ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ТЕСТИРОВАНИЯ

РЕГИСТР
ИСО 9000

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ

ЕГЭ-2008

МАТЕМАТИКА

Москва

ББК 74.202.5
УДК 37.1

Автор **А.Г. Клово**

Экзаменационные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. ЕГЭ-2008. Математика. М.: ФГУ «Федеральный центр тестирования», 2007.

В книге представлены тесты, составленные по спецификации контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2007 года по математике. Даны ответы для всех представленных тестов.

Сборник предназначен для самостоятельной подготовки выпускников общеобразовательных учреждений к единому государственному экзамену, а также в помощь преподавателям и методистам, использующим в своей работе тестовый способ контроля знаний.

ISBN 978-5-94635-309-0

Содержание

От автора

Как добиться успеха на Едином экзамене по математике?

А какой результат будет для Вас успешным?

Эта книга для тех, кто хочет получить высокие баллы на ЕГЭ по математике.

Эти баллы Вы сможете заработать только в тот момент, когда останетесь один на один с трудной задачей, которая раньше Вам не встречалась. Вот он, момент Истины. Вы должны собрать в комок всю свою волю, все свои силы и решить Задачу.

Часть Единого экзамена по математике составляют задания, которые покажутся простыми для многих из вас. В этой книге таких заданий практически нет, даже если это задание раздела А, мы постарались выбрать самое сложное, что может встретиться Вам на экзамене.

В этой книге 10 разных вариантов, задачу в каждом варианте надо решать заново. Здесь очень мало простых заданий, будет над чем подумать и вашему учителю.

Решение каждой задачи в этой книге – это Ваша победа, очередная вершина на пути к главной цели.

Варианты полностью соответствуют спецификации ЕГЭ в 2007 г.

Тяжело в учении – легко в бою!

Итак, Вы хотите добиться успеха на ЕГЭ по математике, тогда **работайте** над задачами из этой книги.

Искренне желаем Вам успехов!

ВВЕДЕНИЕ

В 2007 году в эксперименте по введению единого государственного экзамена (ЕГЭ) участвовало 82 субъекта Российской Федерации. С 2009 г. согласно Федеральному закону № 17-ФЗ от 9.02.2007 «О внесении изменений в Закон Российской Федерации "Об образовании" и Федеральный закон "О высшем и послевузовском профессиональном образовании" в части проведения единого государственного экзамена» ЕГЭ вводится в штатный режим.

Смысл эксперимента состоит в совмещении итоговой аттестации выпускников общеобразовательных учреждений со вступительными испытаниями при поступлении в государственные вузы России. Все действия по проведению ЕГЭ регламентируются Министерством образования и науки Российской Федерации.

Оценка учебных достижений выпускников проводится стандартизованно – в максимально однородных условиях и с применением максимально однородных по содержанию и сложности экзаменационных материалов.

Каждый вариант экзаменационных материалов ЕГЭ содержит несколько десятков заданий, сформулированных в трех специальных формах.

Задания с выбором ответов (тип А). Каждому из таких заданий прилагаются по четыре равнопривлекательных вариантов ответов. Участник ЕГЭ должен указать один, по его мнению, верный ответ из них. В заданиях такого типа теоретически возможно случайно угадать верный ответ.

Задания с кратким ответом (тип В), который должен быть кратко сформулирован и записан в бланке ответов в виде слова или числа. Угадать при этом верный ответ практически невозможно.

Проверка ответов типа **А** и **В** осуществляется автоматизированно путем сравнения с эталоном или несколькими эталонами, которые обозначают одно и то же. Например, ответы «Иван Грозный» и «Иван IV» в тесте по истории России считаются одинаковыми.

Задания с развернутым ответом (тип С) – предлагают участнику ЕГЭ записать ответ в развернутой форме. Фактически это небольшая письменная контрольная работа, которая проверяется специально подготовленными экспертами.

При проведении ЕГЭ учащиеся получают тестовые задания, запечатанные в индивидуальный пакет. В каждом пакете находятся также три цветных бланка ответов. Все три бланка ответов имеют уникальную нумерацию в виде штрихкодов.

Бланк регистрации, в котором участник ЕГЭ самостоятельно записывает свои: фамилию, имя, отчество, серию и номер паспорта и др., а также по указанию организатора в аудитории записывает коды региона, района, школы и пр.

В бланке регистрации обязательно ставится подпись участника ЕГЭ.

Бланк ответов № 1, в котором учащийся отмечает свои ответы на задания типов **А** и **В.** В этом бланке запрещено указывать сведения об участнике ЕГЭ. Бланк должен быть обязательно им подписан.

Бланк ответов № 2, в котором участник ЕГЭ записывает свои ответы на задания в свободной форме. Бланк может заполняться с обеих сторон. В бланке запрещено указывать сведения об участнике ЕГЭ.

Важной особенностью бланков ЕГЭ является их жесткая сгруппированность по три бланка из каждого индивидуального пакета. Бланки ответов сконструированы таким образом, что в запечатанном полиэтиленовом пакете видны штрихкоды всех трех бланков. Номера штрихкодов считываются сканерами и заносятся «тройками» в базу данных Федерального центра тестирования. После проведения ЕГЭ бланки ответов разного вида собираются отдельно, запечатываются в специальные доставочные пакеты и доставляются в различные пункты обработки информации.

Бланки регистрации и бланки № 1 обрабатываются автоматизированно почти без участия человека.

Объединение данных из трех видов бланков ответов производится только в Москве в Федеральном центре тестирования на основании хранящихся в базе данных номеров штрихкодов трех бланков ответов из индивидуальных пакетов. Проверка правильности ответов и выставление тестовых баллов производится также в Федеральном центре тестирования.

Результаты ЕГЭ, представленные в стобалльной шкале, выдаются выпускникам в специальных свидетельствах. Одновременно Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки издает распоряжения о соответствии оценок ЕГЭ (в стобалльной шкале) отметкам итоговой аттестации (по пятибалльной шкале) по различным предметам.

В 2007 г. результаты ЕГЭ, учитывались в качестве оценок вступительных испытаний при поступлении в большинство государственных вузов тех регионов России, в которых проводился эксперимент по ЕГЭ. Кроме этого, многие вузы других регионов добровольно принимали результаты ЕГЭ в качестве оценок вступительных испытаний.

Значимость ЕГЭ как для отдельного учащегося, так и для системы образования в целом, трудно переоценить.

Только планомерная, вдумчивая и добросовестная учеба в школе позволят выпускнику хорошо подготовиться к участию в ЕГЭ и успешно решить судьбоносную проблему при переходе на более высокий уровень обучения в вуз.

Материалы настоящего сборника составлены высококвалифицированными специалистами Федерального центра тестирования. Ознакомление и работа с ними безусловно будут полезны выпускникам, которые в 2008 г. будут участвовать в ЕГЭ.

Внедрение в практику Российского образования тестовых методов контроля знаний повысит объективность и надежность оценок учебных достижений учащихся, что безусловно приведет к повышению качества российского образования.

КАК ПРОВОДИТСЯ ЕГЭ

Для того, чтобы наилучшим образом подготовиться к единому государственному экзамену (ЕГЭ), надо не только иметь хорошие знания по предмету, но также хорошо представлять себе собственно процедуру экзамена, знать какие и когда действия при этом происходят.

Задолго до начала ЕГЭ – обычно в январе-феврале соответствующего года Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки России утверждает расписание ЕГЭ. Первый экзамен проводится обычно 20-22 мая, последний – 18-20 июня.

Орган управления образованием субъекта Федерации, в котором проживает выпускник, заранее объявляет перечень предметов, по которым итоговая аттестация может проводиться только в форме ЕГЭ, и перечень предметов, по которым выпускник может самостоятельно определять тип экзамена – в форме ЕГЭ или в традиционной форме.

Выпускники должны заранее определить по каким предметам они будут сдавать экзамены в форме ЕГЭ, а по каким в традиционной форме.

По каждому предмету экзамен в форме ЕГЭ можно сдавать только один раз. Полученные результаты могут учитываться при приеме в большинство вузов России. В некоторые вузы прием студентов проводится исключительно по результатам ЕГЭ.

О своем участии в ЕГЭ по выбранным предметам выпускники заранее сообщают в письменной форме администрации своей школы.

В конце апреля для будущих участников ЕГЭ почти во всех регионах России проводится пробный экзамен, который по процедуре проведения и тестам ничем не отличается от ЕГЭ, который будет проводиться в мае-июне. Результаты пробного экзамена обычно объявляются учащимся в середине мая в виде количества баллов, определенных как сумма верных ответов на задания типов **А** и **В** и количества баллов, выставленных экспертами за ответы на задания в свободной форме.

В середине мая будущие участники ЕГЭ в своих школах получат пропуска, в которых будет указан адрес назначенного им пункта проведения ЕГЭ, даты проведения экзаменов по выбранным предметам и время начала экзаменов. В пропусках могут быть написаны правила участия в ЕГЭ, приведены изображения и образцы правильно заполненных бланков ЕГЭ.

В школах учащимся объявляют порядок сбора у пункта проведения ЕГЭ (ППЭ). В случае необходимости администрация школы (муниципальный орган управления образованием) может организовать доставку учеников до ППЭ на специальном транспорте.

В день экзамена все учащиеся должны прибыть в пункт проведения ЕГЭ не позднее, чем за полчаса до его начала. Каждый учащийся должен иметь при себе паспорт, пропуск и гелевую авторучку черного цвета.

Ученики группируются во дворе ППЭ классами. Каждый класс сопровождают специально назначенные педагоги из той школы, в которой ученики обучаются. Педагоги должны оказывать помощь ученикам в затруднительных ситуациях.

Для проведения ЕГЭ в каждую аудиторию ППЭ заранее назначаются специально подготовленные организаторы. Как правило, это учителя других школ, среди которых не должно быть преподавателей-предметников по тому предмету, по которому проводится экзамен.

Организаторы выдают педагогам, сопровождающим выпускников, списки, в которых для каждого участника ЕГЭ указаны предназначенные ему номера аудитории и посадочного места. Ученики переходят к тем организаторам, которые держат в руках таблички с номерами соответствующих аудиторий.

Организаторы разводят группы учеников по аудиториям. При входе в аудитории организаторы проверяют личности выпускников, которые обязаны предъявить им свои паспорт и пропуск.

Каждый выпускник должен занять назначенное ему в аудитории место. Организаторы объясняют правила проведения экзамена и его длительность.

Руководитель ППЭ или его помощники приносят в класс доставочный пакет, в котором находятся экзаменационные материалы. Пакет показывают каждому ученику для того, чтобы они удостоверились в целостности его упаковки. Пакет публично вскрывается и из него извлекают 15 индивидуальных полиэтиленовых пакетов и три доставочных пакета для обратной отправки бланков ЕГЭ на обработку. Каждый индивидуальный пакет предназначен для отдельного участника ЕГЭ.

В пакете содержатся:

– бланки ЕГЭ (регистрационный и бланки № 1 и № 2),

– тест ЕГЭ,

– краткая инструкция по работе с тестом,

Все три бланка ЕГЭ имеют в верхней части **различные** штрихкоды. Тройка номеров штрихкодов из каждого индивидуального пакета перед отправлением в регионы сканируется и хранится в базе данных Федерального центра тестирования.

Только в одном бланке – регистрационном, учащийся может записать свою фамилию и паспортные данные. В остальных бланках ЕГЭ указывать какую-либо информацию об участнике ЕГЭ запрещено. Обработка бланков после проведения ЕГЭ производится в разных местах. Объединить информацию, записанную на разных бланках, возможно только с помощью тройки штрихкодов из базы данных Федерального центра тестирования. Поэтому учащимся категорически запрещено обмениваться бланками ЕГЭ. Если это случайно или специально произойдет, то собрать нужную тройку бланков такого небрежного учащегося среди десятков тысяч других бланков ЕГЭ будет практически невозможно. Результаты ЕГЭ будут утеряны со всеми печальными последствиями для нерях.

Участники ЕГЭ по указаниям организаторов заполняют бланки регистрации. После этого на доске записывается время начала и окончания экзамена. Учащиеся обращаются к тестам и начинают заполнять бланки ЕГЭ.

Тесты ЕГЭ принято называть контрольными измерительными материалами (КИМ) ЕГЭ. Количество используемых вариантов КИМ очень велико. В каждом классе на ЕГЭ практически не бывает двух одинаковых вариантов КИМ. Поэтому не следует тратить время на поиск теста-двойника. Надо внимательно читать задания своего теста и заполнять бланки ответов.

Структура предлагаемых тестов (КИМов) очень близка по форме и содержанию к тому, что представлено в этом сборнике.

Все промежуточные вычисления, рисунки и записи надо делать на бланке черновика. Если Вам понадобится дополнительный бланк черновика, то скажите об этом организатору в аудитории. Он обязан предоставить черновики в необходимом количестве. По окончании экзамена все черновики сдаются вместе с экзаменационными материалами. Использование для записей других листов бумаги на ЕГЭ запрещено.

Никакие записи в черновиках не рассматриваются при оценивании ответов учащихся.

Тестовые задания составлены таким образом, что не требуют значительных вычислений. Поэтому калькуляторами на ЕГЭ пользоваться запрещено, кроме экзаменов по химии и по физике.

При необходимости учащимся разрешается выходить в туалет.

Во время проведения ЕГЭ в ППЭ запрещено находиться посторонним людям. На каждом этаже постоянно находится не менее двух дежурных. В ППЭ должны быть организованы пункты оказания первой медицинской помощи и охраны правопорядка.

По истечении времени экзамена учащиеся должны организованно сдать экзаменационные материалы. При этом на столе организаторов должны сформироваться пять стопок материалов: регистрационные бланки, бланки № 1, № 2, тесты и черновики.

После сдачи материалов учащиеся должны вернуться на свои рабочие места.

Организаторы публично пересчитывают в каждой стопке бланки ЕГЭ и запечатывают их в доставочные пакеты для отправки на обработку.

Организаторы выводят учащихся из ППЭ.

Результаты ЕГЭ поступают в школы через 9-10 дней после проведения экзамена. Оценки выставляются по 100-бальной шкале. Важно понимать, что полученный на ЕГЭ балл не является процентным выражением числа верных ответов от их максимально возможного значения. Результаты ЕГЭ рассчитываются по специальной методике, учитывающей трудности используемых заданий и частоту верных ответов на них. Величина трудности каждого задания определяется в свою очередь после того, как обработаются первичные результаты ЕГЭ.

После объявления результатов ЕГЭ по каждому экзамену Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки утверждает соответствие между оценками по 100-балльной шкале и отметками по 5-ти балльной шкале.

В конце июня в регионы поступают из Москвы свидетельства с результатами участниками ЕГЭ по каждому предмету. В школах должны заранее объявить о дате выдачи свидетельств.

К этому времени выпускники, как правило, уже получили аттестаты зрелости, во вкладыши к которым вписаны оценки итоговой аттестации по предметам. Администрация школ использует для этого поступившие в регионы протоколы с результатами ЕГЭ каждого выпускника.

Выпускники получают свидетельства с результатами ЕГЭ и предъявляют их в приемные комиссии тех вузов, в которые будут поступать.

Вузы имеют право перепроверить результаты ЕГЭ, отраженные в свидетельствах. Для этого они могут обратиться к Федеральной базе свидетельств (ФБС), в которой хранятся все результаты участников ЕГЭ. В случае расхождений результатов приоритет будут иметь данные из ФБС.

Лица, поступающие в вузы, но окончившие школу в прошлые годы, могут также принять участие в ЕГЭ. Для этого они должны обратиться в муниципальный орган управления образованием по месту жительства. Им будет назначен пункт проведения ЕГЭ.

Разумеется, все вышеописанное не может заменить полное описание инструкций и правил проведения ЕГЭ. Много вопросов здесь даже не затронуто, в том числе такой важный вопрос, как подача и рассмотрение апелляций по процедуре и результатам ЕГЭ.

Подробнее с инструктивными материалами ЕГЭ можно ознакомиться на сайтах www.rustest.ru и www.ege.edu.ru .

Надеемся, что приведенная здесь информация поможет Вам лучше представить процедуру ЕГЭ и получить в итоге более высокие результаты.

