ИНТЕНСИВНАЯ ПОДГОТОВКА

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ 2010

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

ЭКСМО

ИНТЕНСИВНАЯ ПОДГОТОВКА
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ 2010

В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

МОСКВА эксмо 2010

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1 я7
К 75

Об авторах:
В. В. Кочагин — *кандидат педагогических наук*
М. Н. Кочагина — *кандидат педагогических наук*

Кочагин В. В.

К 75 ЕГЭ 2010. Математика : Сборник заданий / В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина. — М. : Эксмо, 2010. — 208 с. — (ЕГЭ. Сборник заданий).

ISBN 978-5-699-36144-1

Учебное пособие адресовано *выпускникам* средней школы и *абитуриентам* для подготовки к единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике.

Книга включает:

- задания разных типов по различным темам ЕГЭ;
- ответы ко всем заданиям;
- критерии оценивания заданий с развернутым ответом.

Издание окажет помощь *учителям, репетиторам* и *родителям* при подготовке учащихся к ЕГЭ по математике.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1 я7

ISBN 978-5-699-36144-1

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга адресована *учащимся 10—11-х классов* для подготовки к единому государственному экзамену. Материал данного пособия представлен в виде разделов, соответствующих основным темам школьного курса математики, присутствующим в ЕГЭ. Для каждой темы предложены задания части I и части II, а также обобщающие контрольные работы. К заданиям части II даются указания. Ко всем заданиям приведены ответы.

Тренировочные задания позволят учащимся систематически, при прохождении каждой темы, готовиться к этому экзамену. Достаточно будет в 10—11-х классах решать задания из этого пособия параллельно с темой по математике, изучаемой на школьных уроках, а в конце 11-го класса, в качестве повторения, — варианты ЕГЭ по математике.

Данное пособие может использоваться совместно с любым учебником алгебры и начала анализа для 10—11-х классов. С учебниками А.Г. Мордковича, Ш.А. Алимова и др., А.Н. Колмогорова — в полном объеме. С учебниками других авторов (Н.Я. Виленкина, М.И. Башмакова) — с исключением некоторых заданий, с которыми в момент изучения темы учащиеся еще незнакомы. После изучения соответствующего материала, на этапе обобщающего повторения, к этим заданиям можно вернуться.

Книга также будет полезна *учителям математики*, так как дает возможность эффективно организовать подготовку учащихся к единому экзамену непосредственно на уроках, в процессе изучения всех тем. Можно предложить несколько вариантов работы:

— включение заданий тестового характера в систему заданий для 10—11-х классов вместе со стандартными упражнениями учебника;

— использование заданий и контрольных работ на этапе обобщающего повторения по каждой теме или на этапе итогового повторения и подготовки к ЕГЭ в конце 11-го класса;

— контроль и коррекция знаний учащихся.

В структуре экзаменационной работы выделены две части, которые различаются по содержанию, форме записи ответа, степени сложности и числу заданий.

В данном учебном пособии также представлены две группы заданий. Формы записи ответов для разных заданий соответствуют формулировкам заданий в ЕГЭ.

Для каждого из заданий **первой части** ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Единицы измерений не пишут. В этом разделе содержатся задания базового уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа», а также задания из различных разделов математики с 5-го по 11-й класс.

Задания **второй части** требуют развернутого ответа. При оформлении решений обращают внимание на правильную запись хода решения, наличие обоснований и верный ответ. В эту группу включаются самые сложные задания по геометрии и алгебре 7—11-х классов повышенного и высокого уровней сложности.

Надеемся, что данное пособие поможет учителям математики эффективно организовать подготовку к ЕГЭ на своих уроках, а старшеклассникам — систематизировать знания по математике, самостоятельно подготовиться к экзамену и успешно его сдать.

I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ (10—11-е КЛАССЫ)

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.1. Преобразования тригонометрических выражений

Содержание, проверяемое заданиями КИМ[1]: соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента, формулы сложения, формулы двойного угла, формулы приведения.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Найдите значение выражения $3\sin^2\beta + 10 + 3\cos^2\beta$.

B2. Найдите значение выражения $16 - 6\sin^2\beta - 6\cos^2\beta$.

B3. Вычислите: $\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ$.

B4. Вычислите: $\cos^2 15^\circ - \sin^2 75^\circ$.

B5. Упростите выражение $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} - 2\sin 2\beta + 0,29$.

B6. Вычислите: $\left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right)\cdot\sqrt{3}$ при $x = \frac{5\pi}{6}$.

---

[1] КИМ — контрольные измерительные материалы ЕГЭ.

B7. Дано: $\cos\beta = 0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите: $\sin\beta$.

B8. Дано: $\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{24}$ и $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Найдите: $\cos\beta$.

B9. Дано: $\operatorname{ctg}\beta = -1\frac{1}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите: $\cos 2\beta$.

B10. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\beta = -0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Найдите: $\sin(\alpha - \beta)$.

B11. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\beta = -0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Найдите: $\cos(\alpha + \beta)$.

B12. Найдите значение выражения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$, если

$\sin\beta = 0{,}11$.

B13. Найдите значение выражения $\sin(180^\circ - \beta)$, если $\sin\beta = -0{,}24$.

B14. Найдите значение выражения $\sin(270^\circ - \beta)$, если $\cos\beta = -0{,}41$.

B15. Найдите значение выражения $\cos(\beta - 270^\circ)$, если $\sin\beta = 0{,}59$.

B16. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}^2(\alpha - \pi)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}5$.

B17. Найдите значение выражения $\cos^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$, если

$\sin\alpha = 0{,}2$.

B18. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi-\alpha\right)-\mathrm{ctg}(6\pi+\alpha)}{1+\sin(2\pi-\alpha)},$$

если $\mathrm{ctg}\alpha = 8$.

B19. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi-\alpha\right)-\mathrm{ctg}(5\pi+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)-1},$$

если $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}25$.

B20. Найдите значение выражения $\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\sin\beta$, если $\sin(\alpha + \beta) = 0{,}17$.

B21. Найдите значение выражения $\cos(\alpha + \beta) + 2\sin\alpha\sin\beta$, если $\cos(\alpha - \beta) = 0{,}64$.

B22. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}\right)\cdot\sqrt{3},$$

если $\alpha - \beta = 150^\circ$.

B23. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{\cos(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta}{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}\right)\cdot 2\sqrt{3},$$

если $\alpha + \beta = 120^\circ$.

B24. Упростите выражение

$$\cos(\pi+2\alpha)+\sin(\pi+2\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

B25. Упростите выражение $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha.$

B26. Упростите выражение $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}+\cos\alpha-\sin\alpha.$

B27. Упростите выражение $19+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos2\alpha.$

B28. Упростите выражение $4\sin^2 2\alpha+16\sin^4\alpha-16\sin^2\alpha.$

B29. Упростите выражение $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)\cos^2(45^\circ-\alpha)}.$

B30. Вычислите: $\dfrac{\sin\beta+\cos\beta}{(\sin\beta-\cos\beta)^{-1}}$, если $\sin2\beta=-0{,}6;$ $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{3\pi}{4}.$

B31. Вычислите: $\dfrac{\cos\beta-\sin\beta}{(\sin\beta+\cos\beta)^{-1}}$, если $\sin2\beta=-0{,}8;$ $\dfrac{3\pi}{4}<\beta<\pi.$

B32. Вычислите: $16\operatorname{ctg}110^\circ\sin105^\circ\operatorname{tg}70^\circ\cos105^\circ.$

B33. Вычислите: $12\operatorname{ctg}140^\circ\sin75^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos75^\circ.$

B34. Вычислите: $\dfrac{1-2\sin^2 43^\circ}{\sin176^\circ+\sin4^\circ}.$

B35. Вычислите: $\dfrac{2\cos^2 48^\circ-1}{\sin186^\circ-\sin6^\circ}.$

B36. Вычислите: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos^4 75^\circ-\cos^4 15^\circ\right).$

B37. Найдите значение выражения $8\cos 2\beta$, если $2\cos 2\beta + 9\sin\beta - 4 = 0$.

