x < \frac{a+4-\sqrt{6a+7}}{2};$$

$$\sqrt{x+a} > \frac{1+\sqrt{6a+7}}{2} \Leftrightarrow x > \frac{a+4+\sqrt{6a+7}}{2}.$$

Ответ: $x \in [-a, \infty)$ при $a < -\dfrac{7}{6}$;

$x \in \left[\dfrac{7}{6}; \dfrac{17}{12}\right) \cup \left(\dfrac{17}{12}; \infty\right)$ при $a = -\dfrac{7}{6}$;

$x \in \left[-a; \dfrac{4+a-\sqrt{6a+7}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{4+a+\sqrt{6a+7}}{2}; \infty\right)$ при $-\dfrac{7}{6} < a < -1$;

$x \in (2; \infty)$ при $a = -1$.

Пример 68. Найдите все значения параметра a, при которых любое решение неравенства $\sqrt{4x+5a-4} > \dfrac{4x+5a+2}{7}$ принадлежит множеству $(1;3) \cup (4;5)$.

Решение. 1. Найдем множество решений данного неравенства. Пусть $\sqrt{4x+5a-4} = t$, $t \ge 0$. Тогда $4x+5a+2 = t^2+6$, данное неравенство имеет вид:

$$t > \frac{t^2+6}{7} \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{4x+5a-4} < 6 \Leftrightarrow \frac{5-5a}{4} < x < \frac{40-5a}{4}.$$

2. Искомые значения параметра a найдем как множество решений совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{5-5a}{4}\geq 1,\\ \dfrac{40-5a}{4}\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a\leq 1,\\ 5a\geq 28\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing;\\ \begin{cases}\dfrac{5-5a}{4}\geq 4,\\ \dfrac{40-5a}{4}\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a\leq -11,\\ 5a\geq 20\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.\end{array}\right.$$

Ответ: $\varnothing$.

Пример 69. Решите систему неравенств $\begin{cases}\sqrt{x^2-3ax+a^2}\leq a,\\ \sqrt[3]{-x^3+2a^2x}\geq a.\end{cases}$

Решение. Из первого неравенства следует: $a\geq 0$. Если $a=0$, то система имеет вид: $\begin{cases}\sqrt{x^2}\leq 0,\\ \sqrt[3]{-x^3}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $a>0$. Тогда данная система равносильна следующим:

$$\begin{cases}0\leq x^2-3ax+a^2\leq a^2,\\ -x^3+2a^2x\geq a^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3ax+a^2\geq 0,\\ x(x-3a)\leq 0,\\ x^3-2a^2x+a^3\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-3a)\leq 0,\\ (x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}a)(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a)\geq 0\\ (x-a)(x^2+ax-a^2)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\leq x\leq\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a,\\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}a\leq x\leq 3a,\end{array}\right.\\ (x-a)(x^2+ax-a^2)\leq 0.\end{cases}$$

Последнее неравенство решим методом интервалов, учитывая, что:

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-a}{2}(\sqrt{5}+1), \\ x_2 = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5}-1). \end{array}\right.$$

Т. к. $\dfrac{-a}{2}(\sqrt{5}+1) < \dfrac{a}{2}(\sqrt{5}-1) < a$, то решениями указанного неравенства являются промежутки (см. рис.)

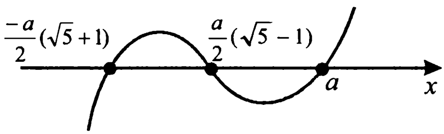


Рис. 1

$$x \le \frac{-a}{2}(\sqrt{5}+1) \text{ и } \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \le x \le a.$$

Теперь найдем общее решение данной системы для параметра $a > 0$:

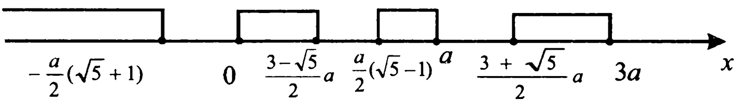


Рис. 2

Пересечение множеств $\Omega_1 = (-\infty; \dfrac{-a}{2}(\sqrt{5}+1)] \cup [\dfrac{a}{2}(\sqrt{5}-1); a]$ и

$\Omega_2 = [0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a] \cup [\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}a; 3a]$ является пустым (см. рис. 2)

Ответ: $x = 0$ при $a = 0$; нет решений при $a \ne 0$.

Пример 70. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2 + y^2 + 2axy + 2a} = a$ имеет решение, причем единственное?

Решение. 1. Найдем **необходимые** условия на параметр a учитывая, что если (x_0, y_0) – решение данного уравнения, то $(-x_0, -y_0)$

также является решением. Поэтому это уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $x_0 = y_0 = 0$. При $x = y = 0$ получим: $\sqrt{2a} = a \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = a^2, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 2 \end{array}\right.$.

2. Проверим эти значения параметра на **достаточность**. Пусть $a = 0$, тогда данное уравнение имеет вид: $\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Следовательно, при $a = 0$ данное уравнение имеет единственное решение.

Пусть $a = 2$. Тогда $\sqrt{x^2 + y^2 + 4xy + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4xy = 0$.

Если $x = 0$, то $y = 0$, т.е. данное уравнение при $a = 2$ имеет решение $x = y = 0$. Найдем другое решение. При $x \neq 0$ обе части полученного однородного уравнения можно разделить на x^2, сохраняя равносильность:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = (-2 - \sqrt{3})x, \\ y = (-2 + \sqrt{3})x. \end{array}\right.$$

Полагая, например, что $x = 1$, получим два решения $(1; -2 - \sqrt{3})$ и $(1; -2 + \sqrt{3})$. Отсюда следует: $a \neq 2$.

Ответ: 0.

Пример 71. При каких целых значениях параметра a неравенство $\sqrt{x^3 - 3x + 2} + 6a - a^2 - 5 > 0$ верно при всех допустимых значениях x?

Решение. 1. Найдем **необходимые** условия на параметр a, исходя их того, что $x = 1$ является допустимым значением. При $x = 1$ имеем: $6a - a^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < a < 5$.

Отсюда следует: $a \in \{2; 3; 4\}$ – необходимое условие на a.

2. Проверим на **достаточность**. Можно это проделать без всяких вычислений. Действительно, при всех допустимых значениях x выражение $\sqrt{x^3-3x+2}\ge 0$. Кроме того, $6a-a^2-5>0$ при $a\in\{2, 3, 4\}$, т. к. $a^2-6a+5<0$ при $1<a<5$.

Следовательно, найденные значения a достаточны, чтобы выполнялось условие задачи.

Ответ: $\{2;3;4\}$.

Пример 72. Найдите все целые значения параметра a, $0<a<6$, при которых неравенство $\sqrt{-x^2+4x}<a^2-4a+3$ верно при всех допустимых значениях x.

Решение. Искомые значения параметра a найдем из условия $f_{\max}<a^2-4a+3$, где $f_{\max}$ – наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{-x^2+4x}$. Очевидно, что $f_{\max}=2$, т. к. $-x^2+4x\le 4$, причем значение *4* достигается при $x=2$. Тогда искомые значения a найдем как множество решений системы:

$$\begin{cases} 0<a<6, \\ a^2-4a+3>2, \\ a\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<6,\ a\in Z \\ \left[\begin{array}{l} a>2+\sqrt{3}, \\ a<2-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<2-\sqrt{3}, \\ 2+\sqrt{3}<a<6, \\ a\in Z. \end{cases}$$

В промежутке $(0;2-\sqrt{3})$ нет целых значений, а на промежутке $(2+\sqrt{3};6)$ целых значений два: $a=4$ и $a=5$.

Ответ: $\{4;5\}$.

Пример 72. Решить неравенство

$$\frac{x+2}{x\log_2\left(x^2+x+\dfrac{3}{4}\right)}\ge 0 \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что $x=-2$ – решение (1). Теперь найдем решения (1) для $x\neq -2$:

$$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{а)}\begin{cases} x>-2, \\ x\log_2(x^2+x+\frac{3}{4})>0; \end{cases} \\ \text{б)}\begin{cases} x<-2, \\ x\log_2(x^2+x+\frac{3}{4})<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Очевидно, что

$$\log_2(x^2+x+\frac{3}{4})>0 \Leftrightarrow x^2+x+\frac{3}{4}>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\frac{1+\sqrt{2}}{-2}, \\ x>\frac{\sqrt{2}-1}{2}. \end{array}\right.$$

Тогда $\log_2(x^2+x+\frac{3}{4})<0 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{2}}{-2}<x<\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

3. Решение системы а):

$$\text{а)}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2<x<0, \\ \log_2(x^2+x+\frac{3}{4})<0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{2}}{-2}<x<0 \ \text{(см. рис. 1).} \\ \begin{cases} x>0, \\ \log_2(x^2+x+\frac{3}{4})>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2}<x \ \text{(см. рис. 2).} \end{array}\right.$$

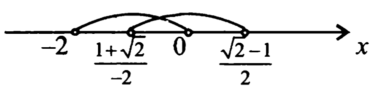


Рис. 1

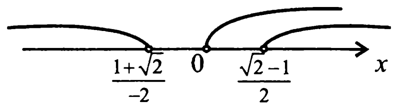


Рис. 2

4. Решение системы б):

$$б)\Leftrightarrow\begin{cases}x<-2,\\ \log_2(x^2+x+\frac{3}{4})>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-2,\\ \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{1+\sqrt{2}}{-2};\\ x>\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x<-2 \text{ (см. рис. 3)}$$

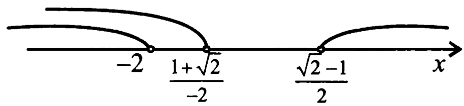


Рис. 3

Ответ: $(-\infty,-2]\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{-2},0\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2},\infty\right)$.

Пример 73. Чему равна разность n_1-n_2, где n_i – число различных действительных корней уравнения i, $i\in\{1;2\}$,

$$x^3-3x^2+1=0 \qquad (1); \qquad |\log_2 x|=\frac{1}{|x-1|} \qquad (2).$$

Решение. 1. Графическим способом найдем число различных корней уравнения (2). Построим графики функций $f(x)=|\log_2 x|$ и

$$\varphi(x)=\frac{1}{|x-1|}.$$

Если $x>1$, то $\log_2 x=\dfrac{1}{x-1}$ (см. рис. 1). Графики пересекаются в этом случае в единственной точке (2; 1), т. е. $x_1=2$ – корень (2).

Если $0<x<1$, то $f(x)=-\log_2 x$, т. е. часть графика функции $y=\log_2 x$ для $0<x<1$ отражаем симметрично относительно оси Ox (см. рис. 2). Для тех же значений $x\in(0;1)$ график функции $y=\varphi(x)$ симметричен графику функции $y=\dfrac{1}{x-1}$ относительно прямой $x=1$, т. к. $\dfrac{1}{|x-1|}=\dfrac{-1}{x-1}$ $(0<x<1)$. Графики пересекаются в этом случае также в единственной точке $(x_2;y_2)$, $x_2\in(0;\frac{1}{2})$.

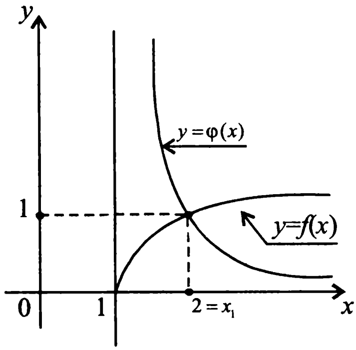


Рис. 1

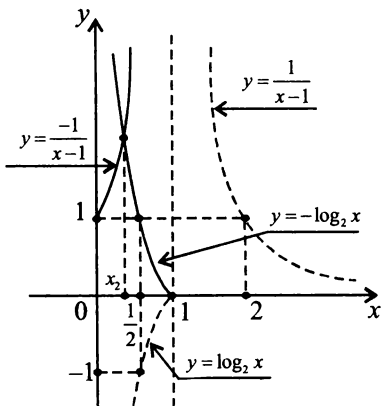


Рис. 2

Итак, $n_2=2$.

2. Теперь вычислим n_1. Пусть $h(x)=x^3-3x^2+1$. Тогда $h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$, $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$ Ясно, что $x=0$ –точ-

ка максимума, а $x=2$ – точка минимума, причем $h_{\max}=h(0)=1>0$, $h_{\min}=h(2)=-3<0$, $h(1)=-1$, $h(3)=1$.

Учитывая сказанное, построим график функции $y=h(x)$.

Т. к. при $x\to-\infty$ функция $h(x)\to-\infty$, а при $x\to+\infty$ эта функция $h(x)\to\infty$, то уравнение (1) имеет 3 различных корня, т. е. $n_1=3$.

3. Разность $n_1-n_2=3-2=1$.

Ответ: 1.

Пример 74. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\log_{27}x\cdot\log_{27}y=\log_{27}(xy), \\ 4\log_{27}\dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_{27}x}{\log_{27}y}. \end{cases}$$

Решение. Решим эту систему переходом к новым переменным: $\log_{27}x=u$, $\log_{27}y=v$.

Т. к. $x>0$, $y>0$ и $y\neq1$, то данную систему уравнений можно представить в виде:

$$\begin{cases} u+v=3uv, \\ 4\cdot(u-v)=\dfrac{u}{v}. \end{cases} \qquad (*)$$

Найдем более простую зависимость между переменными u и v, чтобы можно было применить метод подстановки. Перемножим почленно уравнения полученной системы:

$$4\cdot(u^2-v^2)=3u^2 \Leftrightarrow u^2=4v^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v, \\ u=-2v. \end{array}\right.$$

Найдем решения двух систем а) и б):

$$\text{а) } \begin{cases} u=2v, \\ u+v=3uv, \\ 4\cdot(u-v)=\dfrac{u}{v}; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} u=-2v, \\ u+v=3uv, \\ 4\cdot(u-v)=\dfrac{u}{v}. \end{cases}$$

Замечание. Уравнение $u^2 = 4v^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2v, \\ u = -2v \end{array}\right.$ является следствием уравнений системы (*). Не всегда система вида (*) равносильна системе $\begin{cases} u + v = 3uv, \\ u^2 = 4v^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4(u - v) = \dfrac{u}{v}, \\ u^2 = 4v^2. \end{cases}$

В данном случае равносильность имеет место, но нам представляется целесообразным подчеркнуть эту особенность (в одном из предыдущих разделов такие системы приведены).

Из первых двух уравнений системы а) следует: $u = 1$, $v = \dfrac{1}{2}$, которые удовлетворяют и третьему уравнению, т. е. в данном случае равносильность имеет место, о чем сказано выше.

Следовательно $\begin{cases} \log_{27} x = 1, \\ \log_{27} y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27, \\ y = 3\sqrt{3}. \end{cases}$

Далее, $u = -\dfrac{1}{3}$ и $v = \dfrac{1}{6}$ является решением системы б), поэтому

$$\begin{cases} \log_{27} x = -\dfrac{1}{3}, \\ \log_{27} y = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}, \\ y = \sqrt[6]{3^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}, \\ y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(27; 3\sqrt{3})$, $(\dfrac{1}{3}; \sqrt{3})$.

Пример 75. Решите уравнение

$$2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0.$$

Решение. 1. Область допустимых значений x и a найдем из условий: $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$, $ax \neq 1$, $a^2x \neq 1$. Перейдем к основанию

a. Но сначала решим данное уравнение **при a=1 (иначе возможна потеря корней)**. Если $a=1$, то любое действительное число x, $x>0$ и $x \neq 1$, является решением.