СПЕЦИФИКАЦИЯ
экзаменационной работы по математике единого государственного экзамена 2007 года

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) призван заменить собой два экзамена – выпускной за среднюю школу и вступительный в высшие учебные заведения (вузы). В связи с этим в рамках ЕГЭ осуществляется проверка овладения материалом курса алгебры и начал анализа 10-11 классов, усвоение которого проверяется на выпускном экзамене за среднюю школу, а также материалом некоторых тем курсов алгебры основной школы и геометрии основной и средней школы, которые традиционно контролируются на вступительных экзаменах в вузы. При этом в содержание проверки включаются только те вопросы, которые входят в основной нормативный документ – **минимум содержания основной и средней школы по математике.**

1. **Назначение экзаменационной работы** – оценить общеобразовательную подготовку по математике выпускников XI (XII) классов общеобразовательных учреждений с целью итоговой аттестации и зачисления в ссузы и вузы.

2. **Документы, определяющие содержание экзаменационной работы:**
   - Обязательный минимум содержания основного общего образования по предмету (Приказ Минобразования России № 1276 от 19.05.1998 г.);
   - Обязательный минимум содержания среднего (полного) общего образования по предмету (Приказ Минобразования России № 56 от 30.06.1999 г.);
   - Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика (Приказ Минобразования России № 1089 от 05.03.2004 г.).

   Кроме нормативных документов, учитываются также требования к подготовке выпускников основной и средней (полной) школы, представленные в рекомендованных Минобразования и науки РФ документах:
   - Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев: Математика. 5-11 кл./ Сост. Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк. – М.: Дрофа, 2000, 2002.
   - Примерные программы вступительных экзаменов (испытаний) в высшие учебные заведения Российской Федерации / Автор-составитель Г.В. Арсеньев и др. – М.: Высш. шк., 2000.
   - Оценка качества подготовки выпускников основной школы по математике / Г.В. Дорофеев и др. – М.: Дрофа, 2000.

– Оценка качества подготовки выпускников средней (полной) школы по математике/ Г.В. Дорофеев и др. – М.: Дрофа, 2002.
– Дорофеев Г.В., Муравин Г.К., Седова Е.А. Математика. Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс: Пособие. – 3-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2000. – 160 с.

3. Условия применения

Работа рассчитана на выпускников средних общеобразовательных учреждений (школ, гимназий, лицеев), изучивших курс математики, отвечающий обязательному минимуму содержания среднего (полного) общего образования по математике в объеме курса В.

4. Структура экзаменационной работы

Структура работы отвечает двоякой цели ЕГЭ – обеспечивать аттестацию выпускников и их отбор в вузы. Работа состоит из 3 частей, которые различаются по назначению, а также по содержанию, сложности, числу и форме включаемых в них заданий.

По сравнению с 2006 годом в структуру работы, назначение частей, число и типы используемых в них заданий не внесено никаких изменений.

В приведенной ниже Таблице 1 представлена информация о структуре, общем числе, сложности и типах заданий в вариантах КИМ 2007 года.

Таблица 1

Структура вариантов КИМ– 2007

	Часть 1	**Часть 2**	**Часть 3**
Общее число заданий – 26	**13**	**10**	**3**
Тип заданий и форма ответа	**А1 – А10** с выбором ответа (из четырех предложенных) **В1 – В3** с кратким ответом (в виде целого числа или числа, записанного в виде десятичной дроби)	**В4 – В11** с кратким ответом (в виде целого числа или числа, записанного в виде десятичной дроби) **С1, С2** с развернутым ответом (запись решения)	**С3 – С5** с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий)

Уровень сложности	Базовый	Повышенный	Высокий
Проверяемый учебный материал курсов математики	Алгебра и начала анализа 10-11 классов	1. Математика 5-6 классов 2. Алгебра 7-9 классов 3. Алгебра и начала анализа 10-11 классов 4. Геометрия 7-11 классов	1. Математика 5-6 классов 2. Алгебра 7-9 классов 3. Алгебра и начала анализа 10-11 классов 4. Геометрия 7-11 классов

5. Характеристика заданий в трех частях работы

Часть 1 содержит 13 алгебраических заданий базового уровня (А1 – А10, В1 – В3), соответствующих минимуму содержания курса "Алгебра и начала анализа 10-11 классов" (**курс В**), обеспечивающих достаточную полноту проверки овладения соответствующим материалом. При выполнении этих заданий от учащегося требуется применить свои знания в знакомой ситуации.

Часть 2 включает 10 заданий повышенного (по сравнению с базовым) уровня (В4 – В11, С1, С2), при решении которых от учащегося требуется применить свои знания в измененной ситуации, используя при этом методы, известные ему из школьного курса. Содержание этих заданий отвечает как минимуму содержания средней (полной) школы, так и содержанию, предлагаемому на вступительных экзаменах в вузы. Поэтому в эту часть работы включаются задания как по курсу алгебры и начал анализа 10-11 классов, так и по некоторым вопросам курса математики основной школы и по курсу геометрии основной и средней (полной) школы.

Часть 3 включает три самых сложных задачи (две – алгебраических и одну – геометрическую), при решении которых учащимся надо применять свои знания в новой для них ситуации. При этом от учащихся потребуется проанализировать ситуацию, самостоятельно разработать ее математическую модель и способ решения, привести обоснования, доказательства выполненных действий и математически грамотно записать полученное решение. Эти задания можно сравнить с наиболее сложными заданиями традиционных письменных экзаменационных работ по курсу алгебры и начал анализа, предлагаемых в последние годы Министерством образования и науки РФ на выпускных экзаменах в общеобразовательной средней (полной) школе, а также со сложными алгебраическими и геометрическими заданиями, предлагаемыми на вступительных экзаменах в большинстве вузов.

Результаты выполнения заданий Части 1 позволяют судить о достижении выпускником уровня обязательной подготовки по курсу алгебры и начал анализа 10-11 классов, наличие которой принято оценивать положительной отметкой «3». Результаты выполнения заданий Частей 2 и 3 позволяют осуществить последующую, более тонкую дифференциацию учащихся по уровню математической подготовки и на этой основе выставить более высокие аттестационные отметки («4» и «5»).

В работе используются три типа заданий: с выбором ответа из четырех предложенных вариантов, с кратким ответом в виде некоторого целого числа или десятичной дроби, с развернутым ответом, требующим записи решения поставленной задачи.

В Часть 1 включены два типа заданий: с выбором ответа (А1 – А10) и с кратким ответом (В1 – В3). В Часть 2 также включены два типа заданий: с кратким ответом (В4 – В11) и с развернутым ответом (С1, С2). В Часть 3 включены задания только с развернутым ответом (С3 – С5).

Распределение типов заданий в работе представлено в Таблице 2.

Таблица 2

Распределение типов заданий по частям работы

N	Тип заданий	Число заданий	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за задания данного типа от максимального первичного балла за всю работу, равного 37
1	с выбором ответа	10	10x1 = 10	27%
2	с кратким ответом	11	11 x1= 11	30%
3	с развернутым ответом	5	2x2 +3x4=16	43%
		26	37	(100%)

6. Распределение заданий экзаменационной работы по содержанию

Назначение единого государственного экзамена определяет специфику содержания экзаменационной работы. Аттестация выпускников школы по курсу алгебры и начал анализа 10-11 классов и требования вступительных экзаменов в вузы обусловливают необходимость включения в работу достаточно представительного числа алгебраических заданий, отвечающих материалу, изучаемому в данном курсе. Кроме того, требования вступительных экзаменов в вузы определяют необходимость включения в работу алгебраических заданий, составленных на материале некоторых разделов курса алгебры основной школы, а также геометрических заданий по материалу курсов геометрии основной и средней (полной) школы. То есть проверке подлежит материал всех блоков, по которым распределено содержание школьного курса математики: «Выражения и преобразования», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Числа и вычисления», «Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин». При этом в соответствии со спецификой математики основное внимание уделяется проверке овладения практической составляющей школьного курса, когда владение теоретическими фактами проверяется опосредованно, но наряду с этим осуществляется и непосредственная проверка овладения его теоретической составляющей (например, овладение смыслом изучаемых основных математических понятий).

Соотношение между числом алгебраических и геометрических заданий в работе примерно отвечает соотношению, принятому на вступительных экзаменах в вузы. Отражение в варианте работы содержания трех первых блоков («Выражения и преобразования», «Уравнения и неравенства», «Функции») отвечает особенностям и значимости материала, включенного в эти блоки. Небольшое число заданий, составленных на материале блока «Числа и вычисления», объясняется тем, что овладение этим материалом проверяется также при выполнении заданий, составленных на материале трех первых блоков.

Распределение заданий работы по основным блокам содержания приведено в таблице 3.

Таблица 3

Распределение заданий по основным блокам содержания школьного курса математики

Блоки содержания	Число заданий	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за задания данного блока содержания от максимального первичного балла за всю работу, равного 37
Выражения и преобразования	5	5	14%
Уравнения и неравенства	9	16	43%
Функции	8	9	24%
Числа и вычисления	1	1	3%
Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин	3	6	16%
Итого	26	37	100%

7. Распределение заданий работы по уровню сложности

В соответствии с принятой структурой и содержанием работы Часть 1 включает 13 алгебраических заданий, составленных на материале курса алгебры и начал анализа 10-11 классов и соответствующих уровню базовой подготовки (курс В). Задания посильны для учащихся, подготовка которых отвечает этому уровню.

Часть 2 включает 10 заданий повышенного уровня сложности, 8 из которых – алгебраические и 2 – геометрические (одно – по планиметрии и другое – по стереометрии). Они составлены на материале, предлагаемом как на выпускном экзамене в школе, так и на вступительных экзаменах в вузы, и отвечают минимуму содержания основной и средней (полной) школы. При их выполнении от учащихся требуется применить в несколько измененной ситуации знание конкретных математических методов, известных им из школьного курса.

Часть 3 включает 3 задания высокого уровня сложности. Два задания – алгебраические. При их выполнении выпускники должны разработать способ решения, используя в новой ситуации знания из различных разделов курса алгебры и начал анализа 10-11 классов, записать обоснованное решение. Третье задание – стереометрическая задача на комбинацию геометрических тел, при решении которой выпускники должны в новой ситуации применить знания из разных разделов курса геометрии основной и средней школы, построить чертеж, привести аргументированное решение. С целью обеспечения более тонкой дифференциации учащихся, имеющих высокий уровень математической подготовки, в эту часть включены задания различной сложности.

В следующих таблицах 4 и 5 дается распределение заданий работы по видам деятельности и уровню сложности.

Таблица 4

Распределение заданий по видам деятельности

Виды деятельности	Число заданий	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за задания данного вида деятельности от максимального первичного балла за всю работу, равного 37
Знать и понимать	5	5	14%
Применять знания и умения в знакомой ситуации	10	10	27%
Применять знания и умения в измененной ситуации	8	10	27%
Применять знания и умения в новой ситуации	3	12	32%
Итого	26	37	100%

Таблица 5

Распределение заданий работы по уровню сложности

Уровень сложности заданий	Число заданий	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за задания данного уровня сложности от максимального первичного балла за всю работу, равного 37
Базовый	13	13	36%
Повышенный	10	12	32%
Высокий	3	12	32%
Итого	26	37	100%

В Таблице 6 приводится число и уровень трудности алгебраических заданий, на основе выполнения которых выставляется аттестационная отметка по курсу алгебры и начал анализа 10-11 классов.

Таблица 6

Распределение по уровню сложности заданий, на основе которых проводится аттестация по курсу алгебры и начал анализа

Уровень сложности заданий	Число зад.	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за задания данного уровня сложности от максимального первичного балла за задания по курсу алгебры и начал анализа, равного 30
Базовый	13	13	43%
Повышенный	7	9	30%
Высокий	2	8	27%
Итого	22	30	100%

8. Время выполнения работы

На выполнение экзаменационной работы отводится 240 минут (4 часа). Часть 1 включает 13 заданий с выбором ответа базового уровня сложности. Эти задания составляют самую легкую часть работы. На их выполнение ориентировочно отводится 40 минут. Часть 2 содержит 10 заданий повышенного уровня сложности, на два из которых требуется записать решение. Эти задания доступны для более подготовленных учащихся. Ориентировочное время их выполнения – 90 минут. Часть 3 содержит 3 задания высокого уровня сложности, которые рассчитаны на самых подготовленных выпускников. На выполнение этих заданий отводится ориентировочно 110 минут.

9. План экзаменационной работы

Варианты экзаменационной работы 2007 г. составляются на основе нескольких планов, которые являются вариантами общего плана (см. Приложение 1).

Параллельность вариантов обеспечивается на этапе разработки экзаменационной работы и достигается за счет:

- отбора в каждую из трех частей работы заданий, содержание, уровень сложности и тип которых определяются планом работы;
- включения взаимозаменяемых, однотипных, примерно одинаковых по тематике и уровню сложности заданий, расположенных на одних и тех же местах в вариантах работы, составленных по одному и тому же плану.

10. Система оценивания выполнения отдельных заданий и работы в целом

Ответы на задания с выбором ответа (А) и кратким ответом (В) автоматически обрабатываются после сканирования бланков ответов №1.

Ответы к заданиям с развернутым ответом, включенным в Части 2 и 3, проверяются экспертной комиссией, в состав которой входят работники вузов, методисты и опытные учителя.

Задание с выбором ответа считается выполненным верно, если в «Бланке ответов № 1» отмечена цифра, которой обозначен верный ответ на данное задание. Задание с кратким ответом (в виде некоторого целого числа или конечной десятичной дроби) считается выполненным верно, если в «Бланке ответов № 1» записано именно это число. За верное выполнение задания с выбором ответа и задания с кратким ответом выставляется 1 балл.

Однозначность и объективность оценки выполнения заданий с развернутым ответом обеспечивается соответствующими рекомендациями для экспертов. Для этого разработаны общие критерии оценки их выполнения. Затем на их основе для каждого задания разрабатываются конкретные критерии, оценивающие полноту и правильность ответа именно на данное задание. В зависимости от полноты и правильности ответа за выполнение задания повышенного уровня с развернутым ответом выставляется от 0 до 2 баллов максимально, за задание высокого уровня – от 0 до 4 баллов.

Таким образом, за верное выполнение всех заданий работы можно максимально получить 37 первичных баллов (13 заданий из Части 1 – 13 баллов, 10 заданий Части 2 – 12 баллов, 3 задания Части 3 – 12 баллов).

Оценка результатов выполнения работы с целью аттестации выпускников школы и зачисления в вузы проводится раздельно.

Тестовый балл – оценка общей математической подготовки, которая фиксируется в свидетельстве для поступления в вузы, подсчитывается по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, выставленных за выполнение всех заданий работы.

Аттестационная отметка выпускника школы за освоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов определяется по 5-балльной шкале. Она выставляется на основе первичных баллов, выставленных за выполнение 22 заданий, составленных на материале этого курса, при этом не учитывается выполнение 4 оставшихся заданий, составленных на материале курса алгебры основной школы (см. в Приложении 1 задание В9), курсов геометрии основной и средней школы (см. задания В10, В11 и С4).

11. Дополнительные материалы и оборудование

Не используются. Использование калькуляторов не разрешается.

12. Условия проведения экзамена (требования к специалистам)

На экзамене в аудиторию не допускаются специалисты по предмету (математике), по которому проводится экзамен. Использование единой инструкции по проведению экзамена позволяет обеспечить соблюдение единых условий без привлечения лиц со специальным образованием по данному предмету.

Проверку экзаменационных работ (заданий с развернутым ответом) осуществляют специалисты по математике, прошедшие специальную подготовку для проверки заданий ЕГЭ 2007 года в соответствии с Методическими рекомендациями по оцениванию заданий с развернутыми ответами, подготовленными ФИПИ.

13. Рекомендации по подготовке к экзамену

К экзамену можно готовиться по учебникам, включенным в «Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях». Перечень учебников размещён на сайте Министерства образования и науки Российской Федерации (www.edu.ru) в разделе «Документы министерства».

ФИПИ рекомендует также использовать пособия, имеющие гриф ФИПИ, и пособия, подготовленные авторскими коллективами ФИПИ в рамках совместных проектов с издательствами. Информация об этих изданиях оперативно размещается на сайте www.fipi.ru в разделе «Экспертный совет ФИПИ».

14. Изменения в вариантах КИМ в 2007 г. по сравнению с 2006 г.

Структура работы, назначение каждой из ее трех частей, число и типы используемых в них заданий, время на выполнение остались без изменения.

Приложение

План экзаменационной работы ЕГЭ 2007 года по математике

Обозначение заданий в работе и бланке ответов:

А – задания с выбором ответа, В – задания с кратким ответом, С – задания с развернутым ответом.

Уровни сложности задания:

Б – базовый (примерный интервал выполнения большинства заданий – 50%-90%), П – повышенный (10%-50%), В – высокий (менее 10%).