B38. Найдите значение выражения $\cos 2\beta$, если $3\cos 2\beta + 11\sin\beta - 7 = 0$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C39. Вычислите: $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

C40. Вычислите: $16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

C41. Вычислите: $\sin 54^\circ \sin 18^\circ$.

C42. Найдите значение выражения $27\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

C43. Найдите значение выражения $81(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

C44. Вычислите: $\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$.

C45. Вычислите: $\frac{7\cos\alpha + 4\sin\alpha}{4\sin\alpha + 3\cos\alpha}$, если $4\sin 2\alpha = 15\sin^2\alpha + 1$.

C46. Упростите: $3\left(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha\right) - 2\left(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha\right)$.

1.2. Тригонометрические функции

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: значения функции, область определения функции, периодичность, множество значений функции, четность, нечетность, возрастание и убывание, ограниченность, сохранение знака функции.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Вычислите: $\operatorname{tg} 390° \cdot \sqrt{3}$.

B2. Вычислите: $\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right) \cdot \sqrt{3}$.

B3. Вычислите: $\cos\frac{11\pi}{6} \cdot \sqrt{3}$.

B4. Вычислите: $\operatorname{ctg}(-300°) \cdot 2\sqrt{3}$.

B5. Какое число из промежутка (2; 3) не входит в область определения функции $y = \operatorname{tg}(\pi x)$?

B6. Какое число из промежутка (1,4; 2,7) не входит в область определения функции $y = \operatorname{ctg}(\pi x)$?

B7. Найдите наибольшее значение функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

B8. Найдите наименьшее значение функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[-\pi; \frac{\pi}{4}\right]$.

B9. Найдите наибольшее значение функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

B10. Найдите наименьшее значение функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$.

B12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi + x).$$

B13. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x).$$

B14. Сколько целых чисел входит в множество значений функции $y = \sin 15^\circ \cos x + \cos 15^\circ \sin x$?

B15. Сколько натуральных чисел входит в множество значений функции

$$y = \cos\frac{\pi}{8}\cos x - \sin\frac{\pi}{8}\sin x?$$

B16. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 - \cos x$.

B17. Найдите наибольшее значение функции $y = 7 - \sin 2x$.

B18. Найдите наименьшее значение функции $y = 1 + 2\cos 3x$.

B19. Найдите наибольшее значение функции $y = 3 - 4\sin 5x$.

B20. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $\sin 11^\circ$.

B21. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $\cos 97^\circ$.

B22. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $2\sin 31^\circ$.

B23. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $2\operatorname{tg} 46^\circ$.

B24. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\sin 2x + 4$.

B25. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\sin x + 4\cos x$.

B26. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin 3x - 12$.

B27. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin x - 12\cos x$.

B28. Найдите наибольшее значение функции $y = \sin x\cos x$.

B29. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{2}(\sin 2x - \cos 2x).$$

B30. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \cos x - \sqrt{3}\sin x.$$

В31. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{9}{2\cos x+5}.$$

В32. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{8}{3\sin x-7}.$$

В33. Сколько целых чисел содержится во множестве значений функции $y = \sin^2 x$?

В34. Сколько целых чисел содержится во множестве значений функции $y = 2\sin^2 x + \sin x + 1$?

В35. Сколько целых чисел содержится во множестве значений функции $y = \cos 2x + \cos x - 1$?

В36. Найдите множество значений функции $y = \mathrm{tg}x\mathrm{ctg}x$.

В37. В какой четверти находится число x, если $\sin x + + \cos x = 1{,}01$?

В38. В какой четверти находится число x, если $\sin x + + \cos x = -1{,}02$?

В39. Вычислите: $5\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$.

В40. Вычислите: $\sqrt{3}\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

В41. Вычислите: $\sqrt{2}\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

В42. Вычислите: $\frac{8}{\pi}\mathrm{arcctg}(\cos\pi)$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C43. При каких значениях a функция $y = a\cos x + \sin x - a\sin x$ будет четной?

C44. При каких значениях a функция $y = a\cos x + \sin x - a\sin x$ будет нечетной?

C45. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$. Сравнить $f(f(0))$ и $g(g(0))$.

C46. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2x$. Найдите $f(g(0))$.

C47. Пусть $f(x) = \sin x$. Найдите $f(f(f(0)))$.

C48. Пусть $f(x) = \cos x$. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$, если $x \in [-200; 200]$.

C49. Пусть $f(x) = 16\cos^4 x - 4\cos x + 1$. Найдите сумму наибольшего и наименьшего корней уравнения $f(x) = 0$, если $x \in [-200\pi; 200\pi]$.

C50. Расположить в порядке возрастания: $\sin 2000^\circ$, $\cos 2000^\circ$, $\operatorname{tg} 2000^\circ$, $\operatorname{ctg} 2000^\circ$.

C51. Расположить в порядке убывания: $\sin 1$, $\cos 2$, $\operatorname{ctg} 3$, $\operatorname{tg} 4$.

C52. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{2}(\cos 200x + \sin 200x).$$

C53. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}(\cos 200x - \sin 200x)}}{2}.$$

1.3. Тригонометрические уравнения

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: общая формула решения уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\,x = a$, $\mathrm{ctg}\,x = a$, приемы решения тригонометрических уравнений: разложение на множители, замена переменной, использование свойств функций, использование графиков, использование нескольких приемов при решении тригонометрических уравнений, системы, содержащие одно или два тригонометрических уравнения, уравнения с параметром, уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $2\sin x + 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.

B2. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x + 3 = 0$. Ответ запишите в градусах.

B3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - 6 = 0$. Ответ запишите в градусах.

B4. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos(2x) = 0{,}5$. Ответ запишите в градусах.

B5. Укажите наименьший поожительный корень уравнения $\sin(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ запишите в градусах.

B6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = 1$. Ответ запишите в градусах.

B7. Укажите число корней уравнения $\sin 200x \cos 199x - \cos 200x \sin 199x = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 4\pi]$.

B8. Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$.

B9. Укажите ближайший к 0 корень уравнения $2\sin x + 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.

B10. Укажите ближайший к $\frac{\pi}{2}$ корень уравнения $2\cos x + \sqrt{3} = 0$. Ответ запишите в градусах.

B11. Укажите ближайший к π корень уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ запишите в градусах.

B12. Укажите ближайший к $\frac{3\pi}{2}$ корень уравнения $\sin x = \frac{-3}{2\sqrt{3}}$. Ответ запишите в градусах.

B13. Укажите число корней уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, которые лежат в промежутке $[0;\ 3\pi]$.

B14. Укажите количество корней уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, которые лежат в промежутке $[-\pi;\ 2\pi]$.

B15. Укажите число корней уравнения $\sin x = \frac{1}{3}$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

B16. Укажите число корней уравнения $\sin x = \frac{1}{3}$ на промежутке $[\pi;\ 2\pi]$.

B17. Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg} x = 14$ на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

B18. Укажите ближайший к $\frac{\pi}{6}$ корень уравнения $\cos(4x) = 1$. Ответ запишите в градусах.

B19. Найдите сумму корней уравнения $\cos(x + 2000\pi) = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$. Ответ запишите в градусах.

B20. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}(2x - 10°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ответ запишите в градусах.

B21. Решите уравнение $\cos(\pi x) = 1$. В ответе укажите произведение корней уравнения, принадлежащих промежутку $(1;\ 6)$.

B22. Решите уравнение $\sin(\pi x) = 1$. В ответе укажите сумму корней уравнения, принадлежащих промежутку $(1;\ 6)$.

B23. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$. Ответ запишите в градусах.

B24. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$. Ответ запишите в градусах.

B25. Определите число корней уравнения $\dfrac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$ из промежутка $[0;\ 2\pi]$.

B26. Определите число корней уравнения $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 0$ из промежутка $[0;\ 2\pi]$.

B27. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 2} + 2$ на промежутке $\left[-\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$?

B28. Сколько корней имеет уравнение $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 3\cos 2x = 2$ на отрезке $\left[-\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$?

B29. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin(\pi x)(\cos x - 2) = 0$.

B30. Укажите корень уравнения $\cos(\pi x)\left(\sin(2x) + \sqrt{2}\right) = 0$, принадлежащий промежутку $[2;\ 3]$.