Итак,

$$x \in (0;1) \cup (1;\infty) \text{ – решение при } a=1 \quad (*)$$

Теперь найдем решения данного уравнения для $a>0$, $a \neq 1$, переходя к основанию a:

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{1+\log_a x} + \frac{3}{2+\log_a x} = 0 \qquad (**)$$

Введем подстановку $1+\log_a x = t$, $t \neq 0$, $t \neq -1$, $t \neq -2$. В новых обозначениях уравнение (**) имеет вид:

$$\frac{2}{t-1} + \frac{1}{t} + \frac{3}{t+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{t-1} + \frac{3}{t+1} = \frac{-1}{t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5t-1}{t^2-1} = \frac{-1}{t} \Leftrightarrow 6t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = -\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

2. Вычислим корни данного уравнения:

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a x + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

$$t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_a x + 1 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_a x = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{a\sqrt[3]{a}}.$$

Учитывая (*) и найденные корни, получим следующий ответ.

Ответ: $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$ при $a=1$;

$x \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{a\sqrt[3]{a}} \right\}$ при $a>0$, $a \neq 1$;

нет решений при $a \leq 0$.

Пример 76. Решите уравнение

$$8\log^2_{a^2}(x-a)-6\log_{a^2}(x-a)+1=0.$$

Решение. Введем подстановку $\log_{a^2}(x-a)=t$. Тогда

$$8t^2-6t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}, \\ t=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Вычислим корни данного уравнения:

$$t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{a^2}(x-a)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=(a^2)^{\frac{1}{2}}, \\ a\neq 0, |a|\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-a=|a|, \\ a\neq 0, |a|\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0, a\neq 1, \\ x=2a; \end{cases} \\ \begin{cases} a<0, a\neq -1 \\ x=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$t=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_{a^2}(x-a)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=(a^2)^{\frac{1}{4}}, \\ a\neq 0, |a|\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a+\sqrt{|a|}, \\ a\neq 0, |a|\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0, a\neq 1, \\ x=a+\sqrt{a}; \end{cases} \\ \begin{cases} a<0, a\neq -1, . \\ x=a+\sqrt{-a}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\{2a; a+\sqrt{a}\}$ при $a>0$ и $a\neq 1$;

$x \in \left\{0; a+\sqrt{-a}\right\}$ при $a<0$ и $a \neq -1$;

нет решений при $a \in \{-1;0;1\}$.

Пример 77. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(ax+y) = 2\lg x + \lg y, \\ \lg(x+y) = \lg x + \lg y. \end{cases}$$

Решение. Ясно, что $x>0$ и $y>0$. При таких значениях x и y данная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} ax+y = x^2 \cdot y, \\ x+y = xy. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе почленно, получим:

$$x(a-1) = xy(x-1) \Leftrightarrow a-1 = y(x-1).$$

Если $x=1$, то из уравнения $x+y=xy$ следует: $1+y=y$, которое не имеет решения. Следовательно, $x \neq 1$, поэтому $a-1 \neq 0$.

Тогда $y = \dfrac{a-1}{x-1}$. Решения данной системы найдем как множество решений системы

$$\begin{cases} y = \dfrac{a-1}{x-1}, \\ x+y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a-1}{x-1}, \\ x + \dfrac{a-1}{x-1} = x \cdot \dfrac{a-1}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a-1}{x-1}, \\ x^2 - ax + a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a-1}{x-1}, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = a-1 \end{array} \right. \end{cases}$$

Т.к. $x \neq 1$, то $x-1=a-2 \neq 0$. Из условия $x>0$ следует $a>1$; $y=\dfrac{a-1}{a-2}$. Далее, учитывая $a>0$ и $y>0$, получим $a>2$.

Ответ: $(a-1;\dfrac{a-1}{a-2})$ при $a>2$; нет решений при $a \leq 2$.

Пример 78. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + y = a+4, \\ x + \log_2 y = 4. \end{cases}$

Решение. 1. Ясно, что $y>0$. Тогда из первого уравнения следует $a>-4$. Потенцируя второе уравнение, получим $2^x \cdot y = 16$. Данная система равносильна следующей

$$\begin{cases} 2^x + y = a+4, \\ 2^x \cdot y = 16. \end{cases}$$

По теореме Виета числа 2^x и у являются корнями уравнения: $z^2-(a+4)z+16=0$. Дискриминант $D=(a+4)^2-64=0$ при $a=-12$ или $a=4$. Т. к. $a>-4$, то данная система может иметь решения только при $a \geq 4$. Если $a=4$, то $z_1=z_2=\dfrac{a+4}{2}=4$. Решение данной системы найдем из условий:

$$\begin{cases} 2^x = 4, \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=4 \end{cases}.$$

Итак,

нет решений при $a<4$;

$x=2$, $y=4$ при $a=4$

2. Теперь найдем решения данной системы при $a>4$. Тогда $D>0$, $z_1=\dfrac{a+4+\sqrt{D}}{2}$, $z_2=\dfrac{a+4-\sqrt{D}}{2}$. Выясним знаки z_1 и z_2. Ясно, что $z_1>0$ при $a>4$.

Далее, $z_1\cdot z_2=16$. Отсюда следует $z_2>0$.

Вычислим решения данной системы:

$$\begin{cases}2^x=z_1,\\ y=z_2\end{cases} \text{или} \begin{cases}2^x=z_2,\\ y=z_1\end{cases}.$$

Отсюда следует, что при $a>4$:

$$\begin{cases}x=\log_2\dfrac{a+4+\sqrt{D}}{2},\\ y=\dfrac{a+4-\sqrt{D}}{2}\end{cases} \text{или} \begin{cases}x=\log_2\dfrac{a+4-\sqrt{D}}{2},\\ y=\dfrac{a+4+\sqrt{D}}{2}\end{cases}$$

Ответ: нет решений при $a<4$, (2;4) при $a=4$;

$$x=\log_2\frac{a+4+\sqrt{(a+4)^2-64}}{2},\ y=\frac{a+4-\sqrt{(a+4)^2-64}}{2}$$

или

$$x=\log_2\frac{a+4-\sqrt{(a+4)^2-64}}{2},\ y=\frac{a+4+\sqrt{(a+4)^2-64}}{2}$$

при $a>4$.

Пример 79. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}y=x^2-7x-a,\\ \log_x y=1\end{cases}$$

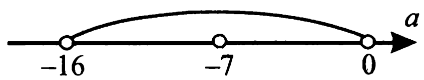
имеет два различных решения?

Решение. Ясно, что $x>0$, $x\neq 1$, $y>0$. При этих значениях x и y второе уравнение равносильно уравнению $y=x$.

Тогда данная система представима в виде:

$$\begin{cases} y=x^2-7x-a, \\ y=x, x>0, x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x, x>0, x\neq 1, \\ x^2-7x-a=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x, x>0, x\neq 1 \\ x^2-8x-a=0 \end{cases}.$$

Для того, чтобы данная система имела два различных решения, необходима справедливость неравенства $D=4^2+a>0$, т. е. $a>-16$. Тогда $x_1=4+\sqrt{D}$, $x_2=4-\sqrt{D}$. Найдем такие значения a, которые обеспечат истинность условий $x>0$, $x\neq 1$. Значение $x_1>0$, причем $x_1>4$;



$$x_2>0 \Leftrightarrow 4-\sqrt{D}>0 \Leftrightarrow 4>\sqrt{D} \Leftrightarrow 16>16+a \Leftrightarrow a<0;$$

Далее,

$$x_2\neq 1 \Leftrightarrow 4-\sqrt{D}\neq 1 \Leftrightarrow 3\neq\sqrt{D} \Leftrightarrow 9\neq 16+a \Leftrightarrow a\neq -7.$$

Итак, $-16<a<0$, $a\neq -7$.

Ответ: $(-16;-7)\cup(-7;0)$.

Пример 80. Решите неравенство

$$\log_8\left(x^2-4\right)+\log_8\frac{x}{x+2}\leq a. \qquad (1)$$

Решение. ОДЗ: $|x|>2$, т.е. $x<-2$ или $x>2$. Для указанных значений x данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$$\log_8 \frac{\left(x^2-4\right)\cdot x}{x+2} \le a \Leftrightarrow \log_8\left(x^2-2x\right) \le a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x \le 8^a \Leftrightarrow x^2-2x-8^a \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+8^a} \le x \le 1+\sqrt{1+8^a}.$$

Заметим, что $x_2 = 1+\sqrt{1+8^a} > 2$ для любого a. Поэтому множество значений $x \in \left(2;\, 1+\sqrt{1+8^a}\,\right]$ является решением (1) при любом значении $a \in R$. Вторую часть множества всех решений данного неравенства составляет множество $\left[1-\sqrt{1+8^a};-2\right)$ при условии, что $1-\sqrt{1+8^a} < -2 \;\Leftrightarrow\; 3 < \sqrt{1+8^a} \;\Leftrightarrow\; 8 < 8^a \;\Leftrightarrow\; a > 1.$

Ответ: $x \in \left[1-\sqrt{1+8^a};-2\right) \cup \left(2;1+\sqrt{1+8^a}\,\right]$ при $a > 1$;

$x \in \left(2;1+\sqrt{1+8^a}\,\right]$ при $a \le 1$.

Пример 81. Решите неравенство $\dfrac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)} > 3$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности следующих двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} \log_a(5-x) > 0, \\ \log_a(35-x^3) > 3\log_a(5-x) \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \log_a(5-x) < 0, \\ \log_a(35-x^3) < \log_a(5-x)^3 \end{cases}.$$

Решение системы а):

$$
\text{а)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}
\begin{cases} a>1, \\ 5-x>1, \\ 35-x^3>(5-x)^3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ x<4, \\ x^2-5x+6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ 2<x<3; \end{cases} \\
\begin{cases} 0<a<1, \\ 0<5-x<1, \\ 0<35-x^3<(5-x)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ 4<x<5, \\ x<\sqrt[3]{35} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.
\end{array}\right.
$$

Итак, решениями системы а) являются все значения x, $x \in (2;3)$ при $a>1$. (*)

Решение системы б):

$$
\text{б)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}
\begin{cases} a>1, \\ 0<5-x<1, \\ 0<35-x^3<(5-x)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ 4<x<5, \\ x<\sqrt[3]{35} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing, \\
\begin{cases} 0<a<1, \\ 5-x>1, \\ 35-x^3>(5-x)^3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ x<4, \\ x^2-5x+6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ 2<x<3; \end{cases}
\end{array}\right.
$$

Учитывая (*) и решения системы б), получим следующий ответ.

Ответ: $x \in (2;3)$ при $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$; нет решений при других значениях a.

Пример 82. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_5\left(\sqrt{a+3}-x\right)+\log_{0,2}\left(x-a-2\right)=\log_{\sqrt{5}} 2$$

имеет решение? Укажите это решение.

Решение. ОДЗ найдем из условия

$$\begin{cases} \sqrt{a+3} > x, \\ x > a+2, \\ a \geq -3. \end{cases} \qquad (1)$$

Перейдем к основанию 5:

$$\log_5\left(\sqrt{a+3}-x\right) - \log_5(x-a-2) = \log_5 4 \qquad (2)$$

С учетом (1) уравнение (2) можно представить в виде:

$$\frac{\sqrt{a+3}-x}{x-a-2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{a+3}+4a+8}{5}.$$

Найденное выражение для x подставим в (1):

$$\begin{cases} \sqrt{a+3} > \dfrac{\sqrt{a+3}+4a+8}{5}, \\ \dfrac{\sqrt{a+3}+4a+8}{5} > a+2. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a+3} > a+2.$$

Для значений $a \in [-3,-2]$ неравенство $\sqrt{a+3} > a+2$ справедливо. Теперь рассмотрим $a > -2$:

$$\begin{cases} a > -2, \\ \sqrt{a+3} > a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2, \\ a+3 > (a+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a < \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\sqrt{a+3}+4a+8}{5}$ при $a \in \left[-3, \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$.

Пример 83. При каких значениях параметров a и b функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}\cdot 2^{ax} + \sqrt{b}\cdot 2^{-ax}}$$

принимает наибольшее значение в точке $x_0 = \log_2 \dfrac{b}{a}$.

Решение. 1. Из условия задачи следует: $a > 0$ и $b > 0$. Пусть $\varphi(x) = \sqrt{a} \cdot 2^{ax} + \dfrac{\sqrt{b}}{2^{ax}}$. Функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение в той же точке x_0, в которой функция $y = \varphi(x)$ принимает наименьшее значение. Заметим, что $\varphi(x) > 0$ для любого $x \in R$ при $a > 0$ и $b > 0$.

2. Найдем наименьшее значение $y = \varphi(x)$: $\varphi(x) = \sqrt[4]{ab}\left(2^{ax} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}} + \dfrac{1}{2^{ax} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}}\right)$.

Воспользуемся неравенством $t + \dfrac{1}{t} \geq 2$ при $t > 0$, причем $t + \dfrac{1}{t} = 2$ только при $t = 1$.

Применяя это неравенство, получим: $\varphi(x) \geq 2\sqrt[4]{ab}$, причем $\varphi_{\min} = 2\sqrt[4]{ab}$, если разрешимо уравнение: $2^{ax} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}} = 1 \Leftrightarrow 2^{ax} = \sqrt[4]{\dfrac{b}{a}} \Leftrightarrow ax = \dfrac{1}{4}\log_2 \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4a}\log_2 \dfrac{b}{a}$.

По условию задачи: $x = x_0 = \log_2 \dfrac{b}{a}$, т. е.

$$\frac{1}{4a}\log_2 \frac{b}{a} = \log_2 \frac{b}{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{b}{a} = 1,\ a > 0; \\ a = \dfrac{1}{4},\ b > 0 \end{array}\right. .$$

Ответ: $a = \dfrac{1}{4}$ и $b > 0$ или $a = b > 0$.

Пример 84. При каком целом значении параметра $a \geq 0$ функция $f(x) = \log_2(2x^3 - 3ax^2 - 6x + 3a + 3\sqrt{a^2 + 4})$ принимает наименьшее значение?

Решение. Пусть $\varphi(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 6x + 3a + 3\sqrt{a^2 + 4}$. Данная функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение в той же точке x_0, в которой $\varphi(x_0) - \min$, причем $\varphi(x_0) > 0$.

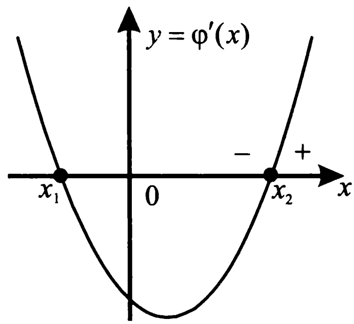
Найдем значения *a*, при которых функция $y = \varphi(x)$ принимает наименьшее положительное значение. Для этого найдем производную

$$\varphi'(x) = 6x^2 - 6ax - 6 = 6(x^2 - ax - 1);\ \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow,$$

$$\Leftrightarrow x^2 - ax - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a - \sqrt{D}}{2}, \\ x_2 = \dfrac{a + \sqrt{D}}{2} \end{array}\right.$$

где $D = a^2 + 4 > 0$.

а)



Т. к. дискриминант $D > 0$, то уравнение $x^2 - ax - 1 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, причем точка x_2 является точкой минимума (см. рис. *а*), в этой точке первая производная $y=\varphi'(x)$ меняет знак с "–" на "+"). Выясним, при каких значениях параметра a значение $\varphi(x_2)>0$.

$$\varphi(x_2)=2x_2^{\,3}-3ax_2^{\,2}-6x_2+6x_2=2x_2^{\,3}-3ax_2^{\,2}=x_2^{\,2}(2x_2-3a).$$

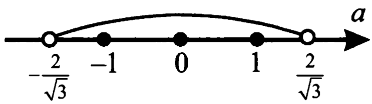
Тогда

$$\varphi(x_2)>0 \Leftrightarrow 2x_2>3a \Leftrightarrow \sqrt{a^2+4}>2a.$$

Т.к. $a\geq 0$, то $a^2+4>4a^2 \Leftrightarrow |a|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Отсюда следует: во множестве $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ находятся только два неотрицательных целых значения a: $a\in\{0;1\}$, см. рис. б).