Порядок следования заданий в КИМ может быть изменен в разных вариантах.

№ п/п	Обозначение задания в работе	Проверяемые элементы содержания	Коды проверяемых элементов содержания по кодификатору	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания (мин)
		Часть 1				
1	А1	Владение понятием степени с рациональным показателем, умение выполнять тождественные преобразования и находить их значения	1.2.1 1.2.2	Б	1	3
2	А2	Умение выполнять тождественные преобразования с корнями и находить их значение	1.1.2	Б	1	3
3	А3	Умение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений	1.3.2	Б	1	3
4	А4	Умение читать свойства функции по графику и распознавать графики элементарных функций	3.1.11	Б	1	3
5	А5	Умение находить производную функции	3.2	Б	1	3

6.	A6	Умение находить множество значений функции	3.1.2	Б	1	3
7	A7	Умение использовать график функции при решении неравенств (графический метод решения неравенств)	2.6.4	Б	1	2
8	A8	Умение находить область определения сложной функции	3.1.13	Б	1	3
9	A9	Умение решать неравенства с одной переменной на основе свойств функции	2.6	Б	1	3
10	A10	Умение применять общие приёмы решения уравнений	2.3	Б	1	3
11	B1	Умение решать уравнения с использованием равносильности уравнений	2.2	Б	1	4
12	B2	Умение выполнять тождественные преобразования выражений и находить их значение	1.2.3; 1.3.4; 1.4.6	Б	1	4
13	B3	Умение применять общие приемы решения уравнений	2.3	Б	1	4
		Часть 2				
14	B4	Умение решать системы уравнений, содержащих одно или два показательных уравнения (логарифмических, иррациональных, тригонометрических)	2.5	П	1	5
15	B5	Умение применять геометрический смысл производной	.3.2.3	П	1	5
16	B6	Умение выполнять тождественные преобразования выражений и находить их значение	1.1; 1.2; 1.3	П	1	4
17	B7	Умение использовать несколько приёмов при решении уравнений	2.4.2	П	1	6
18	B8	Умение использовать свойство периодичности функции для решения задач	3.1.4	П	1	5

19	B9	Умение решать текстовую задачу, составляя математическую модель предложенной в ней ситуации	4.3*[1]	П	1	9
20	B10	Умение решать стереометрические задачи	5.5*–5.6*	П	1	11
21	B11	Умение решать планиметрические задачи	5.1–5.3*	П	1	15
22	C1	Умение исследовать свойства сложной функции	3.1.13	П	2	15
23	C2	Умение использовать несколько приёмов при решении уравнений	2.4.2	П	2	15
		Часть 3				
24	C3	Умение решать неравенства с параметром	2.6.6	В	4	30
25	C4	Умение решать стереометрическую задачу на комбинацию геометрических тел (многогранников и тел вращения)	5.7*	В	4	40
26	C5	Умение решать и проводить исследование решения системы, содержащей уравнения разного вида	2.5.6	В	4	40
	А-10 **В-11** **С-5**			**Б-13** **П-10** **В- 3**	**37**	**240**

[1] – Знак * указан для заданий, которые составлены на материале курса алгебры основной школы или курса геометрии основной и средней (полной) школы.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (А1 – А10, В1 – В3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов. К каждому заданию А1 – А10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям В1 – В3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (В4 – В11, С1, С2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям В4 – В11 надо дать краткий ответ, к заданиям С1 и С2 – записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два – алгебраических (С3, С5) и одно – геометрическое (С4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение <u>четырех</u> заданий (В9, В10, В11, С4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой.

Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 1

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1 Найдите значение выражения $(-12)\cdot\left(\frac{8}{3}-4^{1,5}\right)$.

1) – 128 2) 64 3) 84 4) – 84

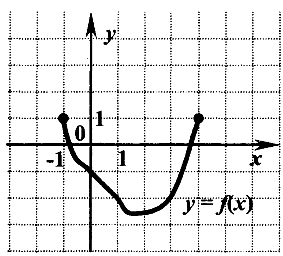
А2 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[4]{40}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{10}}$.

1) 1 2) 2 3) 5 4) 4

А3 Найдите значение $3^{\log_3 8\cdot\log_4 a}$, если $\log_a 64=3$.

1) 8 2) 9 3) 27 4) 4

А4 Функция $y=f(x)$, имеющая период $T=5$, задана графиком на промежутке $[-1;4]$. Найдите значение этой функции при $x = 11$.



1) – 2 2) – 1
3) 0 4) 1

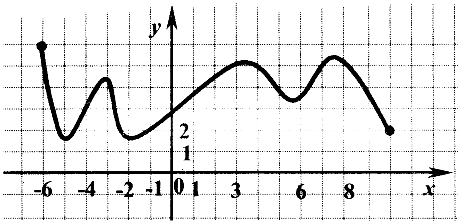
А5 Найдите значение производной функции $y=\sin(3x+7)-\cos(3\pi+7)$ в точке $x_0=0$.

1) $3\cos 7$ 2) $3\cos 7+3\sin 7$
3) $3\cos 7-3\sin 7$ 4) $3\sin 7$

А6 Найдите множество значений функции $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

1) $(0;+\infty)$ 2) $(0;5]$ 3) $(0;1]$ 4) $(-\infty;+\infty)$

А7 Функция $y=f(x)$ задана на промежутке $[-6;10]$. Укажите число решений уравнения $f(x)=3$.



1) 1 2) 3
3) 5 4) 6

А8 Найдите число точек разрыва функции $y=\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{-1}$ принадлежащих отрезку $[0;2\pi]$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

А9 Найдите число целых решений неравенства
$\sqrt[3]{x^2-9x+18}\cdot\left(x^3-25x\right)^{1/3}\le 0$.

1) 2 2) 4 3) 5 4) 3

А10 Найдите все решения уравнения $2\,\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\mathrm{tg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1) $\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$ 2) $\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$

3) $-\dfrac{\pi}{8}+\pi n, n\in Z$ 4) $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$

Ответом на задания B1–B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $3^x - 27 = \left|3^x - 27\right| \log_2 \dfrac{3x+12}{2x+5}$.

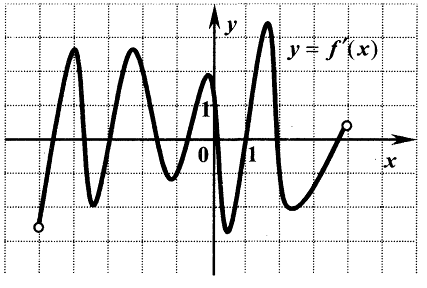
B2 Вычислите $\sqrt[3]{156\sqrt{2} - 104\sqrt{11}} \cdot \sqrt[6]{62 + 12\sqrt{22}} \cdot \sqrt[6]{169}$.

B3 Найдите корень (или сумму действительных, различных корней, если их несколько) уравнения $\left(5x^2 - 7x + 3\right) \cdot \left(5x^2 + x + 3\right) = 20x^2$.

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите сумму всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы $\begin{cases} 4^{x-2y} = 2^{x+y}, \\ 9^{\log_3 \sqrt{x}} = y + 3. \end{cases}$

B5 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. Найдите число точек, в которых тангенс угла наклона касательной к этой функции равен 2.



B6 Найти значение выражения

$$\frac{5\cdot\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{7\cdot\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}+\frac{\sqrt{8-4x^2+4x}}{\sqrt{2+x-x^2}}.$$

B7 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\log_{36}\left(x^2-2x+1\right)+\log_{36}\left(x^2+8x+16\right)=1$.

B8 Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых наименьший, положительный период функции $y=\sin\left((5a-13)x\right)$ равен $\frac{\pi}{2}$.

***B9** Водитель проехал первый из трех кругов гонки со скоростью, на 19,8 меньше запланированной. Для того, чтобы приехать в запланированное время, он на каждом из последующих двух кругов увеличивал фактическую скорость на 15%. Определите запланированную скорость водителя.

***B10** Основанием пирамиды FABC является правильный треугольник ABC со стороной 12. Боковое ребро FA длиною $15\sqrt{6}$ перпендикулярно основанию. Найдите расстояние между прямыми FB и AC.

***B11** Дан параллелограмм ABCD. Высота BH пересекает диагональ AC в точке K. Найдите длину отрезка BK, если $AB=50$, $BC=40$ и $AC=10\sqrt{73}$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите в точке экстремума функции

$y=4^{\log_4\frac{x^3-3x^2-9x+31}{x^2-4}-\log_{0,25}\left(x^2-4\right)}$ значение этой функции (или сумму соответствующих значений функции, если у нее несколько точек экстремума).

C2 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения

$$\sqrt{1-2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\left(\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{33-x}+7\right)-x-2\right)=0.$$

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3 Найдите число целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $(a-1)x^2 \le (3a+2)x+10a$ содержит все члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии с первым членом, равным -8, и разностью, меньше или равной 6.

***С4** Сторона основания первой правильной треугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Вершина второй правильной треугольной пирамиды находится в центре основания первой. Вершины основания второй пирамиды расположены на трех ребрах одной из боковых граней первой пирамиды, причем одна из них – в середине основания. Найдите радиус окружности, описанной вокруг основания второй пирамиды.

С5 Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} \pi^2 y^2 + 12x^2 = 8\pi xy, \\ y^2 = y(\cos 2x - \sin x) + \sin x \cos 2x. \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 2

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1 Найдите значение $x+y$, если равенство $\dfrac{\sqrt[8]{a^{-32}b^{-4}}}{\sqrt[5]{a^{-18}\sqrt{a^6b^{15}}}}=a^xb^y$ выполнено для всех положительных a и b.

1) 0 2) 2 3) – 3 4) – 4

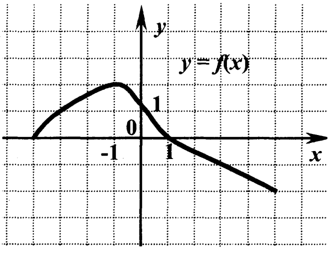
А2 Найдите значение выражения $\dfrac{a^{1,5}+8b^{1,5}}{a-2a^{1/2}b^{1/2}+4b}-3b^{1/2}$, если $a=4$, $b=25$.

1) 2 2) – 2 3) 3 4) – 3

А3 Выразите величину $\log_{24}6,75n^b$ через значения a и b, если $\log_n 2=a$ и $\log_n 3=b$.

1) $\dfrac{4b-3a}{a+2b}$ 2) $\dfrac{3b-2a}{3a+b}$ 3) $\dfrac{3b-2a}{a+2b}$ 4) $\dfrac{4b-2a}{3a+b}$

А4 Функция $y=f(x)$ задана графиком. Укажите множество значений этой функции.



1) $[-5;4]$
2) $[-5;5]$
3) $[-2;0)\cup(0;2]$
4) $[-2;2]$

A5 Найдите значение производной функции $y=\dfrac{4x^2-27}{x}$ в точке $x_0=-3$.

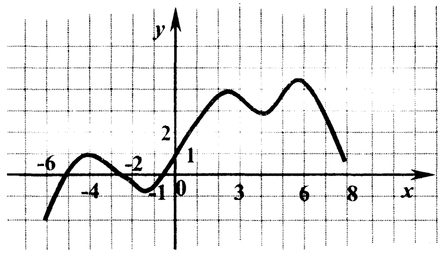
1) 7 2) – 5 3) 1 4) 13

A6 Найдите множество значений функции $y=8^{-2-4x-x^2}$.

1) $(0;32]$ 2) $(0;64]$ 3) $[0;32]$ 4) $(-\infty;+\infty)$

A7 Функция $y=f(x)$ определена графиком. Найдите число целых решений неравенства $f(x)>2$.

1) 9 2) 7
3) 5 4) 3



A8 Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\ln\left(\lg\left(\dfrac{6}{|x-1|}\right)\right)$.

1) 10 2) 12 3) 14 4) 16

A9 Найдите решение неравенства $\dfrac{x^2(x+6)}{(3-x)^2}\le 0$.

1) $(-\infty;-6]\cup[0;3)$ 2) $[-6;3]$
3) $[-6;0]\cup(3;+\infty)$ 4) $(-\infty;-6]\cup\{0\}$

A10 Найдите сумму корней уравнения $\left(x^2-16\right)^4\cdot\sqrt{-4x-5}=0$.

1) – 5,25 2) 4 3) 2,75 4) – 1,25

Ответом на задания В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1 Найдите наименьший корень уравнения $\operatorname{tg}\frac{9\pi x}{8} - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{8} = 0$, лежащий на интервале $(-21; 0)$.

В2 Найдите значение выражения $\left(\frac{\operatorname{tg}^2 49° - \operatorname{tg}^2 11°}{1 - \operatorname{tg}^2 49° \operatorname{tg}^2 11°} \cdot \operatorname{tg} 52°\right)^4$.

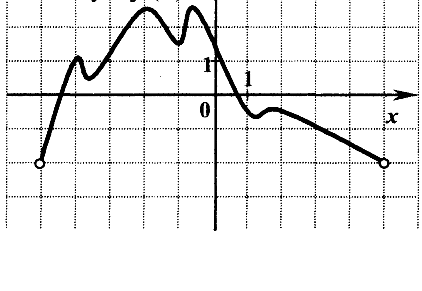
В3 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45} = 5x^2 - x^3 + 9x - 45$.

ЧАСТЬ 2

В4 Найдите сумму всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы

$$\begin{cases} 3x - 8y - 24 = \sqrt{4y^2 - 12xy + 9x^2}, \\ 2{,}6x - y + 1{,}2 = 0. \end{cases}$$

В5 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. Найдите число точек экстремума этой функции.



B6 Найти значение выражения

$$\frac{\left|\log_{0,2}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right)\right|}{\log_{0,2}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right)}+\frac{3\cdot\left|3\sqrt{7}-2\sqrt{13}\right|}{3\sqrt{7}-2\sqrt{13}}+\frac{9\cdot\left|\arccos(-0,3)-\frac{\pi}{2}\right|}{\arccos(-0,3)-\frac{\pi}{2}}.$$

B7 Найдите число корней уравнения $\sqrt{\cos 4\pi x-1}=15x+4x^2-4x^3$.

B8 Найдите наименьший, положительный период функции $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}$.

***B9** Известно, что произведение суммы цифр двузначного числа на разность этих цифр равно 48. Найдите это двузначное число (или сумму таких двузначных чисел, если их несколько).

***B10** В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 3 и высотой $2\sqrt{2}$ точка E лежит на ребре AD таким образом, что CE является биссектрисой треугольника ACD. Найдите расстояние от точки E до плоскости B_1CD_1.

***B11** В треугольник ABC вписана окружность радиуса 2, которая делит отрезок AC на части с длинами 5 и 4. Найдите площадь треугольника ABC.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите наименьшее целое значение функции $y=2\cdot\left(\sqrt{4x+19}-\sqrt{2x-3}\right)$.

C2 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения

$$\sqrt{\log_{\sqrt[4]{\frac{3}{2}}}\left(\frac{x^2-3x-4}{x+9}\right)}=-2\log_{\sqrt[4]{\frac{2}{3}}}\left(\frac{2{,}6}{x-4}-\frac{1{,}6}{x+1}\right)-6.$$

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3 Найдите длину промежутка значений параметра a или сумму длин таких промежутков, если их несколько, при которых в решении неравенства $5-\frac{ax-43}{x}\geq 0$ есть хотя бы одно натуральное трехзначное число, но нет ни одного натурального четырехзначного числа.

***C4** Основанием пирамиды FABC является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=3$, $\sin\angle BAC=\frac{1}{\sqrt{5}-1}$. Ребро AF перпендикулярно ABC и равно $7+3\sqrt{5}$. Точки L, M и N расположены соответственно на ребрах FC, AC и AF, а точка P лежит на ребре AB. При этом $\frac{CL}{LF}=\frac{LF}{CF}$, $\frac{AM}{MC}=\frac{MC}{AC}$, $\frac{FN}{NA}=\frac{NA}{FA}$ и $\frac{BP}{PF}=\frac{PF}{BF}$. Найдите объем пирамиды LMNP.

C5 Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} xy+6\cos x+\dfrac{20\cos x}{x}=3y+\dfrac{10y}{x}+2x\cos x, \\ \dfrac{x+y-6}{|x|}+6\log_{0{,}5y}2=(x+y)\log_{0{,}5y}2. \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 3

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1 Упростите выражение $a^{-2,5} : a^{-3\frac{1}{4}} \cdot a^{1,25}$.