B31. Укажите корень уравнения $\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащий промежутку $(0;\ \pi)$. Ответ запишите в градусах.

В32. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x + \cos(2x) = 2$. Ответ запишите в градусах.

В33. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\cos^2(\pi - x) + 5\sin x - 4 = 0$. Ответ запишите в градусах.

В34. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(2x) + 5\cos(-x) + 3 = 0$. Ответ запишите в градусах.

В35. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0,$$

принадлежащих промежутку $[-\pi;\ \pi]$. Ответ запишите в градусах.

В36. Укажите число корней уравнения

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3},$$

принадлежащих промежутку $[-\pi;\ 2\pi]$.

В37. Укажите наименьший положительный корень уравнения $3\cos x + \sin(-2x) = 0$. Ответ запишите в градусах.

В38. Укажите число корней уравнения $\sin(2x) = x$.

В39. Укажите число корней уравнения $\cos x = 10x$.

В40. Укажите число корней уравнения $\dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,$

принадлежащих промежутку $[-2\pi;\ 0]$.

В41. Укажите число корней уравнения $6\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 2$, принадлежащих промежутку $[-\pi;\ 0]$.

В42. Укажите число корней уравнения $\mathrm{tg}3x = \mathrm{tg}x$ из промежутка $\left[0;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

В43. Решите уравнение $4\cos x = x^2 + 4$.

В44. Решите уравнение $\sin\left(\frac{37\pi}{2} + x\right) = 3x^2 + 1$.

В45. Найти наибольший отрицательный корень уравнения: $(2\cos x - 1)\cdot\sqrt{\sin x} = 0$. Ответ запишите в градусах.

В46. Найдите сумму различных корней уравнения $\cos x\cos(5x) = \cos(6x)$, принадлежащих промежутку $[0;\ \pi]$. Ответ запишите в градусах.

В47. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos x - \cos y = -\sqrt{2}. \end{cases}$

В ответе запишите значение y в градусах $y \in [0;\ 360°]$.

В48. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin x + \sin y = -\sqrt{2}. \end{cases}$

В ответе запишите значение $x \in [0;\ 360°]$ в градусах.

В49. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x\cos y = -0{,}5, \\ \cos x\sin y = -0{,}5. \end{cases}$ В ответе запишите значение $x \in [-45°;\ 0°]$ в градусах.

B50. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos x \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \sin x \sin y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

В ответе запишите значение $y \in [-60°;\ 0°]$ в градусах.

B51. Укажите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $\sin x = \dfrac{a^2}{2} - 4$ имеет хотя бы одно решение.

B52. Укажите наименьшее натуральное значение a, при котором уравнение $\cos x = \dfrac{a^2}{2}$ не имеет решений.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C53. Укажите число корней уравнения

$$\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0,$$

принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$.

C54. Найдите сумму корней уравнения $\sin(2x)(\operatorname{tg}x - 1) = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$. Ответ запишите в градусах.

C55. Найдите сумму корней уравнения $\sin(2\pi x) + 6\cos(\pi x) = 3 + \sin(\pi x)$, принадлежащих промежутку $[-20;\ 20]$.

С56. Найдите сумму корней уравнения $\cos(2\pi x) - 3\sin(\pi x) + 1 = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 20]$.

С57. Решите уравнение $\cos^2 x + 0{,}5|\cos x|\cdot\sin x = 0$.

С58. Решите уравнение $\cos^2 x - 0{,}5|\cos x|\cdot\sin x = 0$.

С59. Решите уравнение $\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin(2x) = -2$.

С60. Решите уравнение $2\cos^2(2x) - \sin(3x) = 3$.

С61. Решите уравнение
$\sin^2 x + 0{,}25\sin^2(2x) - \sin x\cdot\sin^2(2x) = 0$.

С62. Решите уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = 3\sin x\cos x - 1$.

С63. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$.

С64. Решите уравнение $\cos^4 x + \sin^3 x = -1$.

С65. Укажите наименьшее значение b, при котором уравнение $\cos 2x - (3 + 2b)\cos x + 6b = 0$ имеет хотя бы один корень.

С66. Укажите наименьшее значение b, при котором уравнение $\cos^4 x - (3 + 2b)\cos^2 x + 6b = 0$ имеет хотя бы один корень.

С67. При каких значениях параметра уравнение $\cos^2 x - \cos x + a = 0$ имеет хотя бы одно решение.

С68. Найдите наименьшее натуральное значение a, при котором уравнение $\sin^4 x - 6\sin^2 x + a = 0$ не имеет решений.

С69. Решите уравнение $x^2 + y^2 + \cos^2 x = 2xy$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

Часть I

Инструкция для учащихся. Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Дано: cos = −0,8 и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите: $\sin(2\alpha)$.

B2. Какое число из промежутка (0; 1,4) не входит в область определения функции $y = \mathrm{tg}(\pi x)$?

B3. Найдите наименьшее значение функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

B4. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $\cos 61^\circ$.

B5. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $2\cos(\pi - x) - \sqrt{3} = 0$. Ответ запишите в градусах.

B6. Найдите значение выражения $\frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$, если $\mathrm{ctg}x = 15$, $\mathrm{ctg}y = -13$.

B7. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{15}{\sin x - 4}$.

B8. Укажите число корней уравнения $\frac{\sin x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0$.

B9. Укажите наибольшее целое значение a, при котором уравнение $(a - 2)\sin x = a^2 - 4$ имеет хотя бы одно решение.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C10. Укажите корни уравнения $0{,}5\sin 2x \operatorname{ctg} x - \cos x = \sin^2 x$, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

Вариант 2

Часть I

Инструкция для учащихся. Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Дано: $\sin = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Найдите: $\cos(2\beta)$.

B2. Какое число из промежутка $(0{,}4; 1{,}8)$ не входит в область определения функции $y = \operatorname{ctg}(\pi x)$?

B3. Найдите наименьшее значение функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

B4. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $\sin(-4^\circ)$.

B5. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\sin(\pi + x) - 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.

B6. Найдите значение выражения $\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$, если $\operatorname{tg} x = 19$, $\operatorname{tg} y = -17$.

B7. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{15}{\sin x + 4}$.

B8. Сколько корней имеет уравнение $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$?

B9. Укажите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $(a + 4)\cos x = a^2 - 16$ имеет хотя бы одно решение.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C10. Укажите число корней уравнения $0{,}5\sin(2x)\operatorname{tg} x - \sin x = \cos^2 x$, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$.

2. АЛГЕБРА

2.1. Преобразования иррациональных и степенных выражений

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: понятие корня степени n, свойства корня степени n, понятие степени с рациональным показателем, свойства степени с рациональным показателем.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Вычислите: $\sqrt[4]{81 \cdot 0{,}0001}$.

B2. Вычислите: $\sqrt[3]{0{,}9} \cdot \sqrt[3]{-0{,}03}$.

B3. Вычислите: $\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{24}$.

B4. Вычислите: $3 \cdot \sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$.

B5. Вычислите: $\left(-\sqrt[6]{17}\right)^6$.

B6. Вычислите: $\left(-3 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{9}}\right)^5$.

B7. Вычислите: $\sqrt[5]{81 \cdot 96}$.

B8. Найдите значение выражения: $5^{2x-1} \cdot 5^{-4x}$ при $x = -0{,}5$.

B9. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{-20 \cdot 25 \cdot 128}$.

B10. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$.

B11. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{121}\cdot\sqrt[3]{-11}$.

B12. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[6]{16}$.

B13. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{104}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{104}+2}$.

B14. Найдите значение выражения: $\dfrac{1}{7-\sqrt{39}}+\dfrac{1}{7+\sqrt{39}}$.

B15. Вычислите: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}-4^{-3}:4^{-5}$.

B16. Вычислите: $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}+5^{-3}:5^{-4}$.

B17. Вычислите: $\left(1+2^{0,5}\right)^{2}-2^{1,5}$.

B18. Вычислите: $\dfrac{2^{-2}\cdot5^{4}\cdot10^{-5}}{2^{-3}\cdot5^{3}\cdot10^{-4}}$.