б)



Проверим эти значения на минимальность:

$\varphi(0)=1\cdot(2-0)=2;$

$$\varphi(1)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2(1+\sqrt{5}-3)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Отсюда следует f – min при $a=1$.

Ответ: 1.

Пример 85. Числа x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+(1-a)x-a=0$, а y_1 и y_2 – корни уравнения $y^2-(1+b)y+b=0$. Известно, что y_1, x_1, y_2, x_2 – последовательные члены арифметической прогрессии. Найдите значения a и b, если указанная прогрессия: а) убываюшая; б) возрастающая.

Решение задачи а). 1. Найдем корни указанных уравнений. По теореме Виета числа b и 1 являются корнями второго уравнения, а также a и -1 – корнями первого уравнения.

2. Пусть последовательность

$$y_1,\ x_1,\ y_2,\ x_2 \qquad (1)$$

убывающая арифметическая прогрессия.

2.1. Если $y_1 = 1$, $y_2 = b$ $(b < 1)$, то $x_1 = -1$ или $x_1 = a$. В первом случае разность прогрессии равна $d = -2$, поэтому $y_2 = x_1 + d = -1 - 2 = -3 = b$, $x_2 = y_2 + d = -5 = a$, т. е. $a = -5$, $b = -3$.

Во втором случае, т. е. при $x_1 = a$, разность $d = a - 1$, $y_2 = x_1 + d = a + (a-1) = 2a - 1 = b$, $x_2 = y_2 + d = 3a - 2 = -1$.

Получили систему $\begin{cases} 2a - 1 = b, \\ 3a - 2 = -1, \\ b < 1,\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

Итак, в этом случае либо $\begin{cases} a = -5, \\ b = -3 \end{cases}$ либо $\begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

2.2. Если $y_1 = b$, $y_2 = 1$ $(b > 1)$, то, как и выше, либо $x_1 = -1$, либо $x_1 = a$. В первом случае, т. е. при $x_1 = -1$, последовательность $y_1,\ x_1,\ y_2,\ x_2$ имеет вид: $b,\ -1,\ 1,\ a$, что невозможно для убывающей последовательности.

При $x_1 = a$, разность $d = a - b$,

$$y_2 = 1 = x_1 + d = a + (a - b) = 2a - b, \text{ т. е. } 2a - b = 1.$$

Далее, $x_2 = -1 = y_2 + d = 1 + a - b = -1$, $a - b = -2$.

Тогда $\begin{cases} 2a - b = 1, \\ a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = 5. \end{cases}$

Решение для рассмативаемого случая имеет вид: $a = 3$, $b = 5$.

Ответом для а) служат пары $(a;b)$: (3; 5), (–5; –3), $(\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$.

3. *Решение задачи б).* Пусть теперь последовательность (1) является возрастающей.

3.1. Если $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ $(b > 1)$, то x_1 не может принимать ни одно из возможных значений: –1 или a. В первом случае (1) имеет вид 1, –1, ... – не возрастающая последовательность. Во втором случае (1) имеет вид: 1, a, b, –1 – не возрастающая последовательность.

3.2. Если $y_1 = b$, $y_2 = 1$ $(b < 1)$, то x_1 может принимать только значение $x_1 = -1$. Тогда $d = y_2 - x_1 = 2$; $b + d = -1$, $b = -3$; $a = y_2 + d = 1 + 2 = 3$.

$$\textit{Ответ}\text{: а) } \begin{cases} a = 3, \\ b = 5; \end{cases} \begin{cases} a = -5, \\ b = -3; \end{cases} \begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = -\frac{1}{3}. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} a = 3, \\ b = -3. \end{cases}$$

Пример 86. Найдите наибольшую сумму соответственных значений параметров a и b, если известно, что

$$a,\ a\cdot b,\ \overline{ab} + 2b^2 - b - 20,\ \overline{ba} + 2b^3 - 10b - 2 \qquad (*)$$

последовательные члены геометрической прогрессии, причем $\overline{ba} + \overline{ab}$ – квадрат натурального числа.

Решение. 1. $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a+b)$. Отсюда следует: $a + b = 11$, $2 \le a;\ b \le 9$.

2. Знаменатель прогрессии $q = \frac{ab}{a} = b > 1$.

$$\text{Поэтому } \begin{cases} \overline{ab} + 2b^2 - b - 20 = ab^2, \\ \overline{ba} + 2b^3 - 10b - 2 = ab^3. \end{cases}$$

Второе уравнение полученной системы представим в виде

$$10b+a+2b^3-10b-2=ab^3 \Leftrightarrow a-2=(a-2)b^3.$$

Т. к. a и b – цифры, то $a=2$ – единственное решение полученного уравнения. Из равенства $a+b=11$, получим: $b \doteq 9$.

3. Следовательно, параметры a и b могут принимать лишь значения $a=2$, $b=9$.

Итак, найдено *необходимое* условие на параметры a и b, $a=2$, $b=9$.

4. Проверим на *достаточность*. При $a=2$ и $b=9$ последовательность (*) имеет вид: 2, $2\cdot9$, $2\cdot9^2$, $2\cdot9^3$, т. е. действительно указанные числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Искомая сумма равна 11.

Ответ: 11.

Пример 87. Докажите, что при любом $a\in(-3;2)\cap Z$ числа

$$b,\ ab,\ 10b+3a^2-30,\ \ b-3+3a^3 \qquad (*)$$

являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение. 1. Выясним, может ли $b=0$. Если $b=0$, то данная последовательность имеет вид: 0, 0, $3a^2-30$, $3a^3-3$. Указанные числа не являются последовательными членами геометрической прогрессии. Итак, $b\neq0$.

2. Знаменатель прогрессии $q=\dfrac{ab}{b}=a$, причем

$$\begin{cases}10b+3a^2-30=ba^2,\\ b-3+3a^3=ba^3.\end{cases}$$

Второе уравнение, представимое в виде $b(1-a^3)=3(1-a^3)$, имеет только два вида решений: 1) $b=3$, $a\in\Omega$, где $\Omega\in\{-2,-1,0,1\}$; 2) $a=1$, $b\in R$ – любое число, т. к. $b-3=a^3(b-3)$ – верное равенство при $a=1$.

Первое уравнение при $b=3$ имеет вид: $3a^2=3a^2$, т. е. это равенство верно для любого $a\in\Omega$.

3. Итак, найдены *необходимые* условия на параметры a и b, $b=3$, $a\in\{-2,-1,0,1\}$.

Проверим на *достаточность*. При $b=3$ данная система (*) чисел имеет вид: 3, $3a$, $3a^2$, $3a^3$, т. е. эти числа образуют геометрическую прогрессию при любом $a\in\{-2,-1,0,1\}$.

Ответ: утверждение задачи истино при $b=3$, ложно при $b\neq 3$.

Пример 88. Найдите сумму квадратов соответственных значений параметров a и b, если известно, что a – цифра и значения выражений

$$(a+b^2)x,\ \ a\sqrt{x},\ \ b^2x^2+a\sqrt{(x-1)(x^2-3x)} \qquad (*)$$

при всех целых значениях x из общей области определения данных выражений, принадлежащих промежутку $[-2;3,5]$, образуют последовательные члены геометрической прогрессии.

Решение. Легко убедиться, что только значения $x=1$ и $x=3$ дают ограничения на параметры a и b. Если $x=1$, то $a+b^2$, a, b^2 – геометрическая прогрессия, причем $a^2=b^2(a+b^2)$.

Если $x=3$, то $3a+3b^2$, $\sqrt{3}a$, $9b^2$ – геометрическая прогрессия. $3a^2=9b^2(3+3b^2)\Leftrightarrow a^2=9b^2(1+b^2)$.

2. Для нахождения соответственных значения a и b получили систему $\begin{cases} a^2=b^2(a+b^2), \\ a^2=9b^2(1+b^2). \end{cases}$

Если $a_1=0$, то $b_1=0$. В этом случае последовательность (*) не является геометрической гргрессией. Пусть $a\neq 0$, тогда $b\neq 0$, $b^2\neq -a$, $a+b^2=9+9b^2\Leftrightarrow a-9=8b^2$. Т. к. a – цифра, то $a=9$ и $b=0$. В этом случае равенство $a^2=b^2(9+b^2)$ является ложным.

Следовательно, система (*) не представляет собой последовательные члены геометрической прогрессии.

Ответ: нет таких значений a и b.

Пример 89. Найдите сумму всех таких значений параметра k, при которых корни уравнения

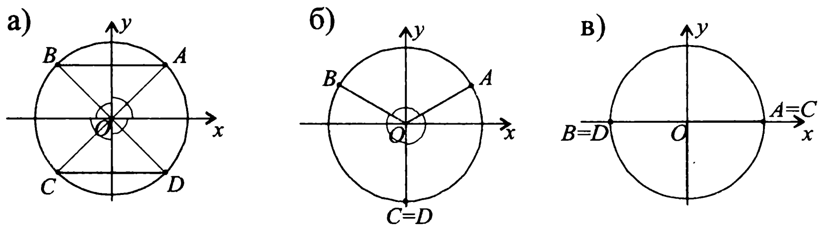
$$\sin^2 x + k\sin x - k = 0,$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Найдем корни данного уравнения:

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2+4k}}{2}. \qquad (1)$$

Заметим, что $\sin x \neq 1$. Если $(\sin x)_1 = a, |a| \le 1,$ $(\sin x)_2 = b,$ $|b| \le 1,$ то корни, чтобы образовали арифметическую прогрессию, должны быть расположены на единичной окружности одним из следующих способов:



Четвертый случай, когда $\sin x = 1$, из рассмотрения уже исключен.

Итак, чтобы корни (1) образовали арифметическую прогрессию, ***необходимы*** положения *а), б), в)*. В первом случае угол поворота равен 90°, во втором – 120°, в третьем – 180°.

Теперь проверим на *достаточность*, т. е. существуют ли такие значения параметра k, при которых имеют место *а), б), в)*. Случай *а)* достигается, если

$$\begin{cases}\dfrac{-k+\sqrt{k^2+4k}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \dfrac{-k-\sqrt{k^2+4k}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{k^2+4k}=\sqrt{2}+k,\\ \sqrt{k^2+4k}=\sqrt{2}-k\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{cases}k=0,\\ \sqrt{k^2+4k}=\sqrt{2}+k\end{cases}}{\varnothing.}$$

Иначе говоря, случай *а)* не достижим.

Случай *б)* достигается, если

$$\begin{cases}\dfrac{-k+\sqrt{k^2+4k}}{2}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{-k-\sqrt{k^2+4k}}{2}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{cases}\sqrt{k^2+4k}=1+k,\\ \sqrt{k^2+4k}=2-k\end{cases}}{k=\dfrac{1}{2}}.$$

Случай *в)* достигается, если

$$\begin{cases}\dfrac{-k+\sqrt{k^2+4k}}{2}=0,\\ \dfrac{-k-\sqrt{k^2+4k}}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow k=0.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2};0\right\}$.

Пример 90. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases}\sin\sqrt{x^2+2x}=\sin(1-x^2-2x),\\ |x|\le 1.\end{cases}$$

Решение. 1. Сделаем замену переменных:

$$\sqrt{x^2+2x}=u,\ 0\le u\le\sqrt{3},\ v=1-x^2-2x=1-u^2.$$

Данная система имеет вид:

$$\begin{cases} \sin u = \sin v, \\ u^2 + v = 1, \\ 0 \le u \le \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{а)} \begin{cases} v = u + 2\pi k, \quad k \in Z, \\ v = -u^2 + 1, \\ 0 \le u \le \sqrt{3}; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} v + u = \pi + 2\pi k, \ k \in Z, \\ v = -u^2 + 1, \\ 0 \le u \le \sqrt{3}. \end{cases} \end{array} \right.$$

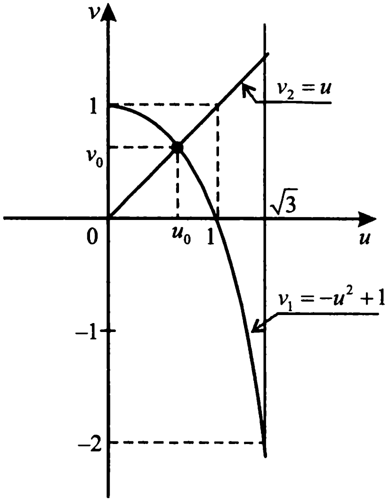


Рис. 1

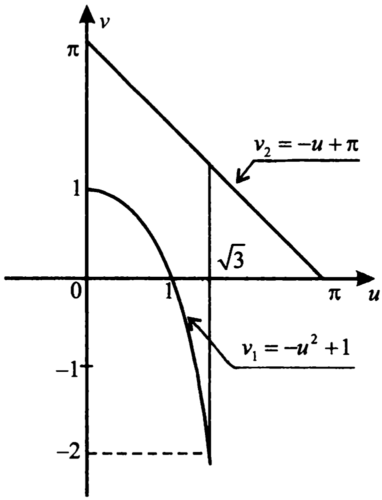


Рис. 2

2. Найдем число решений системы а). В системе координат $0uv$ построим графики двух функций: $v_1 = -u^2 + 1$, $v_2 = u + 2\pi k$ $(k \in Z)$ при $0 \le u \le \sqrt{3}$. Т. к. $v_1 = -u^2 + 1$ при указанных значениях u переменная v_1 меняется в переделах $-2 \le v_1 \le 1$, то в равенстве $v_2 = u + 2\pi k$ $(k \in Z)$ параметр k может быть равным только нулю, т. е. $v_2 = u$. Графики непрерывных функций $v_1 = -u^2 + 1$ и $v_2 = u$ пересекаются в единственной точке $(u_0; v_0)$ (см. рис. 1).

3. Теперь найдем число решений системы б). Т. к. $0 \le u \le \sqrt{3}$ и $-2 \le v \le 1$, то в равенстве $v + u = \pi + 2\pi k$ число k может быть только нулем, т. е. $k = 0$, $v_2 = -u + \pi$. В этом случае графиком непрерывных функций $v_1 = -u^2 + 1$ и

$v_2 = -u + \pi$ не пересекаются (см. рис. 2). Итак, данная система имеет единственное решение.

Ответ: одно решение.

Пример 91. Решите неравенство

$$(\sin x)^{\log_{\operatorname{tg}x} \log_2 (\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{2})} < 1. \qquad (1)$$

Решение. ОДЗ найдем из условия: $\sin x > 0$, $\operatorname{tg}x > 0$, $\operatorname{tg}x \neq 1$, $\cos x \neq 0$.

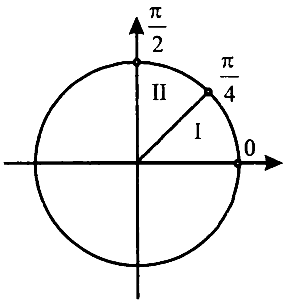
Отсюда следует, что ОДЗ представляет собой объединение двух множеств:

$$\left(2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \qquad (2)$$

С учетом (2) неравенство (1) равносильно следующему:

$$\log_{\operatorname{tg}x} \log_2(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{2}) > 0.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности следующих двух систем:



а) $\begin{cases} 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ 0 < \log_2(\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{3}{2}) < 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \log_2(\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{3}{2}) > 1. \end{cases}$

Система а) не имеет решений, а множество решений системы б) имеет вид:

$$(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \frac{\pi}{3} + 2\pi k).$$

Ответ: $(\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k)$, $k\in Z$.