1) 1 2) a 3) a^2 4) a^3

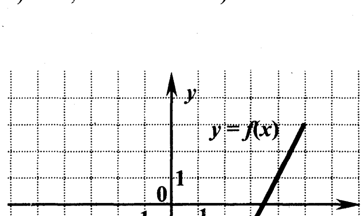
А2 Упростите $f^2(x)-9$, если $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$.

1) $\dfrac{-18}{x+3}$ 2) $\dfrac{-27}{x+3}$ 3) $\dfrac{-9}{x+1}$ 4) 0

А3 Найдите значение $\log_4(8a)$, если $\log_{2a} 0,25 = 2$.

1) – 1 2) 0,5 3) – 0,5 4) 2

А4 Функция $y=f(x)$ задана графиком. Укажите число промежутков возрастания этой функции.



1) 1 2) 2
3) 3 4) 4

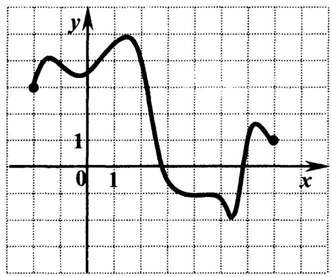
A5 Найдите значение производной функции $y=\sin(5x+2)+\cos(5x+2)$ в точке $x_0=-1$.

1) $\cos 3-\sin 3$ 2) $\cos 3+\sin 3$
3) $5\cos 3-5\sin 3$ 4) $5\cos 3+5\sin 3$

A6 Найдите число целых значений функции $y=6{,}6\cdot\arccos x+1{,}6\cdot\arcsin x$.

1) 16 2) 17 3) 18 4) 19

A7 Функция $y=f(x)$ определена графиком на промежутке $[-2;7]$. Найдите число целых решений двойного неравенства $0<f(x)<3$.



1) 1 2) 2
3) 4 4) 6

A8 Найдите область определения функции $y=\sqrt{16-\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3x}}$.

1) $(-\infty;4]$ 2) $(-\infty;3]$ 3) $[4;+\infty)$ 4) $[3;+\infty)$

A9 Найдите число целых решений неравенства $\sqrt{\cos\frac{\pi x}{2}}\le 0$ на отрезке $[0;5]$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

A10 Найдите число корней уравнения $\operatorname{ctg}2x=\operatorname{ctg}5x$, принадлежащих промежутку $[-4;4]$.

1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

Ответом на задания В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1 Определите число корней уравнения
$\left(3\cos^2 2x-4\sin 2x-3\right)\sqrt{24-x^2}=0$.

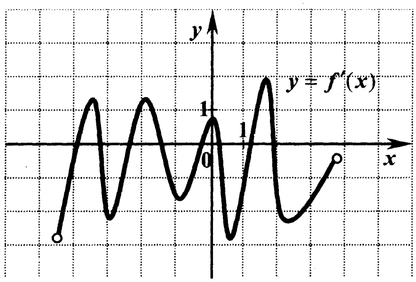
В2 Вычислите $\log_{\sqrt{2}}\left(9+\sqrt[3]{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{47+12\sqrt{15}}\cdot\sqrt[3]{49}\right)$.

В3 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения
$\left(\sqrt{x-1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+3\right)=3x-6$.

ЧАСТЬ 2

В4 Найдите сумму всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы $\begin{cases}\sqrt{5y-3x}=\sqrt{2x-3y},\\ |x|+y-3=0.\end{cases}$

В5 На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$. Найдите число промежутков возрастания этой функции.



В6 Вычислите $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-5\right)^2}+\sqrt{33+20\sqrt{2}}$.

B7 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $0{,}5\cdot\left(4+\log_2\left(2x^2+7x+6\right)\right)=1-7x-2x^2$.

B8 Найдите значение функции $g(4)$, если известно, что $f(2x-1)=x-3$ и $f\left(g(x)\right)=2x-5$.

***B9** Задана арифметическая прогрессия с первым членом 3 и разностью 4, а также другая арифметическая прогрессия с первым членом 4 и разностью 5. Найдите сумму первых 11 совпадающих членов этих арифметических прогрессий.

***B10** В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен 8.

***B11** Радиусы вписанной и описанной около прямоугольного треугольника окружностей равны соответственно 3 и 11. Найдите площадь треугольника.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите наименьшее из возможных значений величины $\frac{x+y}{2}$, если известно, что числа $x-3y$, $2y+1$ и 40 являются последовательными членами геометрической прогрессии.

C2 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-5}=\sqrt[6]{4x^2-52}-\sqrt[6]{\left(|x|-5\right)^2}$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3 Найдите целое значение параметра a (или сумму таких целых значений), при которых множество решений неравенства $x(2x-5)^2 \geq 5(5x-4a)+4ax$ содержит все члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии с первым членом, равным -1, и разностью, меньше или равной 2.

***С4** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt[3]{\pi}}$. Круг, вписанный в боковую грань, является основанием конуса, вершина которого совпадает с центром основания пирамиды. Найдите объем конуса.

С5 Найдите ординату точки (или произведение ординат, если точек несколько) на плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x^2 - xy = 2x + 3y + 15, \\ 0,25\log_2 \dfrac{x^3 - 3x^2 - 10x - 16}{y+2} = 1 - \log_{16}(3-x). \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 4

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1 Найдите значение выражения $\left(a^{-2,3}:a^{-3\frac{4}{5}}\right)^2$ при $a=3$.

1) 3 2) 9 3) 27 4) 81

A2 Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2-x}{\sqrt{x+2}-2}+\sqrt{x+2}\right)^2$, если $x=8,24$.

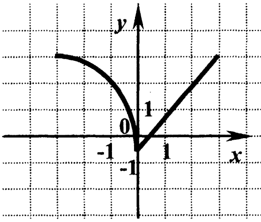
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

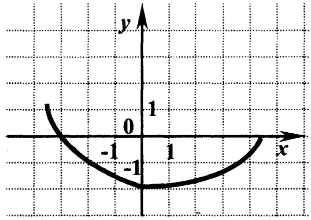
A3 Выразите число $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[5]{2,7}$ через a, если $\log_{0,01}9=a$.

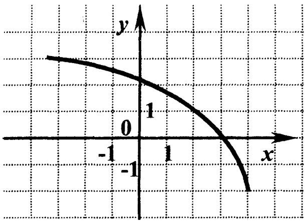
1) $0,4\left(9+a^{-1}\right)$ 2) $0,25(3+a)$

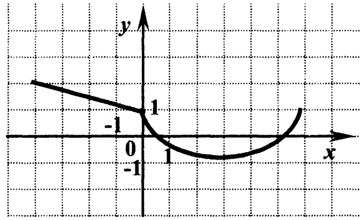
3) $0,4\left(3+a^{-1}\right)$ 4) $0,25\left(3+a^{-1}\right)$

A4 Укажите номер графика убывающей функции.

1) 

2) 

3) 

4) 

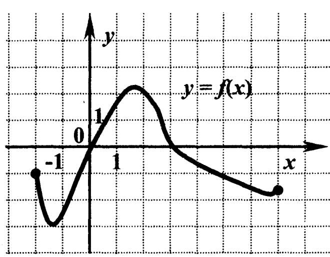
A5 Найдите значение производной функции $y = x \cdot \sin(2x+1)$ в точке $x_0 = -1$.

1) $-2\cos 1 - \sin 1$ 2) $2\cos 1 - \sin 1$
3) $-2\cos 1 + \sin 1$ 4) $-2\cos 1$

A6 Найдите множество значений функции $y = \sqrt{3x+41} - \sqrt{3x-8}$.

1) $(0; +\infty)$ 2) $[7; +\infty)$ 3) $\{7\}$ 4) $(0; 7]$

A7 Функция $y = f(x)$ определена графиком. Укажите промежуток, на котором она принимает только положительные значения.



1) $(0; 3)$ 2) $(3; 7)$
3) $(-2; 0)$ 4) $[-1; 4]$

A8 Найдите число целых значений из области определения функции $y=\log_{x^2+1}\left(9-x^2\right)$ таких, что $|x|\le 4$.

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

A9 Найдите число целых решений неравенства

$\frac{x^3-48x-2}{(x-2)^2(x-7)}\le\frac{1}{x^2-9x+14}$ на отрезке $[-10;10]$.

1) 7 2) 8 3) 9 4) 10

A10 Найдите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x+5{,}5)^3=18\log_2\sqrt[3]{2}$.

1) $(-\infty;-2)$ 2) $[-2;-1)$ 3) $[-1;0]$ 4) $(0;+\infty)$

Ответом на задания В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $(\cos 20\pi x-1)\lg\left(32x-20x^2-2\right)=0$.

B2 Найдите значение выражения $2{,}5\left(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

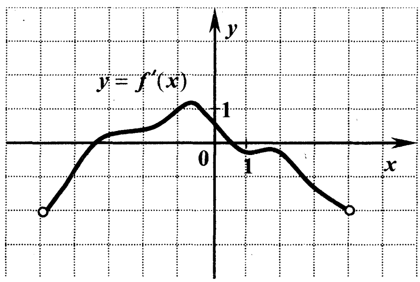
B3 Найдите корень, принадлежащий отрезку $[0{,}8; 4]$, (или произведение таких корней, если их несколько) уравнения

$$\sin(\pi x)\cdot \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{x}=0.$$

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите сумму всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы $\begin{cases} xy=36, \\ y-\log_2(8x)-4=0. \end{cases}$

B5 На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$. Найдите число точек минимума этой функции.



B6 Числа a и b выбраны таким образом, что верно равенство $\frac{6b}{a-b}-\frac{5a}{a+b}+2=0$. Найдите значение, которое при этом примет величина $\frac{a-b}{a+2b}$ (или сумму таких значений, если эта величина может принять несколько значений).

B7 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $3^x+63=72\log_2 x$.

B8 Найдите значение функции

$y=3f(-a)\cdot\left(f(a)-5g(-a)\right)+2\left(g(-a)\right)^2$, если известно, что функция $y=f(x)$ – четная, функция $y=g(x)$ – нечетная, $f(a)=-2$, $g(a)=-3$.

***B9** Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 3.

***B10** Основанием пирамиды FABC является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB = 15. Тангенс угла BAC равен $0{,}4\sqrt{5}$, а высота FA = 7,5. Найдите расстояние между прямыми FB и AC.

***B11** В прямоугольнике ABCD со сторонами AB = 10 и BC = 16,5 точка L является серединой AB. На стороне AD последовательно расположены точки M и N таким образом, что AM : MN : ND = 1 : 17 : 15. Найдите площадь треугольника MNP, где P – точка пересечения отрезков LN и CM.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите наибольшее целое значение функции
$y=\log_3\left(12x^2-x^3\right)+\log_3 x$.

C2 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\dfrac{\sqrt[3]{4+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x+4}}{4}=\dfrac{9}{4}\cdot\sqrt[3]{9x}$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3 Найдите длину промежутка (или наибольшую из длин таких промежутков, если их несколько) тех значений параметра a, при которых число целых решений неравенства $\left||x-4|-2x\right| \le a(x+6)$ не менее 2 и не более 14.

***C4** Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетами $AB = 4$ и $BC = 6$. Высота призмы равна 10. Найдите объем пирамиды с вершинами в точке C_1 и серединах ребер BC, BB_1 и A_1B_1.

C5 Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} \left|x^2 - 4\pi xy - 32\pi^2 y^2\right| + |y - \cos x| = 0, \\ \sqrt{4\pi - |x - 4\pi|} + \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{4\pi - |x - 4\pi|} + \sqrt{1 - y^2}. \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 5

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1 Вычислите $\left(\left(7\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$.

1) 1 2) 3 3) 9 4) 27

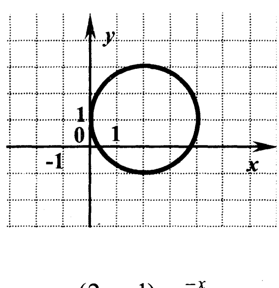
А2 Найдите значение выражения $a+b$, если $\sqrt{34-24\cdot\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$.

1) 1 2) 2 3) – 1 4) – 2

А3 Вычислите: $\log_3 0{,}09+2\log_3 10$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

А4 Укажите уравнение окружности, изображенной на рисунке.



1) $(x-2)^2+(y-2)^2=4$
2) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$
3) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
4) $(x-2)^2+(y-1)^2=2$

А5 Найдите значение производной функции $y=(2x-1)\cdot e^{-x}$ в точке $x_0=-1$.

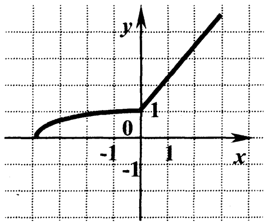
1) e 2) $4e$ 3) $5e$ 4) $6e$

A6 Найдите множество значений функции $y = 5\sin^2 x - \cos^2 x - 5$.

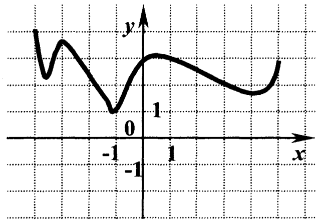
1) $[-2; 0]$ 2) $[-6; 0]$ 3) $[-1; 0]$ 4) $[-5; 0]$

A7 Решением неравенства $f(x) \le 1$ является единственная точка. Укажите рисунок, на котором изображен график этой функции.

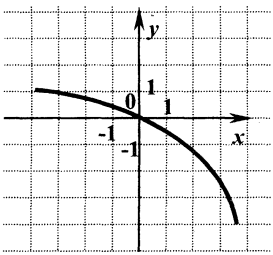
1)



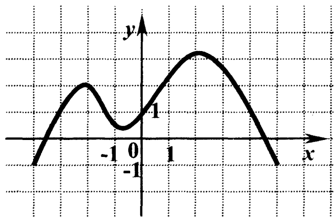
2)



3)



4)



A8 Найдите число точек разрыва функции $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{1+x^2}\right)$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

A9 Найдите сумму целых решений неравенства

$\left(x^2 - x\right)(x-3) - \dfrac{36(x-3)}{x^2 - x} \le 0$ на отрезке $[-4; 15]$.

1) – 6 2) – 9 3) – 4 4) 0

A10 Найдите промежуток, которому принадлежит корень (или сумма корней, если их несколько) уравнения $8^x - 2^x = 50$.

1) $(-1; 0)$ 2) $(0; 1)$ 3) $(1; 2)$ 4) $(2; 4)$

Ответом на задания В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите корень (или произведение действительных, различных корней, если их несколько) уравнения $0,25\log_2^2 x^4 - 3\log_2 x^2 = 4$.

B2 Найдите значение выражения $\operatorname{tg}(\alpha + 135°)$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0,5$.

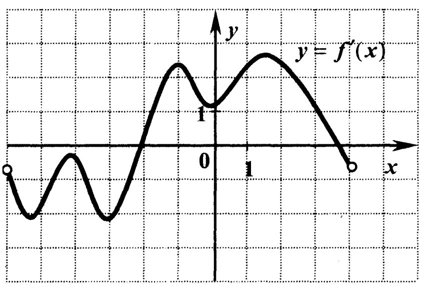
B3 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\log_2^2 x^2 = 12\log_2 8x - 28$.

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите сумму всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы

$$\begin{cases} \sqrt{25 - 10x + x^2} + y = 7, \\ y - 9x + 22 = 0. \end{cases}$$

B5 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. Найдите число промежутков убывания этой функции.



B6 Найти значение выражения $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2}$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

B7 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\left(\sqrt[4]{0,5}+\sqrt[4]{8}\right)^{x}=40,5$.

B8 Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых наименьший, положительный период функции $y=\sin\left(\left(a^{2}+6a-17\right)x\right)$ равен $\frac{\pi}{4}$.

***B9** Ребенок заболеет менингитом, если в его организме окажется не менее 10000 бактерий нейсерии менингита. Если заранее не сделана соответствующая прививка, то каждые два дня число попавших в организм бактерий нейсерии утраивается. Если в течении 12 дней после попадания инфекции болезнь не наступает, организм начинает вырабатывать антитела, прекращающие размножение бактерий. Найдите минимальное количество бактерий, которое должно попасть в организм, чтобы ребенок, не прошедший прививку, заболел.

***B10** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины сторон $AB=5$, $BC=12$, $BB_1=1\frac{12}{13}$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA_1.