B19. Представьте выражение $x\cdot\sqrt[4]{x}$ в виде степени с рациональным показателем. В ответе укажите показатель степени.

B20. Представьте выражение $\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{x}}$ в виде степени с рациональным показателем. В ответе укажите показатель степени.

B21. Представьте в виде степени с рациональным показателем $\dfrac{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}{\left(\sqrt[10]{x}\right)^2}$. В ответе укажите показатель степени.

B22. Вычислите: $\left(7\sqrt{6\sqrt{6}}+\sqrt[4]{216}\right)^{\frac{4}{3}}$.

B23. Вычислите: $\left(127\sqrt{2\sqrt[4]{8}}+\sqrt[4]{2\sqrt{32}}\right)^{-\frac{8}{7}}\cdot 1024$.

B24. Упростите выражение $\dfrac{6-4\sqrt{3}}{\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2}$.

B25. Упростите выражение

$$\left(\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}\right)^2+3\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}\right)^2-3\right).$$

B26. Вычислите: $\dfrac{7\sqrt{30}}{3\sqrt{10}-10\sqrt{3}}+\sqrt{3}+\sqrt{10}$.

B27. Вычислите: $64^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{324}$.

B28. Найдите значение выражения $27\cdot 36^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

B29. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[5]{-27}}{4^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-0,4}}$.

B30. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{\left(8-\sqrt{63}\right)^2}}{\sqrt[3]{8+\sqrt{63}}}+\sqrt{63}$.

B31. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}$.

B32. Вычислите: $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

B33. Упростите до целого числа выражение

$$\sqrt{10-\sqrt{96}}-\sqrt{10+\sqrt{96}}.$$

B34. Выражение $\sqrt{7-\sqrt{24}}-\sqrt{7+\sqrt{24}}$ является целым числом. Найдите его.

B35. Выражение $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ является целым числом. Найдите его.

B36. Упростите выражение $54^{\frac{1}{3}}+48^{\frac{1}{4}}-\sqrt[4]{243}-3\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}$.

B37. Упростите выражение $40^{\frac{1}{3}}+162^{\frac{1}{4}}-3\cdot\sqrt[4]{2}-2\cdot\sqrt[3]{5}$.

B38. Вычислите значение выражения: $\dfrac{\sqrt[3]{243}\cdot\sqrt[5]{16}}{3^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-0,6}}$.

B39. Упростите выражение $\dfrac{8-27^n}{4+2\cdot 3^n+9^n}+3^n$.

B40. Упростите выражение $\dfrac{8^m+27}{4^m-3\cdot 2^m+9}-2^m$.

B41. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}\right)^2-1+2x^{-\frac{1}{3}}$

при $x = 0{,}008$.

B42. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a}-16\sqrt{b}}{\left(a^{\frac{1}{8}}+2b^{\frac{1}{8}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{8}}-2b^{\frac{1}{8}}\right)^2}$ и найдите его значение при $a=\dfrac{1}{16}$, $b = 81$.

B43. Найдите значение выражения $\left(a^{-\frac{1}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{1}{5}}-a^{-\frac{4}{5}}\right)$ при $a = 10$.

B44. Упростите выражение $\dfrac{9x-y}{3x+x^{0,5}y^{0,5}}$ и найдите его значение при $x = 100$ и $y = 576$.

B45. Упростите выражение $\dfrac{4x-y}{2x+x^{0,5}y^{0,5}}$ и найдите его значение при $x = 324$ и $y = 81$.

B46. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a}+5\cdot\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}+5\sqrt{b}}$ и найдите его значение при $\dfrac{a}{b}=\dfrac{81}{256}$.

B47. Упростите выражение $\dfrac{3\left(\sqrt{a}-3\cdot\sqrt[4]{ab}\right)}{\sqrt[4]{ab}-3\sqrt{b}}$, если $\dfrac{a}{b}=7\dfrac{58}{81}$.

B48. Упростите выражение $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{1}{3}}}{a-1}\right)^{-1}-a^{\frac{1}{6}}$ и найдите его значение при $a = 64$.

B49. Упростите выражение $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}{1-a^2}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}$ и найдите его значение при $a = 0{,}001$.

B50. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}-1}$ при $y=39\dfrac{1}{16}$.

B51. Упростите выражение $\dfrac{x+8y}{x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+4xy^{\frac{2}{3}}}$ и найдите его значение при $x = 8$, $y = 27$.

B52. Упростите выражение $\dfrac{9xy^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{5}{3}}}{27y-x}$ и найдите его значение при $x = 8$, $y = 64$.

B53. Упростите выражение $\dfrac{4\cdot\sqrt[4]{9k}-2\sqrt{9k}}{-2+\sqrt[4]{9k}}:\sqrt[4]{9k}$.

B54. Упростите выражение $\dfrac{9\cdot\sqrt[3]{8m}-3\cdot\sqrt[6]{8m}}{2-6\cdot\sqrt[6]{8m}}:\sqrt[6]{8m}$ и найдите его значение при $m = 2000$.

B55. Упростите выражение $\left(\dfrac{3x^{\frac{1}{2}}}{3-x^{\frac{1}{2}}}+3\right)\left(9-6x^{\frac{1}{2}}+x\right)$ и найдите его значение при $x = 169$.

В56. Упростите выражение $7\cdot\left(\dfrac{a-16b}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}}-\dfrac{a\sqrt{a}-64b\sqrt{b}}{a-16b}\right)$ и найдите его значение при $a = 4$ и $b = 0{,}04$.

В57. Найдите значение выражения

$$\left(\left(x^{0,5}+2\right)^2-4\left(x^{0,5}+2\right)+4\right)^2$$

при $x=\sqrt{2000}$.

В58. Найдите значение выражения

$$\left(\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^3+3\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^2+3\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)+1\right)$$

при $x = 200$.

В59. Найдите значение выражения

$$\sqrt[4]{(3x-12)^4}-\sqrt[4]{(3x+12)^4}$$

при $x < -200$.

В60. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(2x-1)^4}-\sqrt[4]{(2x+1)^4}$ при $x > 200$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

С61. Найдите значение выражения $\sqrt{19-a}+\sqrt{10-a}$, если $\sqrt{19-a}-\sqrt{10-a}=1$.

С62. Найдите значение выражения $\sqrt{74-a^4}-\sqrt{10-a^4}$, если $\sqrt{74-a^4}+\sqrt{10-a^4}=4$.

С63. Найдите значение выражения $\sqrt{60-a^4+4a^2}$, если $\sqrt{6+a^2}+\sqrt{10-a^2}=6$.

С64. Упростите до целого числа выражение

$$\left(2\sqrt{6}-5\right)^2-10\sqrt{49-20\sqrt{6}}.$$

С65. Упростите до целого числа выражение

$$\left(4-3\sqrt{2}\right)^2+8\sqrt{34-24\sqrt{2}}.$$

С66. Упростите до целого числа выражение

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}.$$

С67. Упростите до целого числа выражение

$$\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}+\sqrt{2}.$$

С68. Значение выражения

$$50\cdot\left(\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}-\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}\right)$$

при x = 9,0169 является целым числом. Найдите его.

С69. Найдите значение выражения

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}$$

при x = 2000.

С70. Упростите выражение

$$\sqrt[4]{\left(1-2x+x^2\right)\left(x^2-1\right)(x-1)}\cdot\frac{\sqrt[4]{x+1}}{x^2+2x-3}$$

при $x\in[-1;\ 0]$.

С71. Сравните $\sqrt{2004}+\sqrt{2007}$ и $\sqrt{2005}+\sqrt{2006}$.

С72. Верно ли, что число $\dfrac{\sqrt{\left|8\sqrt{3}-14\right|}-\sqrt{14+8\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$ является целым числом?

С73. Найдите значение выражения

$$a^{\frac{2}{3}}+4a^{0,5}+6a^{\frac{1}{3}}+4a^{\frac{1}{6}}+1$$

при $a = 729$.

2.2. Иррациональные уравнения

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: приемы решения иррациональных уравнений — разложение на множители, замена переменной, использование свойств функций, использование графиков; использование нескольких приемов при решении иррациональных уравнений; системы, содержащие одно или два иррациональных уравнения; уравнения с параметром, уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

В1. Решите уравнение $\sqrt{8-\dfrac{x}{4}}=6$.