Пример 92. Решите неравенство

$$(\cos x)^{\log_{\mathrm{ctg}x}\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x)}>1. \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что должно быть $\cos x>0$, $\mathrm{ctg}x\neq 1$, $\sin x>0$, т. е. решение следует искать только в первой четверти, точнее во множестве

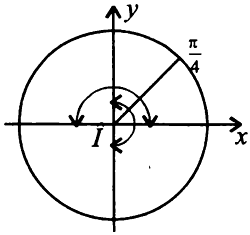
$$2\pi k<x<\frac{\pi}{4}+2\pi k \text{ или } \frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z. \qquad (2)$$

С учетом (2) неравенство (1) равносильно неравенству

$$\log_{\mathrm{ctg}x}\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{а)}\begin{cases} 2\pi k<x<\frac{\pi}{4}+2\pi k, \\ 0<\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x)<1; \end{cases} \\ \text{б)}\begin{cases} \frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k, \\ \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x)>1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим системы а) и б):

$$\text{а)}\begin{cases} 2\pi k<x<\frac{\pi}{4}+2\pi k, \\ 1>\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{4}+2\pi k;$$



$$б)\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+2\pi k<x<\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 0<\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{\pi}{4}+2\pi k),\ k\in Z$.

Пример 93. Решите неравенство

$$(\mathrm{tg}x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}>1\cdot$$

Решение.

$$(\mathrm{tg}x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\mathrm{tg}x>1,\\ \sin^2 x-\dfrac{3}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}>0;\end{cases}\Leftrightarrow а)\begin{cases}\mathrm{tg}x>1,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x>1,\\ \sin x<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing;\\ \begin{cases}0<\mathrm{tg}x<1,\\ \sin^2 x-\dfrac{3}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}<0\end{cases}\Leftrightarrow б)\begin{cases}0<\mathrm{tg}x<1,\\ \dfrac{1}{2}<\sin x<1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решением системы б) является множество

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{\pi}{4}+2\pi k),\ k\in Z$.

Пример 94. Решите неравенство

$$\cos x+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2^a x\geq a+1,\quad a\in Z\cdot$$

Решение. Заметим, что из вида неравенства следует, что $a\in\{0\}\cup N$. При $a=0$ данное неравенство приводится к уравнению $\cos x=1$ – его решение $x=2\pi k$ $(k\in Z)$.

Пусть теперь $a=1$, тогда

$$\cos x+\cos 2x\geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=1,\\ \cos 2x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\pi k, \quad k\in Z;\\ \cos 4\pi k=1\end{cases} \Leftrightarrow x=2\pi k, \quad k\in Z.$$

При $a=2$,

$$\cos x+\cos 2x+\cos 4x\geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=1,\\ \cos 2x=1, \Leftrightarrow x=2\pi k, \quad k\in Z.\\ \cos 4x=1\end{cases}$$

Пора заметить закономерность: при любом целом значении $a\geq 0$ только значение $x=2\pi k$ $(k\in Z)$ является решением данного неравенства. Действительно, пусть $a=n$ - любое натуральное число. Тогда число слагаемых в сумме $\cos 2^0 x+\cos 2^2 x+...+\cos 2^n x$ равно $n+1$. Кроме того и сама сумма равна $n+1$. Отсюда следует, что каждое слагаемое равно 1. поэтому только значение $x=2\pi k$ $(k\in Z)$ является решением данного неравенства.

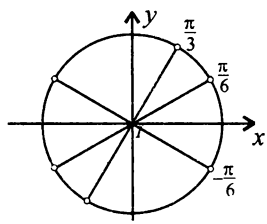
Ответ: $x=2\pi k,\ k\in Z,\ a\geq 0$.

Пример 95. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x}{1-2\cos 2x}=\frac{\cos 4x}{\sqrt{3}-2\sin 2x}. \qquad (1)$$

Решение. ОДЗ: $\cos 2x\neq\frac{1}{2}, \quad \sin 2x\neq\frac{\sqrt{3}}{2},$

$$2x\neq\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, \quad x\neq\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,$$



$$2x\neq\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}+2k\pi, \ x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi,\\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi, \ x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi.\end{array}\right.$$

Отсюда следует

$$x \neq \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \qquad (2)$$

$$x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Преобразуем знаменатели (1):

$$1 - 2\cos 2x = 2\left(\frac{1}{2} - \cos 2x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\right) =$$

$$= 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$\sqrt{3} - 2\sin 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2x\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 2x\right) =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Подставим полученные значения в (1):

$$\frac{\sin 4x}{4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\cos 4x}{-4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Обе части полученного уравнения умножив на $4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0$ (см. (2)), получим:

$$\frac{\sin 4x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + \frac{\cos 4x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x \neq \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; \\ \sin 4x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos 4x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0, \\ x \neq \dfrac{\pi}{3}+k\pi, \quad x \neq \pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+\dfrac{\pi}{6}=\pi n, \\ x \neq \dfrac{\pi}{3}+k\pi, \quad x \neq \pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$x=\frac{1}{5}\left(\pi n-\frac{\pi}{6}\right) \tag{4}$$

Уравнение $\dfrac{\pi}{3}+\pi k=\dfrac{1}{5}\left(\pi n-\dfrac{\pi}{6}\right)$ в целых числах не имеет решения. Действительно, это уравнение равносильно следующему:

$$\frac{5}{3}+5k=n-\frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11}{6}=n-5k.$$

Уравнение $\dfrac{11}{6}=n-5k$ не имеет решения в целых числах. Следовательно, значение x, определяемое равенством (4), никогда не совпадет с запрещенными значениями x, определяемыми (3).

Полученные значения х необходимо еще проверить на выполнимость ограничения (2), так как приведение к общему знаменателю могло привести к приобретению посторонних корней.

Из значений x, определяемых равенством (4), надо исключить те, которые равны $\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$. Для этого решим в целых числах уравнение

$$\pm\frac{\pi}{6}+k\pi=\frac{1}{5}\left(\pi n-\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \pm\frac{5}{6}+5k=n-\frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}\pm\frac{5}{6}=n-5k \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 1=n-5k, \\ -\dfrac{2}{3}=n-5k. \end{array}\right.$$

Второе уравнение в целых числах не имеет решения, т.к. правая часть – целое число, а левая – не целое.

Первое имеет очевидное решение: $n = 5k + 1$.

Следовательно, в найденном выражении для x (см. (4)), целое число n не может принимать значение вида $n = 5k+1,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{5}\left(n - \dfrac{1}{6}\right),\quad n \in \mathbb{Z},\ \ n \neq 5k+1,\quad k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Если бы при решении системы $\begin{cases} \sin(5x + \frac{\pi}{6}) = 0, \\ x \neq \frac{\pi}{3} + \pi k,\ x \neq \pm\frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases}$ использовали одну и ту же букву, т. е.

$5x + \dfrac{\pi}{6} = \pi k \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{5}(k - \dfrac{1}{6})\ (k \in Z)$, то потеряли бы решение

$x = \dfrac{\pi}{5}(n - \dfrac{1}{6}),\ n \in N,\ n \neq 5k+1,\ k \in Z$.

Пример 96. Решите неравенство

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0. \qquad (*)$$

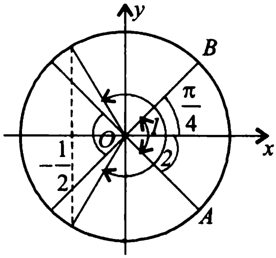
Решение. Неравенство (*) равносильно:

$$\cos 2x + 2\cos 2x \cdot \cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x \cdot \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \cos x > -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \cos 2x < 0, \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \end{array}\right.$$

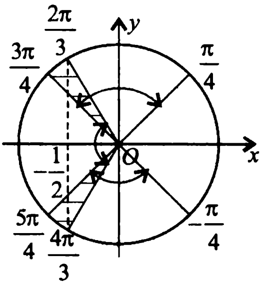
$$\Leftrightarrow \quad a)\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}+\pi k < x < \dfrac{\pi}{4}+\pi k, \\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n < x < \dfrac{2\pi}{3}+2\pi n; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad б)\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}+\pi k < x < \dfrac{3}{4}\pi+\pi k, \\ \dfrac{2}{3}\pi+2\pi n < x < \dfrac{4}{3}\pi+2\pi n. \end{cases}$$



Найдем графически решение системы а). Пересечением является сектор AOB. Решение

$$\text{а) } -\frac{\pi}{4}+2\pi k < x < \frac{\pi}{4}+2\pi k.$$



Также графически найдем решение системы б). Пересечением является два сектора

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{3}{4}\pi+2\pi k;$$

$$\frac{5}{4}\pi+2\pi k < x < \frac{4}{3}\pi+2\pi k.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right) \cup \left(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \dfrac{3}{4}\pi+2\pi k\right) \cup$

$\cup \left(\dfrac{5}{4}\pi+2\pi k, \dfrac{4}{3}\pi+2\pi k\right), k \in Z.$

Здесь имеет место такое же замечание, которое было сделано в предыдущем примере.

Пример 97. Найдите значения x, если $\sin x$ является корнем уравнения

$$2z=(z^2+z+1)(k-\frac{1}{2}),\ k\in Z \qquad (1)$$

Решение.

$$(1)\Leftrightarrow \left(k-\frac{1}{2}\right)z^2+z(k-\frac{5}{2})+(k-\frac{1}{2})=0.$$

Найдем значения z_1 и z_2:

$$z_{1,2}=\frac{\frac{5}{2}-k\pm\sqrt{D}}{(2k-1)},$$

$$D=\left(k-\frac{5}{2}\right)^2-4\left(k-\frac{1}{2}\right)^2=\left(k-\frac{5}{2}+2k-1\right)\left(k-\frac{5}{2}-2k+1\right)=$$

$$=\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{2}-3k\right).$$

Значения x можем найти из уравнения

$$\sin x=\frac{\frac{5}{2}-k\pm\sqrt{D}}{2k-1}$$

только при одновременном выполнении двух условий:

1) существование корней z_1 и z_2 $(D\geq 0)$;

2) ограниченности функции $y=\sin x$ $(-1\leq\sin x\leq 1)$

Очевидно, что

$$\begin{cases}D\geq 0,\\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(k+\frac{3}{2})(\frac{7}{2}-3k)\geq 0,\\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow k\in\{-1,0,1\}.$$

Теперь проверим, при каких указанных значениях k обеспечивается ограниченность функции $y = \sin x$.

Если $k = -1$, то

$$\frac{\frac{5}{2} - k \pm \sqrt{D}}{2k-1} = \frac{\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}}{-3} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{-6},$$ отсюда следует

$$\frac{7+\sqrt{13}}{-6} < -1, -1 < \frac{7-\sqrt{13}}{-6} < 0.$$

Следовательно, уравнение $\sin x = \dfrac{\sqrt{13}-7}{6}$ разрешимо (ответ напишем позднее), оно получено при $k = -1$.

Пусть теперь $k = 0$. Тогда

$$\frac{\frac{5}{2} - k \pm \sqrt{D}}{2k-1} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}}{-1} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{-2}.$$

Отсюда следует

$$\frac{5+\sqrt{21}}{-2} < -1; \ -1 < \frac{5-\sqrt{21}}{-2} < 0$$

Следовательно, уравнение $\sin x = \dfrac{\sqrt{21}-5}{2}$ разрешимо (k = 0).

Наконец, рассмотрим случай, когда k= 1. Тогда $\dfrac{\frac{5}{2} - k \pm \sqrt{D}}{2k-1} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Заметим, что $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, $0 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$.

Уравнение $\sin x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ разрешимо (при k = 1).

Ответ: $x=(-1)^n \arcsin\dfrac{\frac{5}{2}-k-\sqrt{\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{2}-3k\right)}}{2k-1}+\pi n,$

$k\in\{-1,0,1\},\ n\in Z$.

Пример 98. Решите уравнение

$$\sin^3 x+\cos^3 x+1+\sin 2x+a(\sin x+\cos x)=0 \qquad (1)$$

Решение. Пусть $\sin x+\cos x=t,\ -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$. Тогда

$1+\sin 2x=t^2$, $\sin^3 x+\cos^3 x=t(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=$

$$=t(t^2-3\sin x\cdot\cos x)=t(t^2-\frac{3}{2}\sin 2x)=\frac{t}{2}(3-t^2).$$

Подставив полученное выражение в (1), получим

$$\frac{t}{2}(3-t^2)+t^2+at=0\Leftrightarrow t(-t^2+2t+3+2a)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t^2-2t-(3+2a)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=1+\sqrt{4+2a},\ a\ge-2,\\ t=1-\sqrt{4+2a},\ a\ge-2.\end{array}\right.$$

Итак, если $a<-2$, то $t=0$ – единственное решение, $\sin x+\cos x=0,\ \operatorname{tg}x=-1$.

Следовательно,

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z \text{ при } a<-2 \qquad (2)$$

Если $a=-2$, то $t=1$ или $t=0$, $\sin x+\cos x=1,\ \cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$.

Следовательно,

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ 2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right\},\ k \in Z,\ a = -2 \qquad (3)$$

Пусть теперь $a > -2$. Тогда t может принимать 3 значения.

$$\begin{cases} t = 1 + \sqrt{4+2a}, \\ t \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{4+2a}, \\ \sqrt{4+2a} \le \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{4+2a}, \\ -2 < a \le \dfrac{1+2\sqrt{2}}{-2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 1 + \sqrt{4+2a}, \\ -2 < a \le \dfrac{1+2\sqrt{2}}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1+\sqrt{4+2a}}{\sqrt{2}}, \\ -2 < a \le \dfrac{1+2\sqrt{2}}{-2} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1+\sqrt{4+2a}}{\sqrt{2}} + 2k\pi,\ k \in Z,\ -2 < a \le \frac{1+2\sqrt{2}}{-2} \qquad (4)$$

Рассмотрим, наконец, значение $t = 1 - \sqrt{4+2a},\ a > -2$.

В этом случае должны иметь следующие неравенства:

$$-\sqrt{2} \le 1 - \sqrt{4+2a} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{4+2a} \le 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a \le \sqrt{2} - \frac{1}{2};$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1-\sqrt{4+2a}}{\sqrt{2}},$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1-\sqrt{4+2a}}{\sqrt{2}} + 2k\pi,\ -2 < a \le \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \qquad (5)$$

Учитывая (1) – (5), ответу можно придать следующий более компактный вид.

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$ при любых $a \in R$;

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1 \pm \sqrt{4+2a}}{\sqrt{2}} + 2k\pi, \; -2 \le a \le \frac{1+2\sqrt{2}}{-2};$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1 - \sqrt{4+2a}}{\sqrt{2}} + 2k\pi, \; \frac{1+2\sqrt{2}}{-2} < a \le \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

Пример 99. Решите неравенство

$$\sin x + \cos x > p + \sin 2x, \quad p \in R \qquad (1)$$

Решение. Применим подстановку $t = \sin x + \cos x$, $t = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$. Отсюда следует: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$, $t^2 = 1 + \sin 2x$.

Неравенство (1) представим в виде

$$t > p + (t^2 - 1) \Leftrightarrow t^2 - t + p - 1 < 0 \qquad (2)$$

Если дискриминант $D = 5 - 4p \le 0$, то неравенство (1) не имеет решения. Пусть теперь $D > 0$, т. е. $p < \frac{5}{4}$, $t_1 = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$, $t_2 = \frac{1-\sqrt{D}}{2}$. Решениями неравенства (2) является множество всех значений t, удовлетворяющих неравенствам $t_2 < t < t_1$ (см. рис. 1).