***B11** В параллелограмме ABCD сторона AB равна 10 и точка M делит сторону AD пополам. Через точки A и M проведена окружность с диаметром AM, причем точка B лежит вне этой окружности. Найдите сторону AD, если $BM=8$ и площадь четырехугольника BCDM равна 72.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1 Найдите наибольшее из возможных значений величины $\frac{xy}{2}$, если известно, что числа $x-2y$, $y+3x$ и 20 являются последовательными членами арифметической прогрессии.

С2 Найдите число корней уравнения $\frac{22\cdot \operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-\frac{9}{\cos^2 x}=7\cos 2x-16$, принадлежащих отрезку $[-5,5;11]$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3 Три числа, принадлежащие соответственно промежутка $[0;1]$, $[4;6]$ и $[9;12]$, являются первыми членами арифметической прогрессии. Найдите сумму целых значений, которые может принимать величина a^2+d^2, где a – первый член, а d – разность арифметической прогрессии.

***С4** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы AD = 6, AB = 5 и $AA_1 = 9$. Найдите объем пирамиды EB_1C_1F, где E – точка на AA_1 и AE = 6, а F – точка на CD и CF = 4.

С5 Найдите сумму значений параметра a, при которых количество корней уравнения $(a-30)x^3-40x^2+20x=0$ равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a$ и $y=6-|x-2|$.

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 6

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1 Упростите выражение $\left(a^{1,3}\cdot a^{0,45}\right)^{12}$.

1) $a^{23,5}$ 2) $a^{3,5}$ 3) $a^{13,75}$ 4) a^{21}

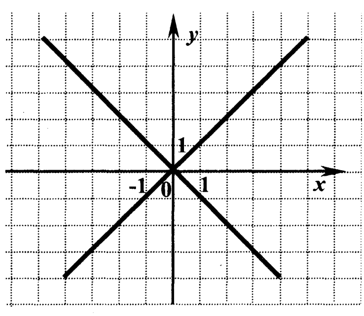
A2 Найдите значение выражения $\dfrac{a^{-0,75}-1}{a^{-0,5}+a^{-0,25}+1}$, если $a=16$.

1) 0,5 2) – 0,5 3) – 0,75 4) 0,75

A3 Найдите значение $\log_3 3k$, если $\log_3\dfrac{k}{9}=13$.

1) – 13 2) 13 3) 16 4) 19

A4 Функция $y=f(x)$ задана графиком. Укажите соотношение, которое определяет заданное множество на рисунке.



1) $x^2-y^2=0$
2) $x^2+y^2=0$
3) $x^2-y^2=4$
4) $x^2-y^2=1$

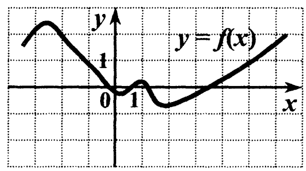
A5 Найдите значение производной функции $y=(x-2)\cdot\ln(x+2)$ в точке $x_0=-1$.

1) -1 2) -2 3) -3 4) 2

A6 Найдите множество значений функции $y=3\sin^2 x-\cos x-3$.

1) $[-2;0]$ 2) $\left[-2;\frac{1}{12}\right]$ 3) $\left[-4;\frac{1}{12}\right]$ 4) $\left[-4\frac{1}{12};0\right]$

A7 Функция $y=f(x)$ задана графиком. Найдите решение неравенства $f(x)<1$.



1) $(-1;5)$ 2) $(0;3)$
3) $(-2;2)$ 4) $(0;6)$

A8 Найдите область определения функции $y=\sqrt{16-0{,}25^{5-2x}}$.

1) $(-\infty;3{,}5]$ 2) $(-\infty;3]$ 3) $[3{,}5;+\infty)$ 4) $[3;+\infty)$

A9 Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{x-4}\geq 10-x$ на отрезке $[-1;12]$.

1) 30 2) 40 3) 50 4) 60

A10 Найдите все решения уравнения $2\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

1) $-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$ 2) $\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

3) $-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$ 4) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

Ответом на задания В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $3^{\log_4 x}+4x^{\log_4 3}=45$.

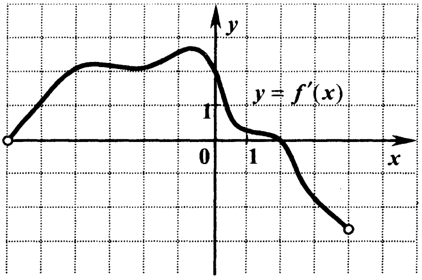
B2 Найдите значение выражения $\dfrac{\sin^2 10^\circ-\cos^2 35^\circ}{\sqrt{2}\cdot\sin 65^\circ}$.

B3 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x+5+2\sqrt{x+4}}-\left(x^2-12x-64\right)^{1/3}=1$.

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите произведение координат всех точек $(x;y)$ на плоскости, для которых выполнено условие $\sqrt{5-x^2+y^2}+\left|\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}-\dfrac{5}{6}\right|=0$.

B5 Функция $y=f(x)$ определена на интервале $(-6;4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку a, в которой функция $y=f(x)$ принимает наибольшее значение.



B6 Найдите значение выражения abc, если равенство $\dfrac{3x-4}{x\left(x^2+4\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+4}$ верно для всех $x\neq 0$.

B7 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\left(\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}-x^3+2x^2+5x-7\right)^4+\left(2^{2x}-12\cdot2^x+32\right)^2=0$.

B8 Найдите значение функции $f(15)$, если известно, что функция $y=f(x)$ – нечетная, имеет период 8 и на отрезке $[0;4]$ функция имеет вид $y=12x-3x^2$.

***B9** Если к четырем числам a, b, c, d, составляющим геометрическую прогрессию, прибавить соответственно 1, 16, 4 и 46, то получатся 4 числа, составляющие арифметическую прогрессию. Найдите сумму чисел a, b, c, d.

***B10** Дана призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом C, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом, синус которого равен 0,6. Отрезок C_1A перпендикулярен плоскости основания и равен 3. Площадь боковой поверхности призмы обозначим S. Найдите целое n, для которого выполнено условие $n\le S<n+1$.

***B11** Точки касания треугольника делят окружность, в которую он вписан, на дуги, длины которых образуют арифметическую прогрессию. Разность прогрессии составляет 20% от длины наибольшей дуги. Найдите площадь этого треугольника, если известно, что длина радиуса описанной окружности является наименьшим, положительным корнем уравнения $r^4-6r^2+6=0$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите наибольшее значение функции $y=\log_2(5x-12)-\log_2\left(x^2+1\right)$.

C2 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\lg^2\left(x^3-5x^2+8x-4\right)=\lg^2\frac{x-1}{4}$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3 Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^3+8x^2+(a+13)x+2a+2=0$ имеет три различных действительных корня.

***С4** Дана правильная треугольная пирамида. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого радиуса $3\sqrt{7}$ вписана в боковую грань пирамиды. Найдите сторону основания треугольной пирамиды.

С5 Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} (xy)^{1,5}+1=x\sqrt{y}+y\sqrt{x}, \\ y^2+100=10y\left(2^x+2^{-x}\right). \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 7

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1 Упростите выражение $\dfrac{5^{1/5}\cdot\sqrt[5]{4}}{10^{3/5}}$.

1) $5^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}$ 2) $5^{-\frac{2}{5}}\cdot 2^{-\frac{1}{5}}$ 3) $5^{-\frac{1}{5}}\cdot 2^{-\frac{1}{5}}$ 4) $5^{-\frac{1}{5}}$

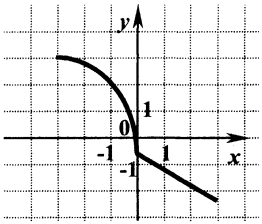
A2 Если $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}}$, то $f^2(x)-16$ приводится к виду.

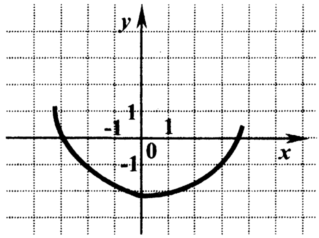
1) $\dfrac{-48}{x+4}$ 2) $\dfrac{-27}{x+4}$ 3) 0 4) – 6

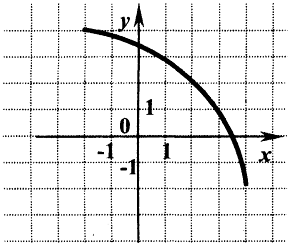
A3 Найдите значение выражения $\log_3 6+\log_3 1{,}5$.

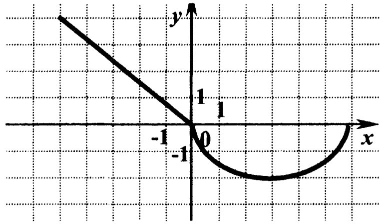
1) 2 2) 3 3) 4 4) 9

A4 Укажите функцию, сумма целых значений которой отрицательна.

1) 

2) 

3) 

4) 

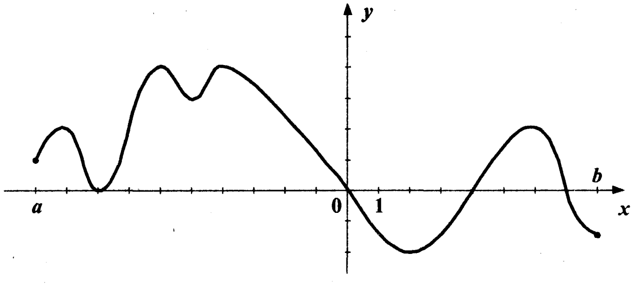
A5 Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x\ln x$ в точке $x_0 = 3e$.

1) $2+3\ln 3$ 2) $1+\ln 3$ 3) $2\ln 3$ 4) $2+\ln 3$

A6 Найдите множество значений функции $y = \log_2\left(x^2+4\right)$.

1) $[1;+\infty)$ 2) $(-\infty;+\infty)$ 3) $[2;+\infty)$ 4) $[0;+\infty)$

A7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Укажите число промежутков возрастания функции.



1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

A8 Найдите область определения функции $y=\log_{0,25}\left(x^2-7x+12\right)$.

1) $(4;+\infty)$
2) $(3;4)$
3) $(-\infty;4)$
4) $(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$

A9 Найдите решение неравенства $2^{|3x-6|}\le 1$.

1) $(-\infty;2]$
2) $[2;+\infty)$
3) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$
4) $\{2\}$

A10 Найдите число корней уравнения $\left(3-\operatorname{tg}^2 3x\right)\cdot\sqrt{4-x^2}=0$.

1) 6
2) 8
3) 10
4) 12

Ответом на задания B1–B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите корень или сумму (если их несколько) корней уравнения

$$x^2-3x-10+\frac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}}-\frac{8}{\sqrt{16-x^2}}=0.$$

B2 Найдите значение выражения

$$\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{5}+10+\sqrt{10}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{5}-10-\sqrt{10}\right).$$

B3 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения

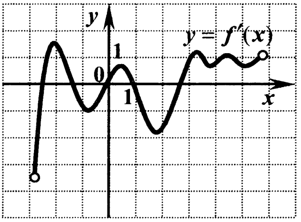
$$\left(8-2^x\right)\log_{0,5}\frac{5x+1}{2x-4}=\left|2^x-8\right|.$$

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите сумму всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы

$$\begin{cases} |x-5|=\sqrt{9-(y-2)^2}, \\ |x-5|=\sqrt{49-(y+2)^2}. \end{cases}$$

B5 На рисунке изображен график ее производной функции $y=f(x)$. Укажите число точек максимума этой функции.



B6 Найдите значение выражения

$$\sqrt{\left(\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}-1}{\left(\sqrt[4]{a}+1\right)^2}}+\frac{\sqrt[4]{a}-1}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}}\right)^{0,5}\cdot\left(\sqrt{a}-1\right)^{5/6}\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)},$$ если

$a=3,25$.

B7 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_4\left(x^2+2x+1\right)+\log_4\left(x^2+6x+9\right)=0$.

B8 Нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для каждого неотрицательного значения аргумента x значение этой функции на 1 меньше, чем значение функции $g(x)=\left(x^2-x-1\right)^2$. Найдите число корней уравнения $f(x)=0$.

***B9** Из пунктов А и В навстречу друг другу в 10^{20} вышли катер и буксир. Двигаясь с постоянными скоростями, они встретились в 13^{00}, после чего продолжили движение. В 13^{40} катер прибыл в пункт В. Найдите количество минут, которые был в пути из пункта В в пункт А буксир.

***B10** В конусе с диаметром основания 8 и высотой 3 из точки основания А проведена образующая l и диаметр d_1. Второй диаметр d_2 образует с диаметром d_1 угол 60°. Найдите расстояние между образующей l и диаметром d_2.

***B11** Дан параллелограмм ABCD. Высота BH пересекает диагональ AC в точке K. Найдите длину отрезка AK, если $AB = 10$, $BC = 24$ и $AC = 2\sqrt{241}$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите в точке экстремума функции $y = 10^{\lg\frac{x^3-6x^2+9x-11}{x-2} - \log_{0,1}(2-x)}$ значение этой функции (или сумму значений функции, если у нее несколько точек экстремума).

C2 Найдите значение параметра a (или сумму таких значений, если их несколько), для которых уравнение $\dfrac{x^2-3a}{x^2-25} = \dfrac{ax+5}{x^2-25}$ имеет единственное решение.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3 Найдите сумму целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-10) \geq (a+5)(|x-5|-5)$ содержит все члены некоторой геометрической прогрессии с первым членом, равным 3, и знаменателем $-5 < q < -1$.

***С4** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на серединах ребер AD и DC заданы соответственно точки M и N. Точка L лежит на ребре CC_1, причем $CL : LC_1 = 1 : 5$. Площадь круга, вписанного в каждую грань куба, равна 11. Вокруг куба описан шар. Определите площадь круга – сечения шара плоскостью, проходящей через точки M, N, L.

С5 Найдите число пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + 2xy - 3y^2 = 15$.

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 8

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1 Вычислите $8^{4a} \cdot 8^{-2a}$, если $a = \frac{1}{6}$.

1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

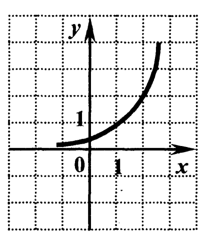
А2 Найдите $a + b$, если $\sqrt{9 - 4 \cdot \sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$.

1) – 1   2) 1   3) 2   4) 3

А3 Найдите значение выражения $5^{2\lg(11) \cdot \lg^{-1} 5}$.

1) 11   2) 55   3) 121   4) 1331

А4 Функция $y = f(x)$ задана графиком. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.



1) $y = 2^x$

2) $y = 2^{x-1} - 1$

3) $y = \log_2(x-1)$

4) $y = 2^{x-1}$

A5 Найдите значение производной функции $y=\dfrac{x^2+9}{x}$ в точке $x_0=-1$.

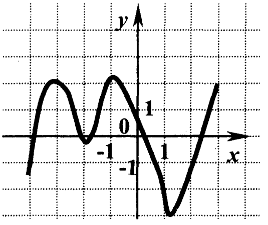
1) -9 2) -8 3) 0 4) 10

A6 Найдите наибольшее целое значение функции

$y=\pi\cdot16^{4\cos^2x-\sin x-\frac{61}{16}}$.

1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

A7 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Укажите число решений уравнения $f(x)=0$.



1) 5 2) 2
3) 3 4) 4

A8 Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\lg\left(\dfrac{4}{|x-5|}-1\right)$.

1) 16 2) 18 3) 20 4) 30

A9 Найдите решение неравенства $\log_{0,5}(1-0,5x)\ge-3$.

1) $(-\infty;-14]$ 2) $[-14;2)$ 3) $[-6;2)$ 4) $[0;2)$

A10 Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1,2x-2,5}=16$.

1) $[-2;-1)$ 2) $[-1;-0,5)$ 3) $[-0,5;0,5)$ 4) $[0,5;1,5)$

Ответом на задания B1–B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите положительный корень (или сумму таких корней, если их несколько) уравнения $\left(\operatorname{tg}\dfrac{8\pi}{x}\right)\cdot\sqrt{5x^2-6x}=0$.

B2 Вычислите $\left(\dfrac{66}{\sqrt{3}+5}+\dfrac{6}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{61}{8-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)-\dfrac{156}{\sqrt{3}-4}$.

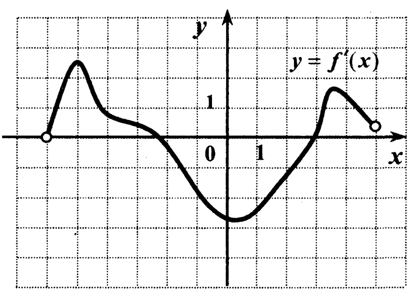
B3 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\left|\log_3 x-3\right|-\left|\log_9 x-2\right|=1$.