В2. Вычислите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{x^2-2x}=2$.

В3. Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt[3]{35-x^2}=2.$$

B4. Решите уравнение $\sqrt[4]{x^2-5}=\sqrt[4]{4x}$.

B5. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[3]{x^2-5}=\sqrt[3]{4x}$.

B6. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[3]{x^2+4x+6}=3$.

B7. Решите уравнение $x^2-6x+\sqrt{x-4}=\sqrt{x-4}-5$.

B8. Укажите целое число, ближайшее к корню уравнения $x^2-5x+\sqrt{2-x}=6+\sqrt{2-x}$.

B9. Укажите целое число, ближайшее к корню уравнения $12x^2-5x-2=0\cdot\sqrt{0,2-x}$.

B10. Решите уравнение $\sqrt{x+16}-x+4=0$.

B11. Решите уравнение $\sqrt{3-2x}=6+x$.

B12. Укажите целое число, ближайшее к корню уравнения $(x-7,1)\sqrt{x-19,6}=0$.

B13. Укажите целое число, ближайшее к корню уравнения $\sqrt{17,2-x}=x-17,2$.

B14. Укажите число корней уравнения

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-6}\cdot\sqrt{x^2-25}=0.$$

B15. Укажите целое число, ближайшее к корню уравнения $\sqrt{4x+2}-x=0$.

B16. Укажите целое число, ближайшее к корню уравнения $\sqrt{1-2x}+x=0$.

B17. Решите уравнение $\sqrt{x^2-6}=\sqrt{-5x}$.

B18. Укажите число корней уравнения $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-6}=4$.

B19. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^3+12x^2-11x-2}=0.$$

B20. Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^3}=3x.$$

B21. Найдите произведение корней уравнения

$$(2x-3)\cdot\sqrt[3]{2x^2-5x+2}=0.$$

B22. Найдите сумму корней уравнения

$$(x+1)\cdot\sqrt{2x^2+5x+2}=0.$$

B23. Решите уравнение $\sqrt{x^3-7x+4}=x-2$. В ответе укажите целое число, ближайшее к корню уравнения.

B24. Решите уравнение $\sqrt{4x+2}-x=0$. В ответе укажите целое число, ближайшее к корню уравнения.

B25. Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt{2x^2-2}=5-x^2.$$

B26. Найдите разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $\sqrt{13-x^2}=7-x^2$.

B27. Найдите произведение корней уравнения

$$10\cdot\sqrt[6]{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}-3=0.$$

B28. Найдите произведение корней уравнения

$$4-9\cdot\sqrt[4]{x}+2\cdot\sqrt{x}=0.$$

B29. Решите уравнение $\sqrt{x^2-3x+11}-5=x^2-3x$. В ответе укажите среднее арифметическое его корней.

B30. Найдите наименьший корень уравнения

$$x^2+3=1{,}5(x+4)+\sqrt{2x^2-3x+2}.$$

B31. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-1=2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$. В ответе укажите число корней.

B32. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}=1{,}5.$

B33. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+2-2x^2}-x=0$. В ответе укажите разность между наибольшим и наименьшим корнем.

B34. Найти произведение корней уравнения

$$\sqrt[4]{(x+1)^4}=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}.$$

B35. Найти произведение корней уравнения

$$\sqrt[4]{(x-2)^4}=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}.$$

B36. Укажите число корней уравнения

$$\sqrt{\left(x^2-x-6\right)^2}=x-2.$$

B37. Укажите число корней уравнения

$$\left(\sqrt{x^2-x-6}\right)^2=x-2.$$

B38. Решите уравнение $\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2=9x+6.$

B39. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[3]{\left(x^2-x-6\right)^2}=x-2.$

B40. Решите уравнение $\sqrt{5x-4}=\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}.$

B41. Решите уравнение $\sqrt{4x+5}=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

B42. Укажите число корней уравнения $\sqrt{x+17}=200x.$

B43. Укажите число корней уравнения $\sqrt[3]{x}=0{,}1x.$

B44. Укажите число корней уравнения $x^{\frac{1}{3}}=x+200.$

B45. Укажите число корней уравнения $x^{\frac{1}{3}}=(x-200)^2.$

B46. Укажите число корней уравнения $x^{\frac{1}{3}}=-(x-200)^2.$

B47. Укажите число корней уравнения $\sqrt[5]{x}=x^2+200.$

B48. Укажите число корней уравнения $\sqrt[7]{x+200}=x^{200}$.

B49. Укажите число корней уравнения $x^{\frac{1}{7}}+200=x^{200}$.

Часть II

> **Инструкция для учащихся.** Запишите решение с полным его обоснованием.

C50. Решите уравнение $\sqrt{3x+7}+\sqrt{x+6}+\sqrt{17x-15}=13$.

C51. Решите уравнение $\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5$.

C52. Решите уравнение $\sqrt{129-x}=3x-13$.

C53. Решите уравнение $\sqrt{x-7}+\sqrt{3-x}=92$.

C54. Решите уравнение

$$\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0.$$

C55. Решите уравнение

$$\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-2x-15}+(x+3)(2000-x)=0.$$

C56. Решите уравнение $\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$.

C57. Решите уравнение $x^2+4x+25+6\left(x+\sqrt{x+5}\right)=0$.

C58. Решите уравнение $x^2+36+3\left(4x+\sqrt{x+6}\right)=0$.

C59. Решите уравнение

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2.$$

С60. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

С61. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{x-y+5}=3,\\ \sqrt{x+y-5}=11-2x.\end{cases}$

С62. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6.\end{cases}$

С63. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x+15}=2.$

С64. Решите уравнение $\sqrt{x^2+4x+8}=2-\sqrt{x^2-4}.$

С65. Решите уравнение $(x+2000)\sqrt{x-a}=0$ при всех значениях a.

С66. Решите уравнение $(x-a)\sqrt{x-2000}=0$ при всех значениях a.

С67. При каких значениях a уравнение

$$\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x-a}=0$$

имеет ровно два решения?

С68. При каких значениях a уравнение

$$(x-a)\sqrt{x^2-4x+3}=0$$

имеет единственное решение?

С69. Укажите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{x-a}=x+4$ имеет единственное решение.

C70. Укажите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{x+2a}=x-3$ имеет единственное решение.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Вычислите: $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

B2. Вычислите: $\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^6$.

B3. Вычислите: $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{4}$.

B4. Представьте в виде степени с рациональным показателем $\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{x}$. В ответе укажите показатель степени.

B5. Решите уравнение $\sqrt{19-x^2}=3$. (Если корней уравнения более одного, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B6. Решите уравнение $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{4x}$. (Если корней уравнения более одного, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B7. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2}+\sqrt{16b^2}+4b$ при $a=-2000$, $b=-3000$.

B8. Найдите сумму корней уравнения

$$(x-1)\sqrt{2-3x-2x^2}=0.$$

B9. Упростите выражение $\dfrac{x-16}{x+x^{0,5}+1}:\dfrac{x^{0,5}+4}{x^{1,5}-1}$ и найдите его значение при $x=2,25$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C10. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-5x+6}-5+\frac{1}{x}\left(\sqrt{5x-x^2-6}+10\right)=0.$$

Вариант 2

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Вычислите: $810000^{0,25}$.

B2. Вычислите: $\left(-3\sqrt{2}\right)^4$.

B3. Вычислите: $\sqrt[4]{144}\cdot\sqrt[4]{9}$.

B4. Представьте в виде степени с рациональным показателем: $\dfrac{\sqrt{x\sqrt[5]{x}}}{x}$. В ответе укажите показатель степени.

B5. Решите уравнение $\sqrt{36-x^2}=3$. (Если корней уравнения более одного, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B6. Решите уравнение $\sqrt{7-x^2}=\sqrt{-6x}$. (Если корней уравнения более одного, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B7. Найдите значение выражения $\sqrt{9a^2}+\sqrt{b^2}+3a$ при $a=-1000$, $b=-2000$.