Ясно, что $t_2 < 1$, $t_1 > \frac{1}{2}$.

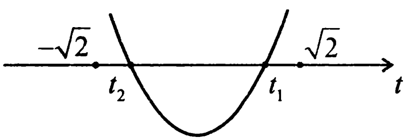


Рис. 1

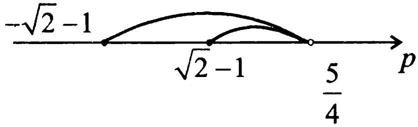


Рис. 2

Нам предстоит решить систему неравенств

$$t_2 < t < t_1 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{D}}{2\sqrt{2}} < \cos(x - \frac{\pi}{4}) < \frac{1+\sqrt{D}}{2\sqrt{2}} \qquad (3)$$

Сначала найдем решения неравенств:

1) $-1 \le \frac{1-\sqrt{D}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\sqrt{2}-1 \le p < \frac{5}{4}$;

2) $\frac{1+\sqrt{D}}{2\sqrt{2}} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \le p < \frac{5}{4}$.

Учитывая (2), (3) и результаты, отмеченные на рис. 2, получим следующий ответ.

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1+\sqrt{D}}{2\sqrt{2}}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1-\sqrt{D}}{2\sqrt{2}}+2\pi k\right) \cup$

$$\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi-\arccos\frac{1-\sqrt{D}}{2\sqrt{2}}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi-\arccos\frac{1+\sqrt{D}}{2\sqrt{2}}+2\pi k\right)$$

при $\sqrt{2}-1 \le p < \frac{5}{4}$, $k \in Z$;

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1-\sqrt{D}}{2\sqrt{2}}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1-\sqrt{D}}{2\sqrt{2}}+2\pi k\right)$$

при $-\sqrt{2}-1 \le p < \sqrt{2}-1$, $k \in Z$;

$x \in R$ при $p < -\sqrt{2}-1$; $x \in \varnothing$ при $p \ge \frac{5}{4}$.

Пример 100. При каких значениях параметра a имеет решение неравенство

$$x^2+2x\cos(x+a)+1 \le 0 \qquad (*)$$

Решение. 1. Дискриминант $D=\cos^2(x+a)-1 \le 0$. Если $D=0$, т.е. $\cos^2(x+a)=1$, то неравенство (*) приводится к виду $x^2 \pm 2x+1 \le 0 \Leftrightarrow (x \pm 1)^2 \le 0$.

Отсюда следует, что $x=1$ – решение при $\cos(x+a)=-1$; $x=-1$ - решение при $\cos(x+a)=1$.

Искомые значения параметра a найдем, как решение следующей системы:

а) $\begin{cases} x=1, \\ \cos(x+a)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x+a=\pi+2\pi k \end{cases} \Rightarrow a=\pi-1+2\pi k, \ \ k\in Z$;

б) $\begin{cases} x=-1, \\ \cos(x+a)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x+a=2\pi k \end{cases} \Rightarrow a=1+2\pi k, \ \ k\in Z$.

2. Докажем, что при $|\cos(x+a)|<1$ неравенство (*) не имеет решения. Здесь не уместно ссылаться на теорию квадратного члена $ax^2+bx+c\le 0$: если старший коэффициент $a>0$, а $D<0$, то указанное неравенство $ax^2+bx+c\le 0$ не имеет решения, т. к. дискриминант D содержит переменную x.

Доказательство проведем иначе. Пусть $\lambda=\cos(x+a)$, $|\lambda|<1$. Тогда

$$(*)\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\lambda+\lambda^2+1-\lambda^2\le 0\Leftrightarrow (x+\lambda)^2\le\lambda^2-1.$$

Т. к. $\lambda^2-1<0$, то полученное неравенство является ложным, т.е. при $|\cos(x+a)|<1$ неравенство (*) не имеет решения.

Ответ: $a\in\{1+2\pi k, \pi-1+2\pi k\}$, $k\in Z$.

Пример 101. Решите неравенство

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}\ge\sin x, \ \ a\ge 0 \qquad (*)$$

Решение. 1. Если $\sin x\le 0$, то решения (*) найдем как множество решений системы

$$\begin{cases}\sin x \le 0,\\ a+\sin x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a \ge 1,\\ \sin x \le 0\end{cases} \Leftrightarrow -\pi + 2\pi k \le x \le 2\pi k,\ a \ge 1,\ k \in Z;\\ \\ \begin{cases}0 \le a < 1,\\ -a \le \sin x \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x \in [-\arcsin a + 2\pi k;\ 2\pi k] \cup \\ \cup [\pi + 2\pi k;\ \pi + \arcsin a + 2\pi k], \\ 0 \le a < 1,\ k \in Z\end{array}\end{array}\right.$$

2. Если $\sin x > 0$, то $\sqrt{\sin x} \ge \sin x$, $a + \sin x \ge \sin x$,

$$\sqrt{a+\sin x} \ge \sqrt{\sin x} \ge \sin x \Rightarrow a + \sqrt{a+\sin x} \ge a + \sin x;$$

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}} \ge \sqrt{a+\sin x} \ge \sin x \cdot$$

Следовательно, при $0 \le a$ значения $\sin x > 0$ являются решениями (*).

3. Учитывая результаты предыдущих пунктов, получим следуюий компактный ответ.

Ответ: $x \in R$ при $a \ge 1$;

$x \in [-\arcsin a + 2\pi k;\ \pi + \arcsin a + 2\pi k]$ при $0 \le a < 1$, $k \in Z$.

Пример 102. Для каждого значения параметра p найти число решений системы

$$p \operatorname{ctg} x + \cos 2x = -1,\ p \in R,\ 0 \le x \le 2\pi. \qquad (*)$$

Решение:

$$(*) \Leftrightarrow p \operatorname{ctg} x + 1 + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\frac{p}{\sin x} + 2\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \begin{cases}\sin 2x = -p,\\ \sin x \ne 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

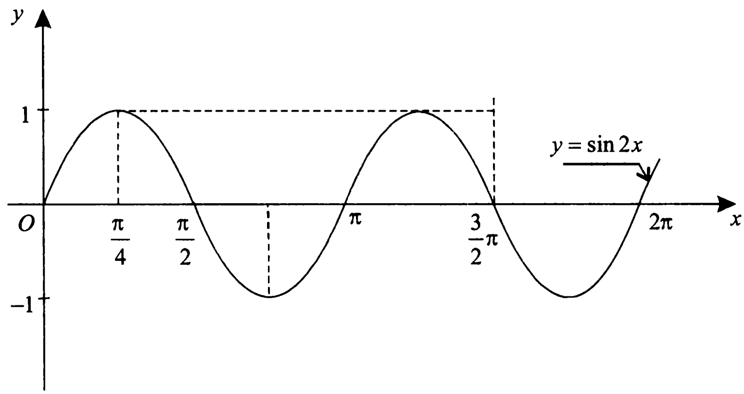
Отсюда следует: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$ – два решения для любого $p \in R$. Теперь найдем те значения $x \in [0;\ 2\pi]$, для которых $\sin x \ne 0$ и $\cos x \ne 0$.

Отсюда следует, что $p \neq 0$. Если $p \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$, то

$$\sin 2x = -p \Leftrightarrow 2x = (-1)^{n+1} \arcsin p + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \frac{\arcsin p}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ n \in Z\ .$$

Построим график функции $y = \sin 2x$. Если $p \in \{-1;\ 1\}$, то прямая $y = -p$ пересекает график функции $y = \sin 2x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ в двух точках, абсциссы которых отличны от x_1 и x_2, т.е. появляются еще два новых корня. Если же $p \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$, то появляются еще 4 новых решения.



Ответ: 6 решений при $p \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$;

4 решения при $p \in \{-1;\ 1\}$;

2 решения при других значениях р.

Пример 103. Выясните равносильность следующих уравнений

$$1 - \sin^2 x = 0 \text{ и } \sin^2 x - 3\cos 2x = 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right);\ a, b \in R\ .$$

Решение. 1. Найдем решения данных уравнений:

$1-\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \cos=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ – множество решений первого уравнения.

2. Пусть $ab>0$, тогда правая часть второго неравенства не меньше 4, причем равенство достигается только при $a=b\neq 0$. Поэтому второе уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда совместна система

$$\begin{cases}\sin^2 x=1,\\ \cos 2x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\pm 1,\\ 2x=\pi+2\pi k,\ k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\ .$$

Итак, при $a=b\neq 0$ данные уравнения равносильны.

3. Пусть $ab<0$. Тогда правая часть второго неравенства не больше – 4, а левая часть не меньше – 3. Поэтому второе уравнение не имеет решения. Следовательно, в этом случае данные уравнения не равносильны.

Ответ: данные уравнения равносильны только при $a=b\neq 0$.

Пример 104. Определите число функций вида

$$f(x)=m\cos x-\frac{n}{\cos x}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

наименьшее значение которых является целым числом, заключенным между числами $\sqrt{5}$ и $\sqrt{17}$, если известно, что m – натуральное число, n – целое отрицательное число.

Решение. Пусть $-n=k$, k – натуральное число. В указанном промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $y=\cos x$ меняется в пределах $0<\cos x\leq 1$. Тогда

$$f(x)=m\cos x+\frac{k}{\cos x}=\sqrt{mk}\left(\frac{\sqrt{m}\cdot\cos x}{\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}\cdot\cos x}\right)\geq 2\sqrt{mk}\ ,$$

причем $f_{\min} = 2\sqrt{mk}$ при $\sqrt{k} = \sqrt{m} \cdot \cos x$, т.е. $\cos x = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

На параметры m и k имеем следующие ограничения: $\sqrt{5} < 2\sqrt{mk} < \sqrt{17}$, $0 < \sqrt{\dfrac{k}{m}} \le 1$, $2\sqrt{mk}$ – целое число, m и k – натуральные числа. Отсюда следует:

$$2 \le k \cdot m \le 4,\ 1 \le k \le m \le 4,\ 2\sqrt{mk} \text{ – целое число.} \qquad (*)$$

Составим таблицу возможных значений m и k с учетом условий (*):

	Значения k	Значения m	$2\sqrt{mk}$ – целое число	Вывод
1.	1	2; 3; 4	$k=1$, $m=4$	$k=1$, $m=4$
2.	2	2	$k=2$, $m=2$	$k=m=2$
3.	3	$\varnothing$		

Из этой таблицы следует, что имеются лишь две возможности: $k = 1$, $m = 4$ и $k = m = 2$.

Ответ: 2.

Пример 105. Определите число функций вида

$$f(x) = m\operatorname{tg} x + n\operatorname{ctg} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

наименьшее значение которых является целым числом, заключенным между числами $\sqrt{5}$ и $\sqrt{17}$, если известно, что m и n – натуральные числа.

Решение. Данная функция принимает только положительные значения. Представим ее в виде:

$$f(x) = m\operatorname{tg} x + \frac{n}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{mn}\left(\frac{\sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} x}\right) \ge 2\sqrt{mn},$$

причем $f_{\min} = 2\sqrt{mn}$ при $\sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} x = \sqrt{n}$, т.е. $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{n}{m}}$. Полученное уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{n}{m}}$ имеет единственное решение в указанном промежутке при любых натуральных числах *m* и *n*.

Параметры *m* и *n* должны удовлетворять условиям: $2\sqrt{mn}$ - целое число, $\sqrt{5} < 2\sqrt{mn} < \sqrt{17}$. Отсюда следует: $2 \le m \cdot n \le 4$.

Если $m = n$, то возможен лишь случай $m = n = 2$. Если $m < n$, то при $m = 1$ число *n* может принимать единственное значение $n = 4$. Аналогично при $n = 1$ число $m = 4$.

Ответ: 3.

Пример 106. При каких натуральных значениях *a* функция $f(x) = \cos(ax) \cdot \sin\frac{28x}{a^2}$ является периодической с периодом π ?

Решение. 1. Найдем необходимые условия на *a*, считая π периодом данной функции:

$$\cos(ax) \cdot \sin\frac{28x}{a^2} = \cos(a(x+\pi)) \cdot \sin\frac{28(x+\pi)}{a^2}.$$

При $x = 0$ это уравнение имеет вид: $0 = \cos(\pi a) \cdot \sin\frac{28\pi}{a^2}$. Т.к. при $a \in N$ значение $\cos(\pi a) \ne 0$, то $\sin\frac{28\pi}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{28}{a^2} = k,\ k \in N$.

Число a^2 может быть равным только 1 или 4. Следовательно, $a = 1$ и $a = 2$ – необходимые условия.

2. Проверим на достаточность. Пусть $a = 1$, тогда $f(x) = \cos x \cdot \sin 28x$. Но

$$f(x+\pi) = \cos(x+\pi) \cdot \sin(28(x+\pi)) =$$

$$=-\cos x\cdot\sin 28x=-f(x).$$

Т.к. данная функция является нечетной, то $f(x)\neq f(x+\pi)$. Следовательно, $a\neq 1$.

Пусть теперь $a=2$, тогда $f(x)=\cos 2x\cdot\sin 7x$. Значение

$$f(x+\pi)=\cos(2(x+\pi))\cdot\sin(7(x+\pi))=\cos 2x\cdot(-\sin 7x)=$$

$$=-f(x)\neq f(x).$$

Отсюда следует $a\neq 2$.

Ответ: нет таких значений *a*.

Пример 107. При каких значениях параметра *a* уравнение

$$1+a\sin x=a^2-\sin^2 x \qquad (1)$$

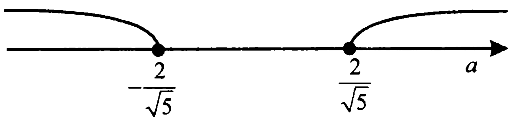
имеет решение?

Решение: (1) $\Leftrightarrow \sin^2 x+a\sin x+1-a^2=0$.

Полученное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда дискриминант $D=a^2-4(1-a^2)=5a^2-4\geq 0$ и $\left|\dfrac{-a+\sqrt{D}}{2}\right|\leq 1$ или

$\left|\dfrac{-a-\sqrt{D}}{2}\right|\leq 1$.

Ясно, что $D\geq 0\Leftrightarrow a^2\geq\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow |a|\geq\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.



1) Если $a\geq\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, то достаточно проверить справедливость неравенства:

$$\left|-a+\sqrt{D}\right|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq -a+\sqrt{D}\leq 2\Leftrightarrow a-2\leq\sqrt{D}\leq 2+a\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \le a \le 2, \\ 5a^2 - 4 \le (2+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{5}} \le a \le 2, \\ \begin{cases} a > 2, \\ (a-2)^2 \le 5a^2 - 4 \le (2+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. .$$

Итак, в этом случае $\dfrac{2}{\sqrt{5}} \le a \le 2$.

2) Если $a \le -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, то достаточно проверить истинность неравенства $\left|\dfrac{-a-\sqrt{D}}{2}\right| \le 1$. Преобразуем это неравенство:

$$\left|\frac{-a-\sqrt{D}}{2}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|a+\sqrt{D}\right| \le 2 \Leftrightarrow -2-a \le \sqrt{D} \le 2-a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2 \le a \le -\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \\ 5a^2 - 4 \le (2-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le a \le -\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \\ \begin{cases} a < -2, \\ (a+2)^2 \le D \le (2-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing. \end{array}\right. .$$

В этом случае параметр a меняется в пределах $-2 \le a \le -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

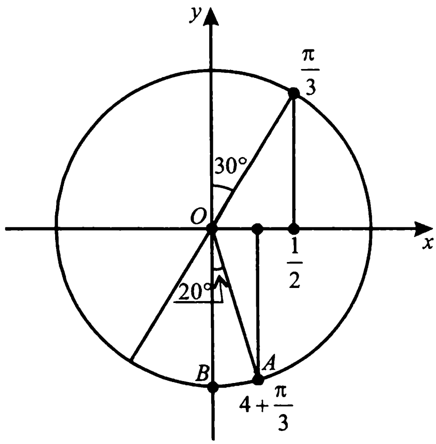
Ответ: $\left[-2; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}; 2\right]$.