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите сумму всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы

$$\begin{cases}\sqrt{8x-4y-5}=\sqrt{8y-28x-5},\\ x-\left|y+4\right|+2=0.\end{cases}$$

B5 Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-6;5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите длину промежутка убывания этой функции.



B6 Найдите значение выражения
$\log_5\left(15+\sqrt[3]{24\sqrt{5}-40\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{95+30\sqrt{10}}\cdot\sqrt[6]{625}\right)$.

B7 Найдите положительный корень (или сумму таких корней, если их несколько) уравнения $63\cos^{-1}\dfrac{\pi x}{x+4}=130-2^x$.

B8 Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом, равным 10. Известно, что $f(1)=1$, $f(5)=3$ и на отрезке $[1;5]$ функция является линейной. Найдите значение функции $f(24)$.

***B9** Известно, что произведение суммы цифр двузначного числа на разность этих цифр равно 55. Найдите это двузначное число (или сумму таких двузначных чисел, если их несколько).

***B10** Основанием пирамиды является треугольник, две стороны которого 4 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними равен 30°. Длина каждого бокового ребра равна 4. Найдите объем треугольной пирамиды.

***B11** Точки касания четырехугольника делят окружность, вокруг которой он описан, на дуги, длины которых образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Разность прогрессии составляет 40% от длины второй по величине дуги. Найдите площадь этого четырехугольника, если известно, что длина радиуса вписанной окружности является наибольшим, положительным корнем уравнения $r^4-11\sqrt{6}r^2+180=0$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите наибольшее целое значение функции
$y=\log_2\left(16x^2-x^3\right)+\log_2 x$.

C2 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения
$4^{x-0,5+\sqrt{x^2-4}}-7\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-4}}=16$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3 – C5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3 Найдите длину промежутка (или наибольшую из длин таких промежутков, если их несколько) тех положительных значений параметра a, при которых множество решений неравенства $a^{2x^3-5ax^2}\cdot 9^{2+a}\geq 3^{2x-3a+4}$ содержит не менее двух и не более пяти двузначных, натуральных чисел.

***C4** Дана правильная шестиугольная пирамида. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите сторону основания пирамиды, если объем конуса равен $\frac{\pi\sqrt{30}}{4}$.

C5 Найдите число решений системы уравнений $\begin{cases} y\left(1-x^2\right)^2+x^3=0, \\ x^2+y^2+x=2xy+y. \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 9

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1 Найдите значение выражения $(-15)\cdot\left(\frac{11}{3}-9^{1,5}\right)$.

1) – 460 2) – 100 3) 260 4) 350

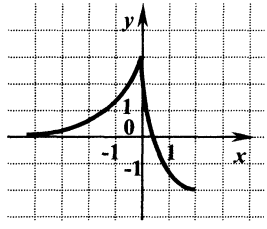
A2 Найдите значение выражения $\frac{8-x}{4\cdot\sqrt{x+1}-12}+0,25\cdot\sqrt{x+1}$, если $x=1,25$.

1) 0,5 2) – 0,5 3) – 0,75 4) 0,75

A3 Найдите значение выражения $25^{2-3\log_5\sqrt{10}}-3^{-\log_3 0,25}$.

1) – 3,375 2) – 1,375 3) 1,375 4) – 1,5

A4 Функция $y=f(x)$ задана графиком. Укажите множество значений этой функции.



1) $[-2;3]$
2) $[-4;2]$
3) $[-2;0)\cup(0;3]$
4) $[-3;2]$

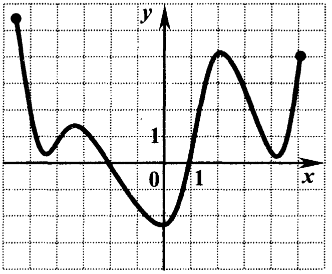
A5 Найдите значение производной функции $y=\dfrac{4-x}{3+x}$ в точке $x_0=-2$.

1) 1 2) – 4 3) 7 4) – 7

A6 Найдите наибольшее целое значение функции $y=2-\cos 2x$.

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

A7 Функция $y=f(x)$ определена графиком. Найдите решение неравенства $f(x)<0$.



1) $(-5;-1)$
2) $(0;5)$
3) $(-2;1)$
4) $(-1;1)$

A8 Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\lg\left(3x+5-\left|x^2-5\right|\right)$.

1) 6 2) 10 3) 15 4) 20

A9 Найдите сумму целых решений неравенства $|1-5x|-|x-2|\le 3$ на отрезке $[-3;3]$.

1) – 2 2) – 1 3) 0 4) 1

A10 Найдите число корней уравнения $x^{\frac{6}{5}}-26x^{\frac{3}{5}}-27=0$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 0

Ответом на задания В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите $2\cdot \mathrm{tg}x_0$, где x_0 – наибольший, отрицательный корень уравнения $11\cos 2x - 3\sin 2x + 9 = 0$.

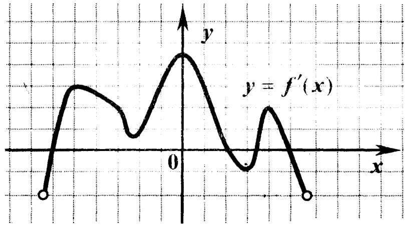
B2 Найдите значение выражения $16^{\frac{\log_5 7}{\log_5 4}} + \lg(\log_5 243 \cdot \log_3 25)$.

B3 Найдите число действительных значений x, лежащих на отрезке $[0;10]$ и обладающих тем свойством, что числа $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите произведение координат всех точек $(x;y)$ на плоскости, для которых выполнено условие
$\sqrt{y-x^2} + \left|y^2 - 3x^2 - 12x - y - 9\right| = 0$.

B5 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. В ответе укажите количество промежутков возрастания этой функции.



B6 Найдите значение выражения $\left(9^{\frac{1}{\log_4 3}}+81^{\frac{1}{\log_{13} 9}}\right)\cdot 7^{-\log_5^{-1} 7}$.

B7 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\cos^4\left(x^4-6x^3+x^2-7x+6\right)=1+\log_2^2\sqrt{x^2-5x-5}$.

B8 Найдите наименьший, положительный период функции $f(x)=\cos\frac{\pi x}{3}+\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}$.

***B9** В 9^{15} в северном направлении вышел пешеход, скорость которого составила 4 километра в час. Через некоторое время из того же пункта на запад вышел другой пешеход. Определите, через какое количество минут после выхода первого пешехода вышел второй пешеход время его выхода, если в 11^{30} расстояние между пешеходами было 9,75 километра, а в 13^{00} – 18,75 километра.

***B10** Основание прямой призмы является ромб, причем площади диагональных сечений равны 9,6 и 4. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

***B11** Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой удовлетворяют условию $|x+5|+|y-4|\le 9$.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите наименьшее целое значение функции $y=5\cdot\left(\sqrt{6x+35}-\sqrt{3x-7}\right)$.

C2 Найдите число корней уравнения $3\operatorname{tg}x+2|\operatorname{tg}x|=\sin 2x$, принадлежащих промежутку $[0;12]$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3 Найдите сумму целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $\left(|x|+|a-11|-4\right)\left(|x|-|a|+15\right)\geq 0$ содержит все члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии с первым членом, равным -1, и разностью, меньше или равной 2.

***С4** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины сторон основания $ABCD$ равны $AB=9$, $AD=12$, причем $\angle BAD=45^\circ$. Боковое ребро $AA_1=14$ составляет угол 45° с основанием, отрезок A_1B перпендикулярен основанию. На ребрах AA_1, BB_1, DD_1 заданы соответственно точки M, N, L, причем $AM=10$, $BN=9$, $DL=7$. Секущая плоскость проходит через точки M, N, L и делит параллелепипед на два многогранника. Найдите наибольший из объемов этих многогранников.

С5 Найдите ординату точки (или произведение ординат, если точек несколько) на плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x^2-xy=5x-2y-6, \\ 0{,}5\log_3\dfrac{x^3-4x^2-5x-729}{y+1}=3-\log_9(2-x). \end{cases}$$

Контрольные измерительные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 10

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1 Укажите наибольшее из чисел.

1) $0{,}5^{2{,}8}$ 2) $4^{0{,}1}$ 3) $2^{-0{,}5}$ 4) $0{,}25^{0{,}25}$

A2 Найдите значение выражения

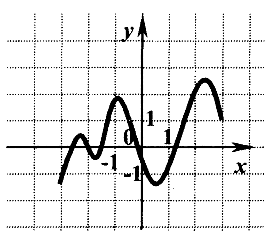
$$\frac{\left(a-4\sqrt{2a}+8\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{8}\right)}{a\sqrt{a}-16\sqrt{2}}:\frac{8}{a+2\sqrt{2a}+8},\text{ если } a=32.$$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

A3 Найдите значение выражения $1{,}5^{\log_{1,5}6}-3^{\log_{0,5}0{,}25}$.

1) 3 2) -3 3) -9 4) -4

A4 Функция $y=f(x)$ задана графиком. Укажите число целых значений этой функции.



1) 2 2) 4
3) 6 4) 7

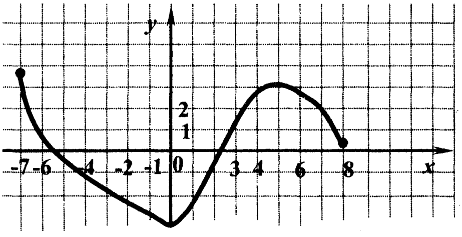
A5 Найдите значение производной функции $y = 7e^{3x} - x^2 - 4x + 5$ в точке $x_0 = 0$.

1) 3 2) 15 3) 17 4) 19

A6 Найдите наименьшее целое значение функции $y = \log_2\left(x^2 + 2x + 3\right)$.

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

A7 Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-7; 8]$. Найдите число целых решений неравенства $f(x) > 1$.



1) 3
2) 4
3) 6
4) 11

A8 Найдите число целых значений из области определения функции $y = \log_{\sin\frac{\pi x}{4}}\left(25 - x^2\right)$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

A9 Найдите решение неравенства $\ln(x-1) \geq x - 2$.

1) $(-\infty; 2]$ 2) $[2; +\infty)$ 3) $(1; 2]$ 4) $\{2\}$

A10 Найдите число корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{6}{\cos x} = 6$ на отрезке $[-\pi/2; 3\pi/2]$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 0

Ответом на задания В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите наименьший корень уравнения $\operatorname{tg}\frac{13\pi x}{12}-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{12}=0$, лежащий на интервале $(-31;0)$.

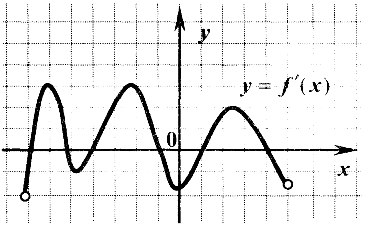
B2 Найдите значение $a+b+c+r$, если числа a, b, c и r выбраны таким образом, что равенство $\frac{x^3-3x^2+5x-1}{x-1}=ax^2+bx+c+\frac{r}{x-1}$ верно для всех допустимых значений x.

B3 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_x\left(x^3-8x^2-16x-128+x\cdot\sqrt[5]{x}\right)=1,2$.

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите сумму модулей всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы
$$\begin{cases}\log_{|x|}(7x+6y)=2,\\ \log_{|y|}(6x+7y)=2.\end{cases}$$

B5 На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$. В ответе укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси Ox.



B6 Найдите значение выражения $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{11+4\sqrt{6}}\right)^9$.

B7 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_7\left(x^2-8x+16\right)+\log_7\left(x^2+4x+4\right)=2$.

B8 Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых наименьший, положительный период функции $y=\cos\left((2a-11)x\right)$ равен $\frac{\pi}{4}$.

***B9** Задана арифметическая прогрессия с первым членом 2 и разностью 5, а также геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем 2. Найдите сумму первых четырех совпадающих членов этих прогрессий.

***B10** В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 72 и высотой 63 точка E лежит на ребре AD таким образом, что CE является биссектрисой треугольника ACD. Найдите расстояние от точки E до плоскости B_1CD_1.

***B11** Точки касания пятиугольника делят окружность, вокруг которой он описан, на части, длины которых пропорциональны числам: 1, 2, 2, 3, 4. Найдите площадь этого пятиугольника, если известно, что длина радиуса вписанной окружности является наименьшим, положительным корнем уравнения $4r^4-36r^2+69=0$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите наименьшее значение функции
$y=13\cdot 2^{\log_{0,5}(2x-11)-\log_{0,5}\left(x^2+12\right)}$.

C2 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $2^{2x^2}-\left(2^3+2^8\right)\cdot 2^{x^2+2x+2}+2^{11+4x}=0$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3 Найдите сумму целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-6)\ge(a+3)(|x-3|-3)$ содержит все члены некоторой геометрической прогрессии с первым членом, равным 4, и знаменателем $-3<q<-1$.

***С4** Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетами $AB=1$ и $BC=4$. Высота призмы равна 8. Найдите объем пирамиды с вершиной в точке C_1 и основанием, совпадающим с сечением призмы плоскостью, проходящей через середины ребер BC, BB_1 и A_1B_1.

С5 Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2y^2-2x^2=3xy, \\ 2xy-2x\sin\pi x=\sin\pi x\cos\pi y-y\cos\pi y. \end{cases}$$

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА № 10

Как решить все задачи Единого государственного экзамена по математике? Какой объем знаний необходим для этого?

Давайте попробуем увидеть это вместе, обсуждая решение каждой из задач и разбирая, что надо знать, чтобы решить эти задачи.

Мы убедимся в том, что для решения каждой задачи, недостаточно знать все формулы и теоремы школьного курса математики.

Для выполнения многих заданий решающим является умение логически мыслить.

Как лучше всего готовиться к экзамену? Можно ли заранее узнать, какие типы заданий будут на Едином экзамене по математике? Безусловно, можно получить положительную оценку, изучая варианты прошлых лет.

В новом варианте ЕГЭ обязательно будут новые задачи. Вы должны быть готовы к любой неожиданности. Реально задачи всегда отличаются от тех, которые были анонсированы в демонстрационном варианте.

Для получения высокой оценки надо научиться ориентироваться в незнакомой ситуации, научиться решать задачи, которые раньше не встречались.

Вот этому мы и хотим Вас научить.

Часть 1

A1 Укажите наибольшее из чисел.

1) $0{,}5^{2{,}8}$ 2) $4^{0{,}1}$ 3) $2^{-0{,}5}$ 4) $0{,}25^{0{,}25}$

При решении задачи А1 Вам необходимо продемонстрировать владение понятием степени с рациональным показателем, умение выполнять тождественные преобразования и находить их значения. В частности, необходимо сравнивать степени с различными и одинаковыми основаниями.

Обычно, сравнивая степени, мы стремимся привести их к одному основанию. В этом случае мы учитываем, что показательная функция с основанием, большим 1, возрастает с ростом аргумента и большему значению показателя степени соответствует большее число. При основании, меньшем 1, ситуация является обратной, т.е. большему показателю степени соответствует меньшее число.

Мы можем поступить так и в данном случае, представив каждое число как степень с основанием 2. Однако эффективнее заметить, что второе число больше 1, все остальные числа меньше 1, поэтому наибольшим является второе число. Правильный ответ № 2.

A2 Найдите значение выражения

$$\frac{\left(a-4\sqrt{2a}+8\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{8}\right)}{a\sqrt{a}-16\sqrt{2}}:\frac{8}{a+2\sqrt{2a}+8},\text{ если } a=32.$$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

В задаче А2 надо выполнить тождественные преобразования с выражениями, содержащими корни. При этом надо уметь выполнять, прежде всего, простые действия со степенями. Тем не менее, желательно быть готовым и к выполнению и более сложных операций.

Запишем в данном случае выражение в виде одной дроби, т.е. в виде $\dfrac{\left(a-4\sqrt{2a}+8\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{8}\right)\left(a+2\sqrt{2a}+8\right)}{8\left(a\sqrt{a}-16\sqrt{2}\right)}$. В числителе первый множитель является полным квадратом, а третий – неполным квадратом суммы, в знаменателе стоит разность кубов. Отсюда выражение разлагается на множители и упрощается

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{8}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{8}\right)\left(a+2\sqrt{2a}+8\right)}{8\left(\sqrt{a}-\sqrt{8}\right)\left(a+2\sqrt{2a}+8\right)}=\frac{a-8}{8}$$. После подстановки $a=32$ мы приходим к правильному ответу № 3.