B8. Найдите сумму корней уравнения

$$(2x-3)\sqrt{2x^2-5x+2}=0.$$

B9. Упростите выражение $\dfrac{x-9}{x-x^{0,5}+1}:\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}+1}$ и найдите его значение при $x=6{,}25$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C10. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+3}-1+\frac{1}{x}\left(\sqrt{4x-x^2-3}+3\right)=0.$$

2.3. Преобразования логарифмических выражений

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: понятие логарифма, свойства логарифмов (логарифм произведения и сумма логарифмов, логарифм частного и разность логарифмов, логарифм степени и произведение числа и логарифма, формула перехода от одного основания логарифма к другому, логарифм произведения и частного степеней, сумма и разность логарифмов с одинаковыми основаниями, сумма и разность логарифмов с различными основаниями, основное логарифмическое тождество, другие комбинации свойств логарифмов, десятичные и натуральные логарифмы, тождественные преобразования логарифмических выражений).

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Вычислите: $\log_{0,3}\dfrac{1}{0,09}$.

B2. Вычислите: $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$.

B3. Вычислите: $\log_{625}25$.

B4. Вычислите: $\log_5 125$.

B5. Вычислите: $\log_6 8 - \log_6 2 + \log_6 9$.

B6. Вычислите: $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \dfrac{25}{4}$.

B7. Найдите значение выражения $\log_3 81 - \log_3 27$.

B8. Найдите значение выражения

$$\log_3 15-\log_3\frac{5}{9}+\log_3\frac{1}{81}.$$

B9. Вычислите: $\log_{35}7+\dfrac{1}{\log_5 35}$.

B10. Укажите значение выражения $\log_{\sqrt{7}}\dfrac{1}{7}+3^{\log_3 7}$.

B11. Укажите значение выражения $\log_{\sqrt{7}}\dfrac{1}{7}+3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$.

B12. Укажите значение выражения $\log_{36}16-\log_6\dfrac{1}{9}$.

B13. Вычислите: $\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 16}$.

B14. Вычислите: $2^{\log_{\sqrt{2}} 3}$.

B15. Найдите значение выражения $10^{1-\lg 5}$.

B16. Укажите значение выражения $\left(\sqrt{6}\right)^{-\frac{2}{\log_9 6}}$.

B17. Найдите значение выражения

$$(\log_5 36+\log_5 2-\log_5 8)\cdot\log_9\frac{1}{25}.$$

B18. Найдите значение выражения

$$\log_3 12-\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4.$$

B19. Укажите значение выражения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4\log_{\frac{1}{3}} 2}$.

B20. Укажите значение выражения $\log_8 \log_4 \log_2 16$.

B21. Укажите значение выражения $\log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$.

B22. Укажите значение выражения $\log_{0,5} 32 - \log_7 \frac{\sqrt{7}}{49}$.

B23. Укажите значение выражения $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

B24. Укажите значение выражения

$$2^{\log_8 125} + \log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}.$$

B25. Укажите значение выражения $\frac{\lg 128}{\lg 4}$.

B26. Укажите значение выражения $\log_6 \frac{36}{a}$, если $\log_6 a = -6$.

B27. Найдите значение выражения $\log_c \left(16c^2\right)$, если $\log_c 2 = -3$.

B28. Найдите значение выражения $\log_a \frac{81}{a^4}$, если $\log_a 3 = 2$.

B29. Найдите значение выражения

$$(0,1)^{\lg 0,1} - 10^{\log_{1000} 64} + 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}.$$

B30. Найдите значение выражения

$$3\log_2 49 \cdot \log_7 2 - 2^{\lg 2} \cdot 5^{\lg 2}.$$

B31. Найдите значение выражения

$$4\sqrt{3}+5^{\log_5 \frac{3}{5}}-15^{0,5+\log_{15}\frac{4}{\sqrt{5}}}.$$

B32. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20+3\log_2 2}$.

B33. Найдите значение выражения

$$\log_9 15+\log_9 18-2\log_9\sqrt{10}.$$

B34. Найдите значение выражения

$$6\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7.$$

B35. Найдите значение выражения

$$\log_2 14-\log_2 5\cdot\log_5 3\cdot\log_3 7.$$

B36. Найдите значение выражения

$$(\log_3 4+\log_2 9)^2-(\log_3 4-\log_2 9)^2.$$

B37. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

B38. Найдите значение выражения

$$\log_4 24-\log_4 9\cdot\log_9 13\cdot\log_{13} 6.$$

B39. Найдите значение выражения

$$(\log_7 22-\log_7 12+\log_7 6)\cdot\log_{11} 7.$$

B40. Найдите значение выражения $3^{\log_5 7}-7^{\log_5 3}$.

B41. Найдите значение выражения $9^{\log_3(1+0,5+0,25+\ldots)}$.

B42. Упростить: $6^{-0,5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0,5+\log_2 0,5}$.

B43. Упростить: $\dfrac{1-\lg^2 5}{2\lg\sqrt{10}-\lg 5} - \lg 5$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C44. Вычислите: $\log_{3\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$, если $\log_9 6 = a$.

C45. Вычислите: $\log_{2\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt[3]{12}}$, если $\log_4 6 = a$.

C46. Найдите значение выражения

$$\frac{\log_7^2 14 + \log_7 14 \cdot \log_7 2 - 2\log_7^2 2}{\log_7 14 + 2\log_7 2}.$$

C47. Найдите значение выражения

$$\frac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - (\log_3 2)\log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18}.$$

C48. Найдите значение выражения

$$\left[\left(\frac{\log_4^2 3+1}{2\log_4 3}-1\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\log_4^2 3+1}{2\log_4 3}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\sqrt{2\log_4 3}.$$

C49. Найдите значение выражения

$$\left[\left(\frac{\log_3^2 4+1}{2\log_3 4}-1\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\log_3^2 4+1}{2\log_3 4}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\sqrt{2\log_3 4}.$$

C50. Найдите значение выражения

$$\left(\left(\log_4^4 3+\log_3^4 4+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

C51. Найдите значение выражения

$$\left(\left(\log_3^4 2+\log_2^4 3+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.4. Логарифмические уравнения и неравенства

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: решение логарифмических уравнений, приемы решения логарифмических уравнений (разложение на множители, замена переменной, использование свойств функций, использование графиков), использование нескольких приемов при решении логарифмических уравнений, решение комбинированных уравнений, уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, уравнения с параметром; системы, содержащие одно или два логарифмических уравнения; логарифмические неравенства.

Часть 1

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Решите уравнение $11\cdot 2^{\log_2 x}=x+70$.

B2. Решите уравнение $13^{\log_{13}(x+7)}=2x-20$.

B3. Решите уравнение $\log_3 x+\log_3 2=\log_3 54$.

B4. Решите уравнение $\log_{0,3} x + \log_{0,3} 5 = \log_{0,3} 55$.

B5. Решите уравнение $\log_7(x+8) - \log_7 11 = \log_7 2$.

B6. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{7}}(2x+5) - \log_{\frac{1}{7}} 6 = \log_{\frac{1}{7}} 2$.

B7. Решите уравнение $\log_7(2x + 5) = 2$.

B8. Решите уравнение $\log_2(2x + 5) = 7$.

B9. Решите уравнение $\log_2(2x - 5) = -1$.

B10. Решите уравнение $\log_{0,4}(6-x) = -1$.

B11. Решите уравнение $\log_2(\log_7 x) = 0$.

B12. Решите уравнение $\log_7(\log_2 x) = 0$.

B13. Решите уравнение $\log_5\left(\log_2\left(\log_7 x\right)\right) = 0$.

B14. Решите уравнение $\log_7\left(\log_2\left(\log_5 x\right)\right) = 0$.

B15. Решите уравнение $\log_4(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \frac{1}{2}$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B16. Решите уравнение

$$\log_3(x+2) = \left(\log_5(x+7)\right) \cdot \log_3(x+2).$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B17. Решите уравнение

$$\log_5(x-4)=(\log_3(x+2))\cdot\log_5(x-4).$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B18. Решите уравнение $\log_5 x^2 = 2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B19. Решите уравнение $\log_2 x^2 = 5$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B20. Решите уравнение $\log_x 16 = 2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B21. Решите уравнение $\log_{-x} 16 = 2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B22. Решите уравнение $\log_{x^2} 16=2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B23. Решите уравнение $\log_{x^2} 81=2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B24. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\log_2(2x)\le\log_2(x+4)$.