Пример 108. При каких a уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right)=a+\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right) \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Введем обозначение $t=2^{2x-x^2}$, $t>0$. Найдем наибольшее значение t, $t=2^{1-(x-1)^2}\le 2$. Следовательно $0<t\le 2$. Заметим, что $2^{2x-x^2+1}=2t$. В новых обозначениях (1) имеет вид:



$$\Leftrightarrow 1+\cos 2t=a+\sqrt{3}\sin 2t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t=\frac{a-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2t+\frac{\pi}{3})=\frac{a-1}{2}.$$

Т.к. $0<t\le 2$, то $\frac{\pi}{3}<2t+\frac{\pi}{3}\le 4+\frac{\pi}{3}$. Угол $4+\frac{\pi}{3}$ находится в четвертой четверти. Для определения границ выражения $\frac{a-1}{2}$ (что необходимо сделать для указания значений параметра a) докажем, что $\cos\left(4+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$. Для этого достаточно доказать, что $\angle AOB<20^\circ$. Выразим $4+\frac{\pi}{3}$ радиан в градусах:

$$4\cdot 57{,}3^\circ+60^\circ=229{,}2^\circ+60^\circ<230^\circ+60^\circ=270^\circ+20^\circ.$$

Отсюда следует, что $\angle AOB < 20^\circ$, $\cos\left(4+\frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$. Поэтому $\frac{a-1}{2}$ меняется в пределах от -1 до $\frac{1}{2}$, точнее $-1 \le \frac{a-1}{2} < \frac{1}{2}$, $-1 \le a < 2$.

Ответ: $[-1; 2)$.

Пример 109. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} \cos bx \ge 1-a, \\ x^2+ax+1 \le 0 \end{cases}$$

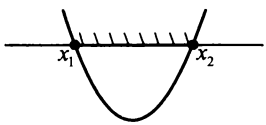
имеет единственное решение.

Решение. 1. Второе неравенство системы имеет решение тогда и только тогда, когда $D = a^2 - 4 \ge 0$. Пусть $D = 0$, т.е. $a = 2$ или $a = -2$. Если $a = -2$, то $\cos bx \ge 3$, что невозможно. Поэтому $a \ne -2$. При $a = 2$ первое неравенство имеет вид: $\cos bx \ge -1$, решением которого является любое действительное число x при любом $b \in R$. В целом система имеет единственное решение $x = -1$.

Следовательно, $a = 2$ и $b \in R$ – искомые значения.

2. Пусть $D > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < -2. \end{array}\right.$ При $a < -2$ выражение $1 - a > 3$, поэтому неравенство $\cos bx \ge 1 - a$ не имеет решения, $a < -2$ – не искомые значения.

Если $a > 2$, то $1 - a < -1$, поэтому неравенство $\cos bx \ge 1 - a$ справедливо для любого $x \in R$ и $b \in R$. В рассматриваемом случае решением второго неравенства является любое число $x \in [x_1; x_2]$, где $x_1 = \frac{-a-\sqrt{D}}{2}$;



$x_2 = \frac{-a+\sqrt{D}}{2}$ (см. рис.). Тогда данная система имеет бесчисленное множество решений, поэтому $a > 2$ – не искомые значения.

Ответ: $a = 2$, b – любое действительное число.

Пример 110*. Найдите все значения a, при которых хотя бы для одного значения $x \le -\frac{1}{2}$ выражение $\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x+0,5}{2(x-1)}}\right) - 2a$ равно 1.

Решение. 1. Из условия задачи следует:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x+0,5}{(x-1)}}\right) = 2a+1.$$

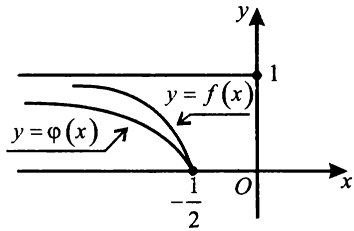
2. Функция $\varphi(x) = \frac{x+0,5}{x-1}$, $x \le -\frac{1}{2}$, при возрастании x от $-\infty$ до $-\frac{1}{2}$ убывает от 1 до 0 (см. рис.)

3. Функция $f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$, $0 \le f(x) < 1$ (см. рис.)

4. $0 \le \frac{\pi}{2} \cdot f(x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot f(x)\right) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le 2a+1 < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le a < 0.$



Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Пример 111. При каких значениях параметра p уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 16^{\frac{3x+2}{9(x+1)^2-6x-1}}\right) = \sqrt{2p+1}$$

имеет решение?

Решение. Пусть $f(x)=\dfrac{3x+2}{9(x+1)^2-6x-1}$. Преобразуем знаменатель: $9(x+1)^2-6x-1=9x^2+12x+8=(3x+2)^2+4$. Проведем замену переменной $t=3x+2$. Тогда $f(t)=\dfrac{t}{t^2+4}$. Оценим значения $f(t)$ при $t\in R$. Эта функция непрерывная и нечетная. Поэтому достаточно найти максимум для $t\geq 0$, минимум для $t\leq 0$ определим по свойству нечетной функции. Вычислим производную $y=f(t)$ для $t>0$ $(f(0)=0)$. $f'(t)=\dfrac{t^2+4-2t^2}{(t^2+4)^2}=\dfrac{4-t^2}{(t^2+4)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$ (напоминаем, что $t>0$). Левее точки $t=2$ производная $f'(t)>0$, а правее – меньше нуля. Следовательно, $t=2$ – точка максимума функции $y=f(t)$, $f_{\max}=f(2)=\dfrac{2}{4+4}=\dfrac{1}{4}$. По свойству нечетной функции получим $f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{4}\leq f(t)\leq\dfrac{1}{4}$.

Замечание. Наибольшее значение функции $y=f(t)$ при $t>0$ можно найти и по-другому:

$$f(t)=\frac{t}{t^2+4}=\frac{1}{t+\frac{4}{t}}=\frac{1}{2\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)}\leq\frac{1}{4},$$

где $\dfrac{t}{2}+\dfrac{2}{t}\geq 2$, причем равенство достигается только при $t=1$.

Тогда $16^{-\frac{1}{4}} \le 16^{f(x)} \le 16^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 16^{f(x)} \le 2$; $\frac{\pi}{8} \le \frac{\pi}{4} \cdot 16^{f(x)} \le \frac{\pi}{2}$,

$\sin\frac{\pi}{8} \le \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 16^{f(x)}\right) \le \sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{8} \le \sqrt{2p+1} \le 1$, $\sin^2\frac{\pi}{8} \le 2p+1 \le 1$.

Вычислим $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Окончательно имеем: $\frac{2-\sqrt{2}}{4} \le 2p+1 \le 1 \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{2}}{-8} \le p \le 0$.

Ответ: $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{-8}; 0\right]$.

Пример 112. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x) = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + \left(4a^2 + 8a - 14\right)x$ всюду возрастает.

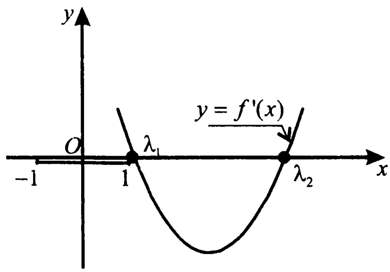
Решение. Непрерывная функция $y = f(x)$ всюду возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) \ge 0$ для любого $x \in R$, $f'(x) = 0$ только в отдельных изолированных точках, причем при переходе через эту изолированную точку производная не меняет знак. Найдем производную:

$$f'(x) = 2\cos 2x - 8(a+1)\cos x + 4a^2 + 8a - 14 =$$
$$= 4\left(\cos^2 x - 2(a+1)\cos x + a^2 + 2a - 4\right);$$

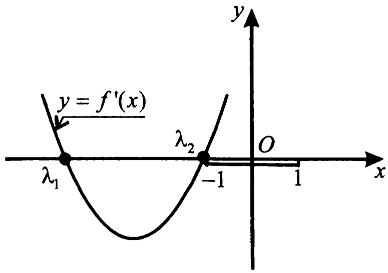
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \lambda_1,\ \lambda_1 = a + 1 - \sqrt{5}; \\ \cos x = \lambda_2,\ \lambda_2 = a + 1 + \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Значение сложной переменной $\cos x$ меняется в пределах $-1 \le \cos x \le 1$. Границы изменения параметра найдем из условия: либо $\lambda_1 \ge 1$ (см. рис. а)), либо $\lambda_2 \le -1$ (см. рис. б)).

а)



б)



Аналитически сказанное записывается в виде следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} a+1-\sqrt{5}\geq 1, \\ a+1+\sqrt{5}\leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\geq\sqrt{5}, \\ a\leq -2-\sqrt{5}. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Здесь важно отметить, что условия $a>\sqrt{5}$ или $a<-2-\sqrt{5}$ достаточны для того, чтобы данная функция всюду возрастала. Равенства $a=\sqrt{5}$ и $a=-2-\sqrt{5}$ только необходимы. Проверим эти значения на достаточность, т.е. убедимся, что при этих значениях параметра производная $f'(x)=0$ лишь в изолированных точках, причем при переходе через такую точку производная не меняет знак.

Пусть $a=\sqrt{5}$. Тогда

$$\frac{1}{4}f'(x)=\cos^2 x-2(\sqrt{5}+1)\cos x+1+2\sqrt{5}=$$

$$=\left(1-\cos x\right)\left(1+2\sqrt{5}-\cos x\right);$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=2\pi k \ \ (k\in Z),$$

т.е. $f'(x)=0$ лишь в отдельных изолированных точках, причем производная $f'(x)$ не меняет знак при переходе через эти точки. Значение $a=\sqrt{5}$ проверку на достаточность выдержало.

Пусть теперь $a=-2-\sqrt{5}$. В этом случае

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1,\\ \cos x=-1-2\sqrt{5}\end{array}\right.; \ \frac{1}{4}f'(x)=(\cos x+1)\left(\cos x+1+2\sqrt{5}\right),$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$. Так же, как и выше, убеждаемся, что $a=-2-\sqrt{5}$ – искомое значение параметра.

Ответ: $\left(-\infty;-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Замечание. Искомые значения параметра a можно найти и по-другому, вместо совокупности (*) рассмотреть совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l}f'(\cos x=1)\geq 0,\ a+1>1,\\ f'(\cos x=-1)\geq 0,\ a+1<-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a\geq\sqrt{5},\\ a\leq -2-\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Пример 113. При каких значениях параметра a уравнение

$$1+\sin^2 ax=\cos x \qquad (*)$$

имеет единственное решение?

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin^2 ax=0,\\ \cos x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ax=\pi n,\ n\in Z,\\ x=2\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

Если $k=0$, то $x=0$ – решение (*) при любом $a\in R$. Теперь надо выбрать такие значения a, при которых (*) не имеет решения, отличного от $x=0$.

Если $k\neq 0$, то $x\neq 0$. Отсюда следует, если a – рациональное число, то целые числа n и k, удовлетворяющие равенству $a=\dfrac{n}{2k}$, существуют. Поэтому (*) имеет второе решение $x=2\pi k$, отличное от $x=0$. Чтобы равенство $a=\dfrac{n}{2k}$ не имело решения, необходимо и достаточно требовать иррациональности параметра a.

Ответ: a – иррациональное число.

Пример 114. При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2 - a\sin\cos x + a^2 = 0 \qquad (*)$$

имеет единственное решение?

Решение. 1. Найдем **необходимые** условия на a, исходя из того, что если x_0 – решение (*), то – x_0 также является решением. Отсюда следует $x = 0$.

При $x = 0$ уравнение (*) имеет вид: $a^2 - a\sin 1 = 0$, т.е. $a = 0$ или $a = \sin 1$.

2. Проверим на **достаточность**.

Если $a = 0$, $2x^2 = 0$, $x = 0$ – единственное решение, поэтому $a = 0$ – искомое значение.

Если $a = \sin 1$, то $2x^2 - \sin 1 \cdot (\sin\cos x) + \sin^2 1 = 0$. Легко заметить, что $x_1 = 0$ – решение полученноего уравнения. Пусть теперь $x \neq 0$, тогда $2x^2 = \sin 1 \cdot (\sin\cos x - \sin 1)$. При $x = 2\pi k$, $k \neq 0$, левая часть положительна, а правая равна нулю, поэтому $x \neq 2\pi k$, $k \neq 0$. Но при $x \neq 2\pi k$, $k \neq 0$, левая часть положительна, а правая отрицательна.

Следовательно, $a = \sin 1$ – "выдержала" проверку на достаточность, т.к. существует только единственное решение.

Ответ: $\{0; \sin 1\}$.

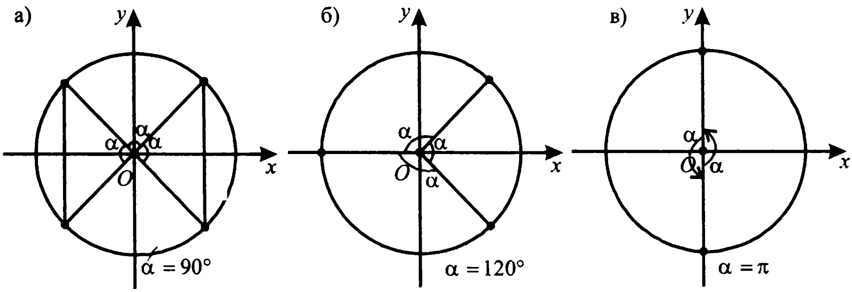
Пример 115. При каких значениях параметра a корни уравнения

$$\cos^2 x = a - a\cos x, \qquad (*)$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

Решение. 1. Заметим, что $\cos x = 1$ не является решением (*). Данное уравнение приведем к виду $\cos^2 x + a\cos x - a = 0$. Найдем корни $(\cos x)_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2}$.

Корни расположим на единичной окружности. Имеются следующие возможности их расположения:



Случай а) возможен тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \dfrac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+4a}=\sqrt{2}+a, \\ \sqrt{a^2+4a}=\sqrt{2}-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}+a=\sqrt{2}-a, \\ \sqrt{a^2+4a}=\sqrt{2}+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, \\ 0=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Следовательно, случай а) не достижим.

Рассмотрим случай б). Он возможен тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+4a}=a+1, \\ \sqrt{a^2+4a}=2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=2-a, \\ \sqrt{a^2+4a}=a+1 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, случай б) достижим, он реализуется при $a=\dfrac{1}{2}$.

Наконец, случай в) возможен только при $\cos x=0$. Тогда из (2.59) следует: $a=0$.

Ответ: $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$.

Пример 116. Решите уравнение

$$\cos ax \cdot \cos bx = \cos qx \cdot \cos px,$$

если a, b, q, p – последовательные члены убывающей арифметической прогрессии, причем $a > 0$.

Решение. Пусть $(-d)$ – разность указанной прогрессии, $d > 0$, $b = a - d$, $q = a - 2d$, $p = a - 3d$. Тогда

$$2\cos ax \cdot \cos(a-d)x = 2\cos(a-2d)x \cdot \cos(a-3d)x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos dx + \cos(2ax - dx) = \cos dx + \cos(2ax - 5dx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2ax - dx) = \cos(2ax - 5dx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2ax - dx = 2ax - 5dx + 2\pi k; \\ 2ax - dx + 2ax - 5dx = 2\pi k, \ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2d} \cdot k, \ k \in Z; \\ 4ax - 6dx = 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2(a-b)} \cdot k, \ k \in Z; \\ x = \frac{\pi k}{3b - a}, \ a \neq 3b. \end{array}\right.$$

Заметим, что при $a = 3b$ разность $-d = b - a = -\frac{2}{3}a$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi k}{2(a-b)}, \frac{\pi k}{3b-a}\right\}, k \in Z, a \neq 3b$;

$x \in \left\{0; \frac{3\pi k}{4a}\right\}$ при $b = \frac{1}{3}a, q = -\frac{a}{3}; p = -a$.