A3 Найдите значение выражения $1{,}5^{\log_{1,5}6}-\ \ 3^{\log_{0,5}0{,}25}$.

1) 3 2) – 3 3) – 9 4) – 4

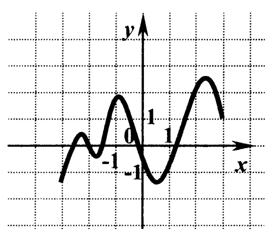
Умение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений проверяется при решении задачи А3.

При этом может потребоваться знание многих свойств логарифмов. Это и формулы для логарифма произведения и суммы логарифмов, логарифма частного и разности логарифмов, логарифма степени. Надо знать формулу перехода к новому основанию в логарифме, основное *логарифмическое тождество, комбинированно применять различные свойства.*

В данном случае для преобразования первого слагаемого применим основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x}=x$, после чего первое слагаемое равно 6.

Во втором слагаемом вычисляем показатель степени из определения логарифма. Он равен 2, и второе слагаемое равно 9. Разность слагаемых равна – 3. Отсюда правильным является ответ № 2.

A4 Функция $y=f(x)$ задана графиком. Укажите число целых значений этой функции.



1) 2 2) 4

3) 6 4) 7

Ваше умение читать свойства функции по графику и распознавать графики элементарных функций проверяется при решении задачи А4.

Здесь Вы должны установить связь между свойствами функции и ее графиком. Надо видеть по графику область определения функции, множество ее значений, ориентироваться в определении непрерывности функции, периодичности, четности (нечетности) функции. Непосредственно по графику функции надо уметь определять промежутки возрастания (убывания) функции, наибольшее и наименьшее значения функции, распознавать графики элементарных функций.

Заметим, что построенный или исследуемый график функции должен отражать характер поведение функции и показывать все ее характерные точки.

В данном случае множество значений функции состоит из проекций точек графика функции на ось ординат. После этого нетрудно заметить, среди множества значений целыми являются числа: – 1, 0, 1, 2. Следовательно, правильным является ответ № 2.

A5 Найдите значение производной функции $y = 7e^{3x} - x^2 - 4x + 5$ в точке $x_0 = 0$.

1) 3 2) 15 3) 17 4) 19

Задание А5 связано с понятием производной функции. Прежде всего, проверяется умение вычислять производную, используя таблицу производных основных элементарных функций и основные правила вычисления производной. Надо знать, как вычислить производную суммы, разности, произведения, частного двух функций, а также производную сложной функции.

При выполнении этого задания надо также владеть геометрическим и физическим смыслом производной.

Итак, надо знать, что производная функции в данной точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Физический смысл производной заключается в том, что при прямолинейном движении тела производная по времени t от функции, равной пути, пройденному телом за время t , равна мгновенной скорости тела в момент времени t.

В данном случае при нахождении производной функции мы пользуемся правилом нахождения производной сложной функции. Точнее, речь идет о частном функции вида $y = f(kx + b)$.

Итак,

$$y' = \left(7e^{3x} - x^2 - 4x + 5\right)' = 7e^{3x} \cdot 3 - 2x - 4 + 0 = 21e^{3x} - 2x - 4.$$

Подставляя в полученную производную $x_0 = 0$, приходим к правильному ответу № 3.

А6 Найдите наименьшее целое значение функции $y = \log_2\left(x^2 + 2x + 3\right)$.

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

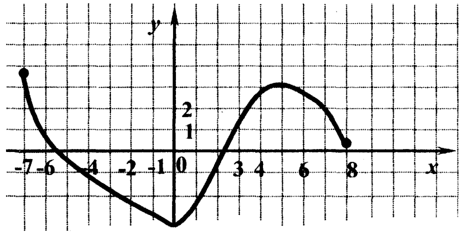
При решении задачи А6 надо проявить умение находить множество значений функции. При этом Вам придется исследовать тригонометрическую, показательную, логарифмическую или рациональную функцию.

Быть может, в этой задаче будет очень простая ситуация. Скажем, Вам достаточно будет знать, что значения синуса и косинуса находятся на промежутке $[-1; 1]$, их квадраты принимают значения на промежутке $[0; 1]$. Не забывайте, что показательная функция принимает положительные значения, а логарифмическая может принимать любые значения.

В данном случае мы столкнулись со сложной функцией, и ее компоненты надо исследовать по отдельности. Надо понять, что внешней функцией является монотонно возрастающая логарифмическая функция.

Аргументом этой функции является квадратичная функция, принимающая значения от двух до плюс бесконечности. Тем самым вся функция принимает значения, начиная с $\log_2 2 = 1$. В итоге верен ответ № 2.

A7 Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-7; 8]$. Найдите число целых решений неравенства $f(x) > 1$.



1) 3
2) 4
3) 6
4) 11

Графический метод решения неравенств, т.е. использование графиков в решении неравенств – так обозначена тема задачи А7 в спецификации Единого экзамена по математике.

Условию $f(x) > 1$ удовлетворяют те точки графика функции, которые лежат выше прямой $y = 1$. Это будет при $x = -7$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$ и $x = 7$. Всего таких точек 6, мы приходим к ответу № 3.

A8 Найдите число целых значений из области определения функции $y = \log_{\sin\frac{\pi x}{4}}\left(25 - x^2\right)$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Задача А5 связана с нахождением области определения сложной функции. При этом Вам могут встретиться тригонометрическая, показательная, логарифмическая функция и корень четной степени.

Каким образом найти область определения функции? В сложной ситуации можно поступить следующим образом. Представьте себе, что Вам задам аргумент x и надо вычислить соответствующее значение функции $f(x)$. Если написать условие выполнимости каждой операции при вычислении функции, то мы и получим систему для определения области определения.

В данном случае ситуация более конкретная. Надо указать условия, при которых существует логарифмическая функция. Это условия: $25 - x^2 > 0$, $\sin\frac{\pi x}{4} > 0$, $\sin\frac{\pi x}{4} \neq 1$. Несложно проверить, что лишь числа 1 и 3 удовлетворяют всем этим условиям. В итоге правильным является ответ № 2.

A9 Найдите решение неравенства $\ln(x-1) \geq x-2$.

1) $(-\infty; 2]$ 2) $[2; +\infty)$ 3) $(1; 2]$ 4) $\{2\}$

Умение решать неравенства с одной переменной на основе свойств функции проверяется при решении задачи А9.

Заметим, что в этом задании могут встретиться рациональные неравенства, показательные, логарифмические, неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, неравенства с параметром и комбинированные неравенства. Все это отражено в разных вариантах нашей книги.

Метод интервалов обычно применяют при решении дробно-рациональных неравенств. В методе интервалов на числовой оси необходимо отметить точки, при которых неравенство переходит в равенство и точки, являющиеся границей области определения входящих в неравенство функций. После этого на числовой оси образуются интервалы, каждый из которых либо целиком является решением данного неравенство, либо целиком не является этим решением. В ответ отбираются те интервалы и те отмеченные точки, которые являются решением неравенства.

Мы с Вами должны понимать, что метод интервалов является универсальным. Он применим для неравенств любого вида.

Это, конечно, не значит, что любое неравенство надо решать методом интервалов. Могут быть и другие способы рассуждений.

Вообще говоря, **правильным решением будет то рассуждение, в результате которого нами будет получен обоснованный правильный ответ**.

В данном случае мы, прежде всего, обращаем внимание на тот факт, что путем преобразований нельзя решить это, казалось бы, простое неравенство, т.к. оно содержит одновременно и логарифмическую функцию и степенную.

Вторая сложность в этой задаче. И левая, и правая части являются возрастающими функциями.

У нас есть еще один способ изучения поведения функции. Это исследование ее производной. Производная левой части равна $\frac{1}{x-1}$, производная правой части равна 1. Мы видим, что эти производные равны при $x=2$. Но в этой точке и функции совпадают, т.е. $x=2$ является решением нашего неравенства.

При $1<x<2$ производная левой части больше производной правой части, т.е. их разность $\ln(x-1)-(x-2)$ является возрастающей функцией, равной 0 при $x=2$, следовательно, $\ln(x-1)<x-2$ при $1<x<2$.

При $x>2$ производная левой части меньше производной правой части, т.е. их разность $\ln(x-1)-(x-2)$ является убывающей функцией, равной 0 при $x=2$, следовательно, снова $\ln(x-1)<x-2$ при $x>2$. Итак, наше неравенство выполнено только при $x=2$.

Заметим, что можно было еще графически решить задачу, доказав что прямая $y=x-2$ является касательной к графику функции $y=\ln(x-1)$ в точке с абсциссой 2. Справедлив ответ № 4.

A10 Найдите число корней уравнения $\mathrm{tg}^2 x+\dfrac{6}{\cos x}=6$ на отрезке $[-\pi/2; 3\pi/2]$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 0

В задании А8 проверяется умение решать простейшие уравнения и отбирать корни по заданному условию. Уравнение может быть иррациональным, тригонометрическим, показательным или логарифмическим.

Данное уравнение после применения формулы $\mathrm{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$ сводится к квадратному уравнению $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{6}{\cos x}-7=0$ относительно $\dfrac{1}{\cos x}$, корни которого равны 1 и – 7. Итак, $\dfrac{1}{\cos x}=1$ или $\dfrac{1}{\cos x}=-7$. Первое соотношение дает одно решение на нашем промежутке $x=0$. Второе соотношение сводится к виду $\cos x=-\dfrac{1}{7}$ и на нашем промежутке длины 2π имеет 2 решения, т.к. косинус на периоде каждое значение, по модулю меньшее 1, принимает 2 раза. Правильным является ответ № 3.

B1 Найдите наименьший корень уравнения $\operatorname{tg}\frac{13\pi x}{12} - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{12} = 0$, лежащий на интервале $(-31; 0)$.

В задании B1 необходимо проявить умение решать уравнения с использованием равносильности уравнений.

Мы должны понимать, что понятие равносильности преобразования является очень важным при решении уравнений и неравенств. При равносильном преобразовании не меняется множество решений задачи. Именно за счет таких преобразований мы, как правило, и решаем уравнения и неравенства.

Но часто бывает ситуация, когда преобразование является равносильным лишь на некотором множестве.

В данном случае уравнение сводится к виду $\operatorname{tg}\frac{13\pi x}{12} = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{12}$. Возникает вопрос, при каком условии тангенсы двух величин равны? Если посмотреть на график тангенса, то ответ кажется простым. Разность аргументов должна быть равна $\pi n, n \in Z$. Но это может оказаться неправильным ответом, если мы не учтем область определения тангенса.

Итак, в данном случае $\frac{13\pi x}{12} - \frac{\pi x}{12} = \pi n, n \in Z$ и приходим к соотношению $x = n, n \in Z$. Казалось бы, правильный ответ -30. Но, если мы подставим это число в уравнение, получим $\operatorname{tg}\frac{65\pi}{2} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{2}$, которое не является верным равенством, т.к. левая и правая части не существуют.

С числом -29 все в порядке. Ответ: -29.

B2 Найдите значение $a+b+c+r$, если числа a, b, c и r выбраны таким образом, что равенство $\frac{x^3-3x^2+5x-1}{x-1} = ax^2+bx+c+\frac{r}{x-1}$ верно для всех допустимых значений x.

Умение выполнять тождественные преобразования выражений и находить их значения потребуется в задании B2. При этом могут встретиться иррациональные, степенные, тригонометрические или логарифмические выражения.

При решении этой задачи возможны, по крайней мере, 2 варианта.

Во-первых, можно привести правую часть к общему знаменателю. Тогда слева и справа будут две дроби с одинаковыми знаменателями. Следовательно, тождественно равны числители, т.е. $x^3-3x^2+5x-1\equiv\left(ax^2+bx+c\right)(x-1)+r$. Раскрывая здесь скобки и приравнивая коэффициенты слева и справа при степенях x^3, x^2, x, а также свободные члены, мы получаем систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными, решая которую, мы и находим числа a, b, c, r.

Второй способ более простой. После деления в левой части числителя на знаменатель мы получаем равенство $\frac{x^3-3x^2+5x-1}{x-1}=x^2-2x+3+\frac{2}{x-1}=\;=ax^2+bx+c+\frac{r}{x-1}$, откуда $a=1$, $b=-2$, $c=3$, $r=2$. Ответ. 4

В3 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_x\left(x^3-8x^2-16x-128+x\cdot\sqrt[5]{x}\right)=1{,}2$.

При выполнении задания В3 потребуется умение применять общие приемы решения уравнений. Речь идет об уравнениях иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических.

О каких приемах решения уравнений идет речь?

Это разложение на множители выражений, замена переменной при решении уравнений, графический метод и использование свойств функций.

При решении данного уравнения заметим, что каждое число может быть представлено в виде логарифма по любому допустимому основанию. Поэтому наше уравнение равносильно уравнению $\log_x\left(x^3-8x^2-16x-128+x\cdot\sqrt[5]{x}\right)=\log_x x^{1,2}$. Отсюда следует, что $x^3-8x^2-16x-128+x\cdot\sqrt[5]{x}=x^{1,2}$ или $x^3-8x^2-16x-128=0$. После вынесения общего множителя из каждой пары мы находим корни последнего уравнения: – 4, 4 и 8. С учетом области определения корнями исходного уравнения являются последние 2 числа 4 и 8. Ответ. 12

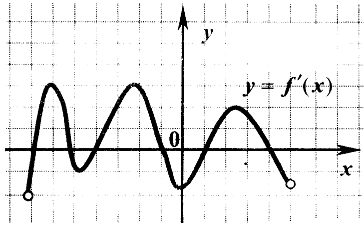
В4 Найдите сумму модулей всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы
$$\begin{cases}\log_{|x|}(7x+6y)=2,\\ \log_{|y|}(6x+7y)=2.\end{cases}$$

В задании В4 надо решать системы уравнений, содержащих одно или два показательных уравнения (логарифмических, иррациональных, тригонометрических или их сочетание).

Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными, мы обычно выражаем одну переменную через другую в одном уравнении и подставляем это выражение в другое уравнение.

В данном случае сразу это сделать невозможно. Запишем систему в виде $\begin{cases}\log_{|x|}(7x+6y)=\log_{|x|}x^2,\\ \log_{|y|}(6x+7y)=\log_{|y|}y^2.\end{cases}$ Отсюда, в области определения функций, входящих в систему, $\begin{cases}7x+6y=x^2,\\ 6x+7y=y^2.\end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, имеем $x-y=x^2-y^2$. Последнее уравнение выполняется в двух случаях: $y=x$ и $y=1-x$. В первом случае $y=x$ мы приходим к решению системы $x_1=y_1=13$ (второе решение последней системы не входит в область определения первой). Во втором случае $y=1-x$ последняя система дает 2 решения $x_2=3, y_2=-2$ и $x_3=-2, y_3=3$. Сумма модулей всех значений переменных равна 13 + 13 + 3 + 2 + 2 + 3 = 36. Ответ. 36

B5 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. В ответе укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси Ox.



Умение исследовать функцию с помощью производной по графику производной и применять геометрический смысл производной проверяется в задании B5.

В каждом задании важно понять смысл вопроса, который задается. В данном случае касательная параллельна оси Ох там, где производная равна 0. По графику **производной** видно, что таких точек 6. Ответ. 6

B6 Найдите значение выражения $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{11+4\sqrt{6}}\right)^{9}$.

Умение выполнять тождественные преобразования выражений и находить их значение проверяется в задании B6. В задании могут участвовать рациональные степени и логарифмические выражения.

Заметим, что $\sqrt{3}-2\sqrt{2}<0$, поэтому мы можем воспользоваться формулой $\sqrt[3]{a}=-\sqrt[6]{a^2}$ для первого множителя. Но если заметить, что $11+4\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2$, заданное выражение запишется в виде $\left(\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)}\right)^9=(-5)^3=-125$.

Ответ. – 125

B7 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_7\left(x^2-8x+16\right)+\log_7\left(x^2+4x+4\right)=2$.

В задании B7 надо проявить умение использовать несколько приёмов при решении уравнений.

Уравнения могут быть иррациональными, тригонометрическими, показательными или логарифмическими.