В25. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_3(2x-3)\le\log_3(x+9)$.

В26. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\log_{0,5}(3x)\ge\log_{0,5}(x+16)$.

В27. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{0,2}(4x-6)\ge\log_{0,2}(x+33)$.

В28. Найдите сумму всех целых чисел, являющихся решением неравенства $\lg x \le 1$.

В29. Найдите произведение всех целых чисел, являющихся решением неравенства $\log_{0,5} x\ge -2$.

В30. Найдите сумму всех целых чисел, являющихся решением неравенства $\log_3 x < 2$.

В31. Найдите произведение всех целых чисел, являющихся решением неравенства $\log_{\frac{1}{3}} x\ge -1$.

В32. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+3x+12\right)<\log_{\frac{1}{3}}(9-x)$.

В33. Найдите сумму целых решений неравенства

$\log_2\frac{7}{x}>1$.

В34. Сколько целых чисел, принадлежащих отрезку [7; 17], являются решением неравенства

$\log_{0,5}\left(7x^{-1}\right)>1$.

В35. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $\log_3\frac{x-7}{2x-5}<0$.

B36. Решите уравнение $2\log_4^2 x-\log_4 x-1=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B37. Решите уравнение $2\log_4 x-\sqrt{\log_4 x}-1=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B38. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y_1 = \log_3(2x - 1)$ и $y_2 = 2 - \log_3(x + 1)$.

B39. Найдите ординату точки пересечения графиков функций $y_1 = \log_3(x + 2)$ и $y_2 = \log_3(x - 6)$.

B40. Найдите сумму целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt{1-\log_3 x}$.

B41. Найдите произведение целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt{\log_{0,5} x+2}$.

B42. Найдите наименьшее целое число, входящее в область определения функции $y=\dfrac{1}{\log_2(x-3)}$.

B43. Укажите число корней уравнения

$$\log_{0,7}\left(x^4+1\right)=\log_{0,7}(2x^2).$$

B44. Укажите число корней уравнения

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^4-1\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(2x^2-2\right).$$

B45. Укажите наибольшее целое решение неравенства $8^{\log_8(3-2x)}\ge -3$.

B46. Сколько целых чисел являются решением неравенства $8^{\log_8(3-2x)} \le 8$?

B47. Решите уравнение $\log_2(x-2)+0{,}5\log_2(5-4x)^2=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B48. Решите уравнение $\log_5(2-x)+0{,}5\log_5(4x-11)^2=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B49. Найдите значение выражения $x+y$, если $(x;\ y)$ — решение системы $\begin{cases}4\log_2 x+5\log_5 y=3,\\ 2\log_2 x+5\log_{0,2} y=9.\end{cases}$

B50. Укажите сумму целых решений неравенства $\log_3 x>\log_3(5-x)$.

B51. Укажите число целых решений неравенства $\log_{\frac{1}{7}}(2x+3)<\log_{\frac{1}{7}}(3x-2)$.

B52. Укажите число корней уравнения

$$\log_2(x-6)=0{,}5\log_2 x.$$

B53. Найдите произведение корней уравнения

$$2^{|\log_2 x|}=3.$$

B54. Решите уравнение $10^{1-\lg x}=100^{2+\lg x}$.

B55. Решите неравенство

$$\log_3(x+7)<\log_3(5-x)-\log_{\frac{1}{3}}(3-x).$$

В ответе укажите число целых решений неравенства.

B56. Решите уравнение $\log_5^3 x + 3\log_5^2 x = -\dfrac{1}{\log_x \sqrt{5}}$. В ответе запишите число корней уравнения.

B57. Решите уравнение $\log_2(3-x) = 6x^{205} - 5$.

B58. Решите неравенство

$$\log_2 24 \geq \log_2(16-x) + \log_2(2x-6).$$

В ответе укажите число целых решений неравенства.

B59. Укажите сумму корней уравнения

$$\lg x^2 + \lg(x+4)^2 = -\lg\frac{1}{9}.$$

B60. Укажите сумму корней уравнения

$$\log_4(7-x)^2 + \log_4(5-x)^2 = 4 + \log_4(x-5)^2.$$

B61. Укажите число корней уравнения

$$\log_3 x^2 + \log_{\sqrt{3}}(x-8) = 4.$$

B62. Укажите число корней уравнения

$$\log_2 x^2 + \log_2(x+3)^2 = 2.$$

B63. Укажите число корней уравнения

$$\log_3(5-x) = \sqrt{x-1}.$$

B64. Найдите сумму корней уравнения

$$\left(3^{x^2} - 81\right)\lg(1-x) = 0.$$

B65. Укажите сумму корней уравнения

$$\log_2^3 x - 3\log_2^2 x = \frac{10}{\log_x 2}.$$

B66. Укажите число корней уравнения

$$\log_3^3 x - 2\log_3^2 x = 1 - \frac{1}{\log_x \sqrt{3}}.$$

B67. Укажите число корней уравнения $\log_{0,5} \frac{x}{32} = 2^x$

Часть II

> **Инструкция для учащихся.** Запишите решение с полным его обоснованием.

C68. Решите уравнение $\lg^2\left(x^2+3x+3\right)+\sqrt{x^2-4x-5}=0.$

C69. Решите уравнение $\lg^2\left(x^2+x-5\right)+\sqrt{-x^3+9x-10}=0.$

C70. Решите уравнение

$$\lg^2\left(2x^3+x^2-13x+7\right)+\log_5^2\left(2x^2+5x-2\right)=0.$$

C71. Решите уравнение $\log_3^2\left(17x^3-10x^2+1\right)+\sqrt{5^{x^2}-1}=0.$

C72. Решите уравнение

$$\log_3^2\left(25x^3-24x^2-1\right)+\sqrt{5^{x^2}-5}=0.$$

C73. Решите уравнение $\log_{2x-1}\left(x^2+3x-1\right)=2.$

C74. Решите уравнение

$$\log_{1-2x}\left(6x^2-5x+1\right)-\log_{1-3x}\left(4x^2-4x+1\right)=2.$$

C75. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+2)\le 0$.

C76. Решите неравенство $\log_{|x|-1}|x+2|\le 0$.

C77. Решите неравенство $\log_{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\left(4x-x^2-2\right)\ge 0$.

C78. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\lg^2 x-\lg^2 y=1,\\ \log_2 x-\log_2 y=\log_2 5+1.\end{cases}$$

C79. Решите неравенство

$$\log_{\frac{a^2+2005}{a^2+2006}}(3x-5)\ge\log_{\frac{a^2+2005}{a^2+2006}}(x+8).$$

C80. Решите неравенство

$$\log_{\frac{a^2+2006}{a^2+2005}}(2x+3)\ge\log_{\frac{a^2+2006}{a^2+2005}}(x+2).$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Найдите значение выражения

$$\log_2 12+\log_2 6-\log_2 18.$$

B2. Вычислите: $64^{\log_{0,5}\sqrt[3]{5}}$.

B3. Решите уравнение $\log_2 x = -2$.

B4. Укажите сумму всех целочисленных решений неравенства $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$.

B5. Найдите произведение всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$y = \log_{0,5}\left(5x - x^2\right).$$

B6. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{\sin^2 60^\circ - 2\log_5 \sqrt[4]{5}}\right)^{-1}.$$

B7. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,2}\frac{1}{x-1} \geq -1.$$

B8. Найдите ординату точки пересечения графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = 5 - \log_2(x + 14)$.

Часть II

> **Инструкция для учащихся.** Запишите решение с полным его обоснованием.

C9. Вычислите: $2\log_4\left(8\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)\right) + \log_4\left(10 + 2\sqrt{21}\right)$.

C10. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_2\left(x^2 - x + a\right) = \log_2(a - 3x)$.

Вариант 2

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Найдите значение выражения

$$\log_2 6+\log_2 3-\log_2 9.$$

B2. Вычислите: $128^{\log_{0,5}\sqrt[7]{10}}$.