Пример 117. Найдите значение x, если $\sin ax$, $\cos bx$, $\sin ax + \cos bx$ – последовательные члены арифметической прогрессии, а $\cos bx$, $\sin ax$, $\sqrt{2008}$ – последовательные члены геометрической прогрессии, причем $ab \neq 0$.

Решение. Из условий задачи следует:

$$\begin{cases} 2\cos bx = 2\sin ax + \cos bx \\ \sin^2 ax = \sqrt{2008}\cdot\cos bx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin ax = \cos bx \\ \sin^2 ax = \sqrt{2008}\cdot 2\sin ax \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos bx = 2\sin ax, \\ \sin ax\left(2\sqrt{2008} - \sin ax\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin ax = 0, \\ \cos bx = 0. \end{cases}$$

Т.к. $ab \neq 0$, то

$$\begin{cases} ax = \pi k,\ k \in Z; \\ bx = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{a},\ k \in Z; \\ \dfrac{\pi k}{a} = \dfrac{\pi}{2b}(2n+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{a},\ k \in Z; \\ a = \dfrac{2k}{2n+1}b,\ n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{a}k,\ a = \dfrac{2k}{2n+1}b,\ k; n \in Z$, $k \neq 0$.

Глава 2. Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что система

$$\begin{cases} \sin^2 \pi y + 2\cos^2 2\pi y = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right), \\ y^3 + \left(\sqrt{9 - y^2}\right)^2 + x = \dfrac{39}{8} - y^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Указание. Воспользуйтесь тем, что

а) $\left(\sqrt{9 - y^2}\right)^2 = 9 - y^2$ при $-3 \leq y \leq 3$;

б) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$ при $xy>0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y$.

2. Решите в целых числах систему

$$\begin{cases} xy<0,\ y>-8, \\ \log_3 \dfrac{16y-y^3}{x+1}=2-\log_3(4-y). \end{cases}$$

Ответ: (44; –5).

3. Найдите сумму всех целых значений параметра $a\in(-6;5)$, при каждом из которых уравнение

$$(x^2-4a^2)\log_{a^2}(9-x^2)=0$$

имеет: а) два и только два корня; б) четыре и только четыре корня; в) один и только один корень.

Ответ: а) –5; б) нет таких значений *a*; в) нет таких значений *a*.

4. Найдите целочисленные решения системы

$$\begin{cases} y^3+y+xy^5-9y^5=\sqrt{(x-9)(y^4+y^2+1)}, \\ x(x+2)(x-8)(x+10)-1881=0. \end{cases}$$

Ответ: $x=9$, $y=0$.

5. Докажите, что система

$$\begin{cases} 3\sin^2\pi\left(yz-\dfrac{1}{2}\right)=3+(a^4+1)\log_{a^2}^2\sqrt{x^2-6x+10}, \\ 39<x^2+y^2+z^2\leq 49,\ xy\geq 12 \end{cases}$$

имеет целочисленные решения каково бы ни было допустимое значение параметра *a*. Найдите эти решения.

Ответ: $(3, 4, \pm 4)$, $(3, 5, \pm 3)$, $(3, 6, \pm 2)$, $(3, 6, \pm 1)$.

6. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\dfrac{4+2x^2+a}{2(1-x^2)-a}\geq 1$ не имеет решения.

Ответ: $a \geq 2$.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3 + x^2 + 2x + a}{2(1-(x+1)^2) - 2a} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

не имеет решения.

Ответ: $\left[-\dfrac{11}{4}; -\dfrac{33}{16}\right]$.

8. Найдите все цифры a и b такие, что $\overline{a24b1b} \vdots 15$.

Ответ: $a \in \{2,5,8\}$ при $b = 0$; $a \in \{1,4,7\}$ при $b = 5$.

9. Найдите целочисленные решения системы:

$$\frac{4}{3}t = 2k + 1 = \frac{l-1}{2}.$$

Ответ: $\varnothing$.

10. Найдите целочисленные решения следующих системы:

$$\frac{4}{3}t = 3k - 1 = \frac{l+1}{2} = 2m.$$

Ответ: $t = 9f + 6$, $k = 4f + 3$, $l = 24f + 15$, $m = 6f + 4$, $f \in \mathbb{Z}$.

11. По кольцевому шоссе длиной 4 км едут три велосипедиста со скоростями соответственно 40, 35 и 30 км/ч. На шоссе расположены две точки A и B, AB=2 км. Движение происходит в одном направлении. В один момент первый и третий велосипедисты находятся в точке A, а второй – в точке B. Найдите минимальное время $t \in \mathbb{N}$, через которое все три велосипедиста поравняются.

Ответ: $\dfrac{6}{5}$ часа.

12. Докажите, что

$$3+33+\ldots+\underbrace{33\ldots3}_{n}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Указание. Применить метод математической индукции, воспользоваться равенствами

$$\underbrace{33\ldots33}_{n+1}=3\left(1+10+10^2+\ldots+10^n\right)=\frac{3\left(10^{n+1}-1\right)}{9}.$$

13. Докажите равенство

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Указание. Применить метод математической индукции, воспользоваться равенствами:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n+1}=\sqrt{2+2\cos\alpha}=2\cos\frac{\alpha}{2}\text{, где }\alpha=\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

14. Найдите целочисленные решения систем:

$$а)\ \begin{cases}x+y=2,\\ xy-z^2=1;\end{cases}\qquad б)\ \begin{cases}x^2-y^2-z^2=1,\\ -x+y+z=3.\end{cases}$$

Ответ: *а)* (1, 1, 0); *б)* (9, 8, 4), (9, 4, 8), (–3,–2, 2), (–3, 2,–2).

15. По кольцевому шоссе длиной 3 км едут в одном направлении три велосипедиста со скоростями 13, 21 и 27 км/ч. В один момент все три велосипедиста поравнялись. Через какое минимальное время велосипедисты снова поравняются?

Ответ: 1,5ч.

16. По кольцевому шоссе длиной 5 км едут в одном направлении три велосипедиста со скоростями 21, 22 и 26 км/ч. В один из моментов первый велосипедист оказался в точке A, второй и третий – в точке C (AC – диаметр кольца). Через какое минимальное время после этого все три велосипедиста поравняются?

Ответ: 2,5ч.

17. Найдите число целочисленных решений системы

$$\begin{cases}(x^2+y^2-8)^2(1-xy)=\sqrt{x^2-y^2}, \\ 1\le x\le 4.\end{cases}$$

Ответ: 3.

18. От фирмы «Рога и копыта» после ее банкротства осталось 17 рогов, 2 копыта и одна гиря. Все это богатство поделили между собой равными по весу частями Паниковский и Балаганов, причем гиря досталась Балаганову, рога и копыта на части тоже не пилили. Каждый рог тяжелее каждого копыта и легче гири на одну и ту же величину. Сколько рогов и копыт у Паниковского?

Ответ: 9 рогов и 2 копыта.

19. На болоте *А* на должность дирижера лягушачьего оркестра претендовали 3 кандидата: *Б, В* и *Г*. По правилам выбора голосование осуществлялось кваканьем в поддержку выбранного кандидата, причем промолчать можно было не более одного раза из трех. Квакометр показал, что за *Б* подано 60%, за *В* – 70 и за *Г* – 85 % голосов всех избирателей. Сколько процентов квакнуло три раза?

Ответ: 15%.

20. При каких значениях a и b система неравенств

$$\begin{cases}x+y\ge 1, \\ bx+(a+b)y\le a+b, \\ x\le 3,\ \ y\le 3,\ \ a+b>0, \\ b(a+b)<0;\ \ a,b\in Z\end{cases}$$

имеет: а) 10 целочисленных решений; б) 15 целочисленных решений; в) $\sum(x;y)=35$; г) $\sum(x;y)=43$; д) $25<\sum(x;y)\le 47$, где $\sum(x;y)$ – сумма координат целочисленных решений?

Ответ: а) $a>-4b$, $b<0$; б) $3k<a\le 4k$, $b=-2k$ $k\in N$; в) $4k<a\le 5k$, $b=-2k$, $k\in N$; г) $3k<a\le 4k$, $b=-2k$ $k\in N$; д) $a<-4b$.

21. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x+ay>0,\ ax+2y<0,\ a\in R, \\ \dfrac{1}{|x+ay+1|}+|x+ay+1|+|ax+2y|\le 4\cos\pi x-\dfrac{1}{|ax+2y|}. \end{cases}$$

Ответ: $x=0,\ y=-\dfrac{1}{2}$ при $a=0$; $x=2k,\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+32k^2}}{4}$ при $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+32k^2}}{4k}$, $k\ne 0$, $k\in Z$; нет решения при $a=\pm\sqrt{2}$.

22. Докажите, что множество значений x и y, удовлетворяющих условию $\min\left\{x^2-y^2+1; \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1-x}{2}\right\}\le\sqrt{6}$, является неограниченным множеством, если $x>1$.

23. Докажите, что система

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+2x}+x^2+2x+(x+y)^2\le 2\sqrt{2},\ \ x<-2, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge -2+(x+y)(2x^2+3y^2) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

24. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

имеет 8 и только 8 решений.

Ответ: $\left(1;\sqrt[3]{2}\right)$.

25. Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором сумма целых отрицательных решений неравенства $\frac{ax^2+1}{x} \le 8$ равна –3.

Ответ: –4.

26. При каких значениях параметра a неравенство $x^2+9x+a \le 0$ имеет 10 целых решений?

Ответ: $(-10;\ 0]$.

27. Даны две квадратичные функции $y=f(x)$ и $y=h(x)$. Ветви первой функции направлены вниз и $x=a$ – точка максимума; ветви второй функции направлены вверх и $x=b$ – точка минимума. Известно, что $f(b)>f(c)$, где $c \in R$, $c \ne a$. При каком соотношении параметров a, b и c истинно равенство $h(a)=h(c)$?

Ответ: $b=\frac{a+c}{2}$.

28. Найдите все ненулевые значения параметра a, при которых наибольшее из двух чисел $b=3a^{-2}-7|a|^{-1}+5$ и $c=9-3a^2-7|a|$ не превосходит 3.

Ответ: $\left[-3;\ -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};\ 3\right]$.

29. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $y=-e^{ax^2+(a^2-4a-4)x+a^7}$ имеет максимум в точке $x_0=3$.

Ответ: $\sqrt{5}-1$.

30. При каких значениях параметра a неравенство $x^2+2(a-2)x+4-3a \ge 0$ верно при всех $x \ge 1$?

Ответ: $[0;\ 1]$.

31. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $-x^2+2(a-2)x-3a-1<0$ верно при всех $x \le -1$.

Ответ: $\left(\dfrac{7-\sqrt{37}}{2};\infty\right)$.

32. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-2a^2x+3=0$ имеет только целые корни?

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

33. Сколько отрицательных корней имеет уравнение $2x^3-ax-\sqrt{\dfrac{a}{6}}=0$?

Ответ: Нет корней при $a<0$; нет отрицательных корней при $0\le a<1{,}5$; один отрицательный корень при $a=1{,}5$; два отрицательных корня при $a>1{,}5$.

34. а) Докажите, что функция $f(x)=x^3-3a^2x+a$ $(a\neq 0)$ имеет один максимум $f_{\max}$ и один минимум $f_{\min}$. б) Определите число нулей этой функции.

Ответ: а) $f_{\max}=f(-a)$ и $f_{\min}=f(a)$ при $a>0$; $f_{\max}=f(a)$ и $f_{\min}=f(-a)$ при $a<0$. б) один нуль при $a\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; два нуля при $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; три нуля при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$.

35. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} xyz+z=-a,\\ xyz^2-z=b,\\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a=b=-2$.

36. При каких положительных значениях параметра a любое решение неравенства

$$x^3+3ax^2+\frac{5}{4}a^2x\geq 0$$

является решением неравенства $a^2x^2-ax-2<0$?

Ответ: $\varnothing$.

37. Дана функция $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{2-a}{3}x+b,\ a<2,\ b\in R$. Докажите, что: а) эта функция имеет один максимум $f_{\max}$ и один минимум $f_{\min}$; б) выражение $f_{\max}-f_{\min}$ не зависит от параметра b.

Ответ: а) $f_{\min}=f\left(\sqrt{\frac{2-a}{3}}\right),\ f_{\max}=f\left(-\sqrt{\frac{2-a}{3}}\right)$;

б) $f_{\max}-f_{\min}=\frac{4}{3}\left(\frac{2-a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ – не зависит от параметра b.

38. Докажите, что множество Ω всех значений x, при каждом из которых $\min\left\{\sqrt[5]{(3,6)^{5/2}-x^3-3x^2-2x};\frac{2(x+1)}{-5}-\frac{1}{x+1}\right\}<\sqrt{3,6}$, является неограниченным.

Ответ: $\Omega\supset(0;\infty)$, поэтому Ω является неограниченным множеством.

39. Докажите, что неравенство

а) $x-|y|\geq 2+\sqrt{x^2+y^2-4}$; б) $\sqrt{y-x^2-2}+y+x^2\leq 2$

имеет единственное решение.

40. Докажите, что система:

а) $\begin{cases} \dfrac{-xy-y}{y^2+(x+1)^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^3+\dfrac{1}{(x+1)^3}}}\ge\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ \sqrt[6]{33x^4-xy^3+32y^6}\ge 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+y)^2\le(1-\sqrt{21}-2x)+\sqrt[6]{x^4-xy+y^4}-\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{-2}+\dfrac{-3}{\sqrt{x^2-x+1}}\ge-\sqrt{6} \end{cases}$

имеет единственное решение.

41. Решите уравнение $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{1}{x^2}}=ax,\ a\in R.$

Ответ: $x=\sqrt[8]{\dfrac{4}{a^2(4-a^2)}}$ при $a\in[\sqrt{2};2)$; $x=-\sqrt[8]{\dfrac{4}{a^2(4-a^2)}}$ при $a\in(-2;-\sqrt{2}]$; нет решений при других значениях a.

42. Решите уравнение

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(a+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}},\ a\in R.$$

Ответ: $x=(\dfrac{a^2+1}{2a})^2$ при $0<a\le 1$; нет решений при других значениях a.

43. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a-x}=x-a+2, \\ \sqrt{x^2-3\sqrt[3]{2}ax+2\sqrt[3]{4}a^2}=2\sqrt[3]{2}a-x. \end{cases}$$

Ответ: $x=-1$ при $a=0$; $x=a-1$ при $a=\dfrac{1}{1-2\sqrt[3]{2}}$; нет решений при других значениях a.

44. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3\sqrt[5]{x+2}-16a^2\sqrt[5]{32x+32}=\sqrt[10]{x^2+3x+2}$ имеет два и только два решения.

Ответ: $\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{2}};\dfrac{-1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

45. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $5\sqrt[3]{x+3}-3a^2\cdot\sqrt[3]{8x-16}=\sqrt[6]{x^2+x-6}$ имеет единственное решение.

Ответ: $(-\infty;-1]\cup[-\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{\dfrac{2}{3}}]\cup[1;\infty)$.

46. Найдите все значения параметра a, при которых ни одно из решений неравенства $\sqrt{3a-2x-4}<\dfrac{3a-2x+2}{7}$ не принадлежит множеству $[-1;\ 2]$.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup\left[3;12\dfrac{2}{3}\right]$.