В данном случае заметим, что аргументами логарифмических функций являются полные квадраты, поэтому мы воспользуемся формулой $\log_a x^2 = 2\log_a|x|$. В итоге заданное уравнение запишется в виде $\log_7|x-4|+\log_7|x+2|=1$ или $|(x-4)(x+2)|=7$. Отсюда $x^2-2x-8=\pm 7$ и сумма соответствующих корней $5, -3,\ 1\pm\sqrt{2}$ равна 4. Ответ. 4

B8 Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых наименьший, положительный период функции $y=\cos\left((2a-11)x\right)$ равен $\frac{\pi}{4}$.

Знание свойств периодичной функции потребуется по спецификации при решении задачи B8. Могут встретиться все тригонометрические функции. Опыт прошлых лет показывает, что неплохо было бы также ориентироваться в понятиях четная и нечетная функция.

Число $T>0$ (если такое существует) называется периодом функции $f(x)$, если во всей области определения выполнено условие $f(x+T)=f(x)$.

Функция называется четной, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для всех значений аргумента из области определения выполнено соотношение $f(-x)=f(x)$.

Функция называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для всех значений аргумента из области определения выполнено соотношение $f(-x)=-f(x)$.

Мы знаем, что период (мы здесь под словом период понимаем наименьший, положительный период функции) функции $y=\cos x$ равен 2π.

Соответственно, период функции $y=\cos 2x$ равен $\frac{2\pi}{2}$, период функции $y=\cos 3x$ равен $\frac{2\pi}{3}$ и т. д.

А вот период функции $y=\cos ax$ при $a\neq 0$ равен не $\frac{2\pi}{a}$, а $\frac{2\pi}{|a|}$.

Итак, период заданной функции $y=\cos\left((2a-11)x\right)$ равен $\frac{2\pi}{|2a-11|}$. Приравнивая эту величину к заданному периоду $\frac{\pi}{4}$, получаем $|2a-11|=8$. Отсюда a принимает значения 9,5 и 1,5. Их произведение равно 14,25. Ответ. 14,25.

***B9** Задана арифметическая прогрессия с первым членом 2 и разностью 5, а также геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем 2. Найдите сумму первых четырех совпадающих членов этих прогрессий.

Умение решать текстовую задачу, составляя математическую модель предложенной в ней ситуации

При создании математической модели необходимо текст, описывающий изучаемую ситуацию, перевести в переменные, формулы, уравнения и неравенства. Могут встретиться разные ситуации, в том числе задачи на движение, на работу, задачи на сложные проценты, десятичную форму записи числа, задачи на концентрации, смеси и сплавы.

Естественно, самым главным условием решения задачи является логически верное понимание той ситуации, которое в ней описывается.

Заметим, что членами арифметической прогрессии являются все натуральные числа, оканчивающиеся на 2 и на 7. Так как все члены геометрической прогрессии, начиная со второго, являются четными числами, то общими будут те члены геометрической прогрессии, которые оканчиваются на 2. Это числа: 2, $2\cdot 16$, $2\cdot 16^2$ и $2\cdot 16^3$. Их сумма равна 8738. Ответ. 8738 .

***B10** В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 72 и высотой 63 точка E лежит на ребре AD таким образом, что CE является биссектрисой треугольника ACD. Найдите расстояние от точки E до плоскости B_1CD_1.

В задании B10 Вам потребуется умение решать стереометрические задачи. Безусловно, здесь возможен широкий спектр задач и достаточно большое число их приведено в этой книге.

При решении многих стереометрических задач важную роль играет удачный выбор плоскости, в которой происходят основные события. В этой задаче таких плоскостей будет две.

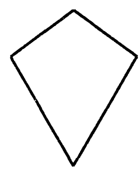
Первой рассмотрим плоскость основания ABCD. Биссектриса CE треугольника ACD делит противоположную сторону AD на части, пропорциональные его боковым сторонам AC и CD. Зная сторону квадрата 72, найдем отсюда $AE = 72\left(2-\sqrt{2}\right)$ и $ED = 72\left(\sqrt{2}-1\right)$. Пусть EF – перпендикуляр, опущенный из E на AC. Тогда $EF = 72\left(\sqrt{2}-1\right)$ и $FC = 72$.

Второй рассмотрим плоскость диагонального сечения призмы AA1C1C. Если G – середина A1C1 , то искомым расстоянием является длина перпендикуляра FH, опущенного из F на CG. Пусть $\alpha = \angle FCH = \angle CGC_1$, тогда $FH = FC\sin\alpha$. В то же время, в треугольнике CGC_1 известны катеты $GC_1 = 36\sqrt{2}$ и $CC_1 = 63$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{63}{36\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{8}$ и, соответственно $\sin\alpha = \dfrac{7}{9}$. Итак $FH = 72 \cdot \dfrac{7}{9} = 56$. Ответ. 56.

***B11** Точки касания пятиугольника делят окружность, вокруг которой он описан, на части, длины которых пропорциональны числам: 1, 2, 2, 3, 4. Найдите площадь этого пятиугольника, если известно, что длина радиуса вписанной окружности является наименьшим, положительным корнем уравнения $4r^4-36r^2+69=0$.

Умение решать планиметрические задачи проверяется в задании B11. Здесь могут быть самые разнообразные задачи. Планиметрическая задача на ЕГЭ, как правило, гораздо сложнее предыдущей задачи, стереометрической.

Чтобы построить заданный пятиугольник, можно на окружности последовательно отметить точки с градусными мерами дуг: 30, 60, 60, 90, 120. Через каждую отмеченную точку проведем касательную. Точки пересечения касательных и есть вершины нашего пятиугольника.



Если каждую вершину пятиугольника соединить с центром окружности, то пятиугольник разобьется на 5 частей, каждая из которых построена следующим образом. Из центра окружности проведены 2 радиуса, угол между которыми равен α, α принимает последовательно значения: 30°, 60°, 60°, 90° и 120°. Из концов радиусов проводим к ним два перпендикуляра. Нетрудно проверить, что площадь построенной фигуры равна $r^2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. В итоге площадь пятиугольника равна $S=r^2\cdot\left(\operatorname{tg}15°+\operatorname{tg}30°+\operatorname{tg}30°+\operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}60°\right)$. Заметим, что $\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}\left(45°-30°\right)=2-\sqrt{3}$. Подставив это и остальные значения тангенса, имеем $S=r^2\cdot\dfrac{9+2\sqrt{3}}{3}$. Из уравнения $4r^4-36r^2+69=0$ следует, что $r^2=\dfrac{9-2\sqrt{3}}{2}$. Искомая площадь равна 11,5. Ответ. 11,5

C1 Найдите наименьшее значение функции $y=13\cdot 2^{\log_{0,5}(2x-11)-\log_{0,5}\left(x^2+12\right)}$.

Умение исследовать свойства сложной функции потребуется при решении задачи С1.

В области определения $x>5{,}5$ заданная функция может быть записана в виде $y=13\cdot\dfrac{x^2+12}{2x-11}$. Соответственно, $y'=13\cdot\dfrac{x^2-11x-12}{(2x-11)^2}$ и наша функция (проверьте знаки производной) убывает от 5,5 до 12 и возрастает при значениях аргумента, больше или равных 12. Следовательно, наименьшее значение функции достигается при аргументе $x=12$. Вычисляя соответствующее значение функции, получаем искомый результат. Ответ. 156

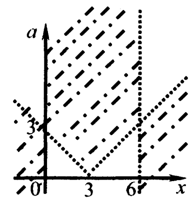
C2 Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $2^{2x^2}-\left(2^3+2^8\right)\cdot 2^{x^2+2x+2}+2^{11+4x}=0$.

В задании С2 надо проявить умение использовать несколько приемов при решении уравнений. При этом могут встретиться иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические уравнения и их комбинации.

Поделим обе части нашего уравнения на величину 2^{4x}, после чего наше уравнение запишется в виде $2^{2\left(x^2-2x\right)}-\left(2^3+2^8\right)\cdot 2^{x^2-2x}+2^{11}=0$. Полученное уравнение является квадратным относительно $t=2^{x^2-2x}$, причем, с учетом обратной теоремы Виета, корнями являются числа $t_1=2^3$ и $t_2=2^8$. В итоге корнями первоначального уравнения являются числа: – 1, – 2, 3, 4. Их произведение равно 24. Ответ. 24.

С3 Найдите сумму целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-6) \geq (a+3)(|x-3|-3)$ содержит все члены некоторой геометрической прогрессии с первым членом, равным 4, и знаменателем $-3 < q < -1$.

Умение решать задачи с параметром проверяется в задаче С5.



Общая идея решения задачи будет следующей. На плоскости Оха мы отметим те пары чисел $(x; a)$, т.е. точки с этими координатами, которые удовлетворяют заданному неравенству.

При этом вначале заметим, что $x(x-6) = (x-3)^2 - 9$. Отсюда мы упростим само первоначальное неравенство, приведя его к виду $(|x-3|-3)(|x-3|-a) \geq 0$. Теперь проведем линию $|x-3|=3$, что равносильно двум прямым $x=0$ и $x=3$, а также линию $a=|x-3|$. При этом плоскость разобьется на части, каждая из которых либо целиком является решением нашего неравенства, либо целиком не является этим решением. На рисунке заштрихована та часть плоскости, которая определяет решение неравенства.

Так как первый член прогрессии равен 4, то $a \geq 1$. Непосредственно видно, что при $a \geq 15$ второй член прогрессии обязательно выходит за рамки множества решений. Искомыми значениями a будет множество $[1; 15)$. Сумма целых a равна 105.

Ответ. 105

***C4** Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетами $AB = 1$ и $BC = 4$. Высота призмы равна 8. Найдите объем пирамиды с вершиной в точке C_1 и основанием, совпадающим с сечением призмы плоскостью, проходящей через середины ребер BC, BB_1 и A_1B_1.

В задании С4 проверяется умение решать стереометрическую задачу на комбинацию геометрических тел.

Непосредственное нахождение площади основания и высоты нужной нам пирамиды является очень сложной задачей. Поэтому мы пойдем на некоторую хитрость.

Рассмотрим еще одну такую же призму и приставим их друг к другу таким образом, чтобы получился прямоугольный параллелепипед со сторонами 1, 4, 8. Если в качестве основания новой пирамиды взять сечение параллелепипеда той же плоскостью, а вершину оставить ту же, то объем пирамиды увеличится в 2 раза.

В прямоугольном параллелепипеде эта задача может быть решена непосредственно, однако ситуация еще более упростится, если мы рассмотрим куб со стороной 1 и пирамиду в нем с такими же условиями построения. Объем этой третьей пирамиды будет в 32 раза (4х8) меньше предыдущей.

В единичном кубе объем пирамиды равен $\frac{3}{8}$, следовательно, искомый объем равен 6. Основные события при этом разворачиваются в диагональном сечении куба. Ответ. 6.

C5 Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 - 2x^2 = 3xy, \\ 2xy - 2x\sin\pi x = \sin\pi x\cos\pi y - y\cos\pi y. \end{cases}$$

Уметь решать и проводить исследование решения системы, содержащей уравнения разного вида, необходимо при выполнении задания С5.

Системы могут содержать уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические). Возможно нахождение решения по заданному условию.

В данном случае ключом к исследованию системы является тот факт, что каждое из уравнений представляется в виде равенства нулю произведения двух относительно простых выражений.

Итак, система может быть записана в виде $\begin{cases}(2y+x)(y-2x)=0, \\ (y-\sin\pi x)(2x+\cos\pi y)=0.\end{cases}$ Сделаем эскизы графиков функций $y=\sin\pi x$, $y=2x$, $x=-2y$ и кривой $x=-0{,}5\cos\pi y$. Мы видим, что прямая $x=-2y$ пересекает график функции $y=\sin\pi x$ в 5 точках, одна из которых – начало координат и имеет одну общую точку с кривой $x=-0{,}5\cos\pi y$. Прямая $y=2x$ пересекает график функции $y=\sin\pi x$ в трех точках с координатами $(-0{,}5;-1)$, $(0;0)$, $(0{,}5;1)$. Таким образом, число различных точек достигло 8. Рассмотрим общие точки прямой $y=2x$ и кривой $x=-0{,}5\cos\pi y$. Здесь появляется новая точка с отрицательными координатами, старая точка $(0{,}5;1)$ и рядом с последней точкой – еще одна точка, т.к. касательная к кривой $x=-0{,}5\cos\pi y$ в точке $(0{,}5;1)$ параллельна оси Oy и прямая $y=2x$ пересекает кривую $x=-0{,}5\cos\pi y$ в двух точках с положительными координатами. Таким образом, добавляются 2 точки. Ответ. 10

Часть 1

№ вар.	Номера заданий									
	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**
1	2	2	1	1	1	3	3	4	2	1
2	3	4	4	4	1	2	2	1	4	1
3	3	1	2	4	4	1	2	2	3	1
4	3	4	3	3	1	4	1	3	2	2
5	1	3	2	2	3	2	2	4	1	3
6	4	2	3	1	3	3	1	1	3	4
7	2	1	1	2	4	3	4	4	4	3
8	2	1	3	4	2	2	1	4	2	3
9	4	3	1	1	4	4	3	2	3	1
10	2	3	2	2	3	2	3	2	4	3

Часть 2

№ вар.	Номера заданий					
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
1	-1,75	-26	1,8	4,5	6	14
2	-19	9	-45	-6	2	11
3	7	2	3,25	3	4	10
4	12	-0,7	12,8	13	1	-0,3
5	8	7	8	8	2	16,25
6	16	-0,5	17	36	2	-3
7	-2	23	2,25	10	2	1,5
8	20,8	71	82	-6	5	1
9	-10	50	7	-27	2	37
10	-29	4	12	36	6	-125

№ вар.	Номера заданий				
	B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**
1	-20	6,12	158,7	10	15
2	3	24	220	2,4	22,5
3	1	11	1309	18	75
4	8	120	676	6	10,625
5	4	225	14	32,5	12
6	3	-9	-15	55	1,5
7	-6	5	800	2,4	6,4
8	10	2,5	121	4	72
9	6	12	90	20,8	162
10	4	14,25	8738	56	11,5

№ вар.	Номера заданий				
	С1	**С2**	**С3**	**С4**	**С5**
1	4	573	5	2	5
2	8	4,5	0,387	3	4
3	-21	-49	1189	4,5	-945
4	7	-0,2	0,65	15	13
5	2,5	16	530	66	152
6	-1	11,25	6	42	6
7	7	0,5	189	29	4
8	12	2,5	1,6	3	8
9	25	8	-55	432	12
10	156	24	105	6	10

ОБЩИЕ КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Решения заданий С1 – С5 Части 3 (с развернутым ответом) оцениваются экспертной комиссией. На основе критериев, представленных в приведенной ниже таблице, за выполнение каждого задания в зависимости от полноты и правильности данного учащимся ответа выставляется от 0 до 2 баллов в задачах С1, С2 и от 0 до 4 баллов в задачах С3, С4, С5.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения математических заданий с развернутым ответом в задачах С1, С2
2	Получен правильный ответ, и этот ответ полностью обоснован.
1	Приведена верная последовательность основных шагов решения. Допустимы 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка. В результате описки или ошибки возможен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1, 2 балла.

Отметим, что приведенная шкала оценок в 0, 1, 2 балла не является равномерной. Решение, оцениваемое «1 балл», существенно ближе к идеальному решению: оно отличается от него лишь наличием неточностей или негрубой ошибкой.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения математических заданий с развернутым ответом в задачах С3, С4, С5
4	Получен правильный ответ, и этот ответ полностью обоснован.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Обоснованы **все ключевые** моменты решения. Необходимые для решения чертежи, рисунки выполнены безошибочно. Допустима негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность хода решения. В результате ошибки возможен неверный ответ.
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения и/или обоснована **часть ключевых моментов** решения. При этом допустимы негрубые ошибки в чертежах и рисунках, приведенных в решении, одна-две негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок возможен неверный ответ.

1	Общая идея, способ решения верные, но не выполнены некоторые промежуточные этапы решения или решение не завершено. Большинство ключевых моментов неверно обосновано. При этом допустимы негрубые ошибки в чертежах, рисунках, приведенных в решении, негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях. В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

Отметим, что приведенная шкала оценок в 0, 1, 2, 3, 4 балла не является равномерной. Решение, оцениваемое 3 баллами, существенно ближе к идеальному решению: оно отличается от него лишь наличием неточностей. В свою очередь, оценка «2 балла» ближе к оценке «3 балла», нежели к оценке «1 балл».

Подписано в печать 15.08.07. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$.
Тираж 35000. Печать офсетная.

Отпечатано в ОАО «Московская типография № 6»
115088, г. Москва, ул. Южнопортовая, д. 24
Заказ № 887.