47. При каких значениях параметра a область определения функции $f(x)=\sqrt{2ax-x^2-5}+\sqrt{1-x}$ состоит из одной точки?

Ответ: $\left\{-\sqrt{5};\ 3\right\}$.

48. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt[3]{x^3-3a^2x+a^3-a}<0$ верно для любого $x<0$.

Ответ: $\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

49. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{(x-2)^2+y^2-ay(x-2)-a}=-a$ имеет единственное решение?

Ответ: $\{-1;\,0\}$.

50. Найдите все целые значения параметра a, $-4<a<0$, при которых неравенство $\sqrt{-x^2+6x}<a^2-3a+2$ верно при всех допустимых значениях x.

Ответ: $\{-3;-2;-1\}$.

51. При каких значениях параметра a функция $f(x)=\sqrt[3]{3^{ax^2-(a^2-3)x+a^{2005}}}$ имеет максимум в точке $x_0=-3$?

Ответ: $-3-2\sqrt{3}$.

52. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $f(x)=\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{x-5}}{2a^2-ax-x^2}}$, если $0<a<7$?

Ответ: Одно целое число при $a\in(0;\,5)\cup(5;\,6]$; $\varnothing$ при $a=5$; два целых числа при $a\in(6;\,7)$.

53. Докажите, что система

$$\begin{cases} y=1-2x+\sqrt{\sin 2\pi ax+2\sin\pi ax-3}\cdot\lg a,\\ (x+1)^2+4(y-1)^2\le 9\end{cases}$$

не имеет решения каково бы ни было значение a.

Указание: докажите, что $\varnothing$ – область определения первого уравнения.

54.* Докажите, что сумма натуральных значений x из области опредления функции

$$f(x)=\log_5(9^{\frac{5x+1}{x-3}}-9^9)$$

принадлежит отрезку $[6;16]$.

55.* Докажите, что неравенство

$$(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-2} > (0,2)^{3-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$$

верно для всех допустимых значений x.

Указание: за счет подстановки $t=\log_5(1-|x|)$, $t<0$, перейти к исследованию квадратного неравенства относительно t.

56.* Докажите, что неравенство $\sqrt{x^2+5x+6} > x+2,5$ равносильно уравнению $3^{1-x}=27+|3^{-x}-27|+2\cdot 3^{-x}$.

Указание: убедитесь, что множество решений уравнения и неравенства совпадают.

57.* Найдите число решений системы

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Ответ: Единственное решение.

58. При каких значениях параметра a все решения неравенства

$$\log_{x+3}\left(\frac{11x}{2}+14\right) > 2$$

являются одновременно решениями и неравенства $a^2x^2-4\le 0$?

Ответ: $[\frac{-11}{14};\frac{11}{14}]$.

59. При каких положительных значениях параметров a и b функция $f(x)=\sqrt{a}\cdot 3^{ax+b}+\sqrt{b}\cdot 3^{-ax-b}$ принимает наименьшее значение в точке x_o, $ax_o+b=\frac{\log_3 2}{4}$?

Ответ: $b=2a$.

60. Найдите целое значение a $(a \le 0)$, при котором функция $f(x) = 3^{\sqrt{-2x^3+3ax^2+6x-3a+3\sqrt{a^2+4}}}$ принимает наименьшее значение.

Ответ: -1.

61. При каких значениях параметра a неравенство $(3+2\sqrt{2})^x + (a^4+6-4a^2)(3-2\sqrt{2})^x + 2^{2y} - a2^{y+1} + a^2 - \sqrt{8} \le 0$ имеет хотя бы одно решение? Найдите эти решения.

Ответ: $a = \sqrt{2}$; $(\log_{3+2\sqrt{2}} \sqrt{2}; \frac{1}{2})$ – единственное решение.

62. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2+y^2=b, \ x>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a=0$ и $b \in (0; 1]$.

63. 17.* Дана таблица

1
2, 3, 4
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
. .. .

Докажите, что сумма членов каждой горизонтальной строки равна квадрату нечетного числа.

Указание: в n-й строке стоят числа n, $n+1$, ..., $3n-2$.

64. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+(2+a)x+2a=0$, а y_1 и y_2 – корнями уравнения $y^2-(3-\frac{b}{2})y-1{,}5b=0$. Найдите значения параметров a и b, если из-

вестно, что x_1, y_1, x_2, y_2 – последовательные члены арифметической прогрессии.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a=-8, \\ b=-26; \end{cases} \begin{cases} a=-\frac{4}{3}, \\ b=\frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} a=12, \\ b=14; \end{cases} \begin{cases} a=-8, \\ b=14. \end{cases}$$

65. Найдите наименьшую сумму соответственных значений параметров a и b, если

а) $2a+2$, $3b-3$, $\overline{ab}+7-2a$, $\overline{ba}+2+5a-6b$ – последовательные члены арифметической прогрессии, $a \neq 0$;

б) $\overline{ba}-\overline{ab}$ – квадрат натурального числа, $a \neq 0$.

Ответ: а) 6; б) 3.

66. Найдите наибольшую сумму соответственных значений параметров a и b, если b, $a \cdot b$, $\overline{ba}+a^2-a-20$, $\overline{ab}-2$ – последовательные члены геометрической прогрессии, причем $b>0$.

Ответ: 2.

67. Найдите трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры, выражающей число сотен, вычесть 4, а остальные цифры искомого числа оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют последовательные члены арифметической прогрессии.

Ответ: 931.

68. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором сумма целочисленных решений системы

$$(1-\frac{a}{x^2})\cdot x \geq 6, \quad |x|<100$$

наибольшая.

Ответ: –9.

69. Найдите сумму первых n целых отрицательных значений параметра a, при которых неравенство $(1-\frac{a}{x^2})x \geq 4$ верно при всех $x > 0$.

Ответ: $\frac{n(n+7)}{-2}$, $n \in N$.

70. Сколько существуют пар соответственных цифр (a; b), удовлетворяющих условию: $\overline{ba}-\overline{ab}=k^2$, $k \in N$ и образующих с числом 2: а) последовательные члены арифметической прогрессии; б) последовательные члены геометрической прорессии.

Ответ: а) три пары (0; 1), (0; 4) и (3; 4); б) одна пара (4; 8).

71. Решите неравенство

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin ax \geq a, \quad a \in Z$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\ (k \in Z)$ при $a=1$; нет решения при других значениях a.

72. Найдите значения x, если $\cos x$ является корнем уравнения $3z=(z^2+z+1)(k-1)$, $k \in Z$.

Ответ: $x=2\pi n$ при $k=2$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ при $k=1$; $x=\pi+2\pi n$ при $k=-2$; $x=\pm\arccos(\sqrt{3}-2)+2\pi n$ при $k=0$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ при $k=-1$, $n \in Z$.

73. Решите уравнение $\frac{a^2-a}{\cos^2 2x}=\frac{2\sin^2 x-a}{\cos^2 2x}$, $a \in R$.

Ответ: $x=\pm\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}+\pi k$ при $k \in Z$,

$a \in [-\sqrt{2};-1) \cup (-1;1) \cup (1;\sqrt{2}]$; нет корней при других значениях a.

74. При каких значениях параметра a уравнение $1+\cos^2 ax = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$ имеет единственное решение?

Ответ: a – иррациональное число. *Указание*: убедитесь, что: 1) $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k; \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) правая часть не меньше двух.

75. При каких значениях параметра $a \in R$ уравнение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\sqrt{x(2-x)}\right) = 2a-1$ имеет решение?

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

76. Найдите все значения параметра a, при которых хотя бы для одного значения $x \le -0,5$ выражение $\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{x+0,5}{2(x-1)}}\right) - 2a$ равно 1.

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

77. Для каждого значения параметра p найдите число решений уравнения $p\operatorname{tg} x + \cos 2x - 1 = 0$, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.

Ответ: 5 решений, если $p \in \{-1; 1\}$; 7 решений, если $p \in (-1;0) \cup (0;1)$; 3 решения, если $|p| > 1$ или $p = 0$.

78. Найдите все такие значения параметра p, при которых корни уравнения $\sin^2 x + p\sin x - p = 0$, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: $\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$.

79. Определите число всевозможных функций вида $f(x)=\dfrac{1}{m\cos x+\dfrac{n}{\cos x}}$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$, наибольшее значение которых является рациональным числом, заключенным между числами $\dfrac{1}{\sqrt{24}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, если m и n – натуральные числа.

Ответ: 2.

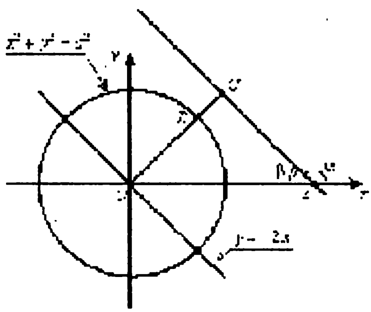
80. При каких значениях параметра a неравенство $\cos^4 x+\sin^4 x+a\sin 2x\geq 0$ верно при всех $x\in R$.

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

81. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых системы $\begin{cases}\operatorname{tg}(2x+y)=0,\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+y=0,\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$ равносильны.

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{5}};\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}\right)$.

Указание: Рассмотрите два случая: $a=0$ и $a\neq 0$. Примените графический способ решения систем. Убедитесь, что при $a\neq 0$ вторая система имеет два решения, которые совпадают с решениями первой системы при $k=0$, $y=-2x+\pi k$. Для обеспечения равносильности необходимо и достаточно обеспечение истинности неравенства $OA<OB\cdot\sin\alpha$, где $OA=|a|$, $\operatorname{tg}\alpha=2$, $OB=\dfrac{\pi}{2}$.



82. Решите уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\cos x}}=\cos x,\ a\in R\cdot$

Ответ: $x=\pm\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}+2k\pi$ при $a\in\left[-\dfrac{1}{4};\,0\right]$ и $k\in Z$; нет корней при других значениях a. Указание. Докажите равносильность двух уравнений: данного и уравнения $\sqrt{a+\cos x}=\cos x\cdot$

83. При каких значениях параметра a уравнение $2\pi x^2+4(a+1)\cos\big(2\pi\cdot(x+1)\big)-\pi^2(a+1)^3=0$ имеет единственное решение?

Ответ: $\left\{-1;\,-1-\dfrac{2}{\pi}\right\}$.

84. При каких значениях параметра a все решения уравнения $2\pi(x-y)^2+9a\sin\big(2\pi x-2\pi y+2{,}5\pi\big)-\pi^2a^3=0$ удовлетворяют условию $x=y$?

Ответ: $\left\{-\dfrac{3}{\pi};\,0\right\}$.

85. При каких натуральных значениях параметра a неравенство $7a^2(x-1)^2-6a\sqrt{\sin 2\pi x}-a^3>0$ верно при всех допустимых значениях x?

Ответ: $\varnothing$.

86. При каких целых значениях параметра a, $|a|\le 1$ неравенство $a^2(x-1)^2-6a\sqrt{\sin 2\pi x}+a^3<0$ верно при всех допустимых значениях x?

Ответ: $\varnothing$.

Литература

1. **Адамар, Ж.** Исследование психологии процесса изобретения в области математики/ Ж. Адамар; пер. с фр. – М.: Сов. радио, 1970. – 152 с.
2. **Белоносов, В. С.** Задачи вступительных экзаменов по математике / В. С. Белоносов,М. В. Фокин. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2003. – 560 с.
3. **Жафяров, А. Ж.** Сборник подготовительных задач по математике для поступающих в вузы /А. Ж. Жафяров, Р. С. Созоненко. – Новосибирск: Наука, 1972 – 270 с.
4. **Жафяров, А. Ж.** Концепция и учебные планы профильного обучения /А. Ж. Жафяров, Н. Е. Меднис. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 1993. – 28 с.
5. **Жафяров А. Ж.** Гуманизация школьного образования через профильное обучение / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 1995. – 29 с.
6. **Жафяров А. Ж.** Дистантная система образования: концепция и опыт реализации в педвузах и школах / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 1995. – 20 с.
7. **Жафяров, А. Ж.** Концепция и учебные планы в 11-летней (12-летней) школе / А. Ж. Жафяров, А. М. Ким. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 1998. – 48 с.
8. **Жафяров А. Ж.** Профильное обучение математике старшеклассников: учебно-дидактический комплекс / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2003. – 468 с.
9. **Жафяров А. Ж.** Индивидуализация и дифференциация в педагогической теории и практике: анализ отечественного опыта / А. Ж. Жафяров, Е. С. Никитина, М. Е. Федорова. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2004. – 36 с.
10. **Жафяров, А. Ж.** Элективный курс по теории чисел (с электронным обеспечением) / А. Ж. Жафяров, Е. С. Никитина. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007. – 96 с.
11. **Жафяров, А. Ж.** Параметрическая паутина. Математика. ЕГЭ – уровень С. / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007. – 457 с.

12. **Жафяров, А. Ж.** Элективный курс «Линейные уравнения, неравенства, системы и совокупности. Параметры и ЕГЭ» / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007. – 128 с.

13. **Жафяров, А. Ж.** Элективный курс с электронным обеспечением «Уравнения, неравенства, системы и совокупности с параметрами 2-й степени. ЕГЭ – уровень С» / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007. – 128 с.

14. **Жафяров, А. Ж.** Элективный курс с электронным обеспечением «Уравнения, неравенства, системы и совокупности с параметрами высших степеней. ЕГЭ – уровень С» / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007. – 106 с.

15. **Жафяров, А. Ж.** Элективный курс с электронным обеспечением «Иррациональные уравнения, неравенства, системы и совокупности с параметрами. ЕГЭ – уровень С» / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007. – 91 с.

16. **Жафяров, А. Ж.** Элективный курс с электронным обеспечением «Логарифмические и показательные уравнения, неравенства, системы и совокупности с параметрами. ЕГЭ – уровень С» / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2008. – 108 с.

17. **Жафяров, А. Ж.** Элективный курс с электронным обеспечением «Прогрессии и параметр. ЕГЭ – уровень С» / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2008. – 54 с.

18. **Жафяров, А. Ж.** Элективный курс с электронным обеспечением «Тригонометрия. ЕГЭ – уровень С» / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2008. – 115 с.

Учебное издание

Жафяров Акрям Жафярович

МАТЕМАТИКА
ЕГЭ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УРОВНЯ С3

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка *А. В. Богатырев*

Подписано в печать 27.07.09. Формат 60×90/16. Бумага газетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 2500 экз. Заказ № 767.

Сибирское университетское издательство
630117, Новосибирск, ул. Арбузова, 1/1

Отпечатано в типографии
Сибирского университетского издательства
630117, Новосибирск, ул. Арбузова, 1/1

ЖАФЯРОВ
Акрям Жафярович

Доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии образования.

С 1964 по 1975 гг. преподаватель Физико-математической школы при Новосибирском государственном университете.

С 1972 г. работает в Новосибирском государственном педагогическом институте (с 1993 г. — университет) заведующим кафедрой геометрии и методики преподавания математики. С 1981 г. — проректор по научной работе.

В 1972 г. защитил кандидатскую и в 1988 г. докторскую диссертации в Институте математики СО РАН. Автор и соавтор более 230 научных работ (монографии, учебники, учебные пособия и др.) общим объемом 940 п.л.

Один из разработчиков системы профильного образования и дистанционной (открытой) системы образования.

Под научным руководством А. Ж. Жафярова защищены 37 кандидатских и докторских диссертаций.

Лауреат Всероссийского конкурса на лучшую научную книгу. Заслуженный работник высшей школы РФ.

ISBN 978-5-379-01414-8
9 785379 014148
2678 01