B3. Решите уравнение $\log_3 x=-2$.

B4. Укажите произведение всех целочисленных решений неравенства $\log_{\frac{1}{3}} x>0$.

B5. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y=\log_{0,2}\left(3x-x^2\right)$.

B6. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{3\log_7\sqrt[4]{7}-\cos^2 45^\circ}\right)^{-2}.$$

B7. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,5}\frac{1}{x+2}\ge -1.$$

B8. Найдите ординату точки пересечения графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = 5 - \log_2(x + 4)$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

С9. Вычислите: $2\log_4\left(8\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\right)+\log_4\left(12+2\sqrt{35}\right)$.

С10. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_2\left(x^2-3x-a\right)=\log_2(5x-a)$.

2.5. Показательные уравнения и неравенства

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: степень с рациональным показателем, свойства степени с рациональным показателем; логарифм, общие приемы решения показательных уравнений (разложение на множители, замена переменных, использование свойств функций, использование графиков), решение показательных уравнений, использование нескольких приемов решений уравнений, уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, уравнения с параметром; системы, содержащие одно или два показательных уравнения, показательные неравенства, решение комбинированных уравнений и неравенств, системы неравенств.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

В1. Укажите наибольшее решение неравенства

$$2^{\sqrt{5-x}}>-6.$$

В2. Укажите наименьшее решение неравенства

$$2^{\sqrt{x+7}}>-1.$$

B3. Решите уравнение $2^x = 0,5$.

B4. Решите уравнение $5^{2x-1} = 625$.

B5. Решите уравнение $3^{x+5} = \frac{1}{9}$.

B6. Сколько корней имеет уравнение $3^{x+5} = -\frac{1}{9}$?

B7. Решите уравнение $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x = 27$.

B8. Решите уравнение $3^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 81$.

B9. Найдите наибольшее натуральное решение неравенства $3^{x-5} < 81$.

B10. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$5^{x-1} \le \frac{1}{\sqrt[5]{5}}.$$

B11. Укажите наибольшее целое число, не удовлетворяющее неравенству $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \le \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

B12. Сколько целочисленных решений неравенства $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} < 1$ принадлежит отрезку $[-5;\ 5]$?

B13. Решите уравнение $4x = 400^{\circ}$.

B14. Укажите наибольшее целое решение, не удовлетворяющее неравенству $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

B15. Решите уравнение $0{,}04\cdot(0{,}2)^{x-4}=5^x$.

B16. Сколько целочисленных решений неравенства $9^x-3^x-72>0$ принадлежит отрезку $[-4;\ 4]$?

B17. Решите неравенство $\sqrt{5^x-25}\le 0$.

B18. Укажите наименьшее целое решение неравенства $7^x-6\cdot\left(\sqrt{7}\right)^x-7>0$.

B19. Решите уравнение $3^x=27\cdot\sqrt[4]{9}$.

B20. Решите уравнение $2^x=16\cdot\sqrt[5]{8}$.

B21. Сколько целочисленных решений неравенства $2^{x^2}\ge 16$ содержится в отрезке $[-3;\ 3]$?

B22. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+2}{x-2}}-3}$?

B23. Решите уравнение $3\cdot 4^x-6^x-2\cdot 9^x=0$.

B24. Укажите количество целых решений неравенства

$$\left(2^x-1\right)\left(25-5^x\right)>0.$$

B25. Укажите количество целых решений неравенства

$$\left(3^x-1\right)\left(81-3^x\right)>0.$$

B26. Укажите количество целых решений неравенства

$$\frac{\left(5^x-5\right)\left(16-2^x\right)}{3^x}\ge 0.$$

B27. Решите уравнение $5^{x^2+(\sqrt{x})^2-1}=5.$

B28. Укажите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}\le 9.$

B29. Решите неравенство $(0,1)^{4x^2-2x-2}\ge(0,1)^{2x-3}.$

B30. Решите уравнение $6^x-7^x=0.$

B31. Решите уравнение $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x=5\cdot 25^x.$

B32. Решите уравнение $5\cdot 4^x+23\cdot 10^x-10\cdot 25^x=0.$

B33. Решите уравнение $4\cdot 9^x+13\cdot 12^x-12\cdot 16^x=0.$

B34. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$2\cdot 4^x-3\cdot 10^x<5\cdot 25^x.$$

B35. Укажите число целых решений неравенства

$$2^x+2^{1-x}-3\le 0.$$

B36. Решите уравнение $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}.$

B37. Найдите целое число, являющееся решением неравенства $\dfrac{2^{x+1}+1}{2-2^{x+1}}\ge 2.$

B38. Решите уравнение $4^{x+1}+19\cdot 2^x-5=0.$

B39. Решите уравнение $3^{2x+5}-2^{2x+7}+3^{2x+4}-2^{2x+4}=0.$

B40. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$2^{5x+6}-7^{5x+2}-2^{5x+3}-7^{5x+1}>0.$$

В41. Укажите число корней уравнения $3 \cdot 2^{3-2x} = 2^{1-x} + 1$.

В42. Укажите число корней уравнения

$$3 \cdot 4^{|x|} - 14 \cdot 2^{|x|} + 8 = 0.$$

В43. Укажите число корней уравнения

$$\left(3^{x^2} - 81\right) \cdot \sqrt{1-x} = 0.$$

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

С44. При каких значениях m уравнение

$$2006^{2x} - 4 \cdot 2006^{x} + m^2 - 3m = 0$$

имеет единственный корень?

С45. При каких значениях m уравнение

$$2007^{2x} - 6 \cdot 2007^{x} + m^2 - 8m = 0$$

имеет единственный корень?

С46. Решите неравенство $9^{x+1} + a \cdot 8 \cdot 3^x - a^2 < 0$.

С47. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 3}{3^x - 4} < 0$.

С48. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 5}{3^x - 7} > 0$.

С49. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 4^{2x-y} + 8 = 6 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-y}, \\ \dfrac{6x - 7 - 2y}{2x - y - 2} = 5 - 2x + y. \end{cases}$

С50. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{6x+2y} = 6 - 2^{3x+y}, \\ \dfrac{6x+7+3y}{3x+y} = 12 - 15x - 5y. \end{cases}$$

С51. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{2^{x^2} + x^2 - 2}{2^x - 8} < 0, \\ x^2 > 16. \end{cases}$

С52. Решите уравнение $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10.$

С53. Решите неравенство $(1{,}25)^{1-x} < (0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}$.

С54. Найдите наибольшее целое x, не удовлетворяющее неравенству $5^x + 4 \cdot 3^{x+1} \geq 449.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

В1. Решите уравнение $3^{x+1} + 5 \cdot 3^x = 72.$

В2. Решите уравнение $2^x = 8\sqrt{2}.$

В3. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$5^{2x+9} > 25.$$

B4. Укажите наибольшее натуральное число, не являющееся решением неравенства $0{,}5^x \le \frac{1}{128}$.

B5. Укажите число целых решений неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+3}{x-2}} \le 16.$$

B6. Найдите корни уравнения $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$. Если получили два корня, то в ответе запишите их произведение, если один, то его запишите в ответ.

B7. Укажите число корней уравнения

$$\left(4^{x^2} - 16\right) \cdot \sqrt{x-1} = 0.$$

B8. Укажите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства $(0{,}2)^{|2x-1|} \ge \frac{1}{25}$.

Часть II

> **Инструкция для учащихся.** Запишите решение с полным его обоснованием.

C9. Решите уравнение $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4$.

C10. При каких значениях параметра a уравнение $25^{x+0{,}5} - (5a+2) \cdot 10^x + a \cdot 4^{x+0{,}5} = 0$ имеет ровно два различных корня?

Вариант 2

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Решите уравнение $2^{x+2} + 7 \cdot 2^x = 88$.

B2. Решите уравнение $3^x = 9\sqrt{3}$.

B3. Укажите наибольшее целое решение неравенства $6^{2x-7} < 36$.

B4. Укажите наибольшее целое число, не являющееся решением неравенства $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \le \dfrac{1}{243}$.

B5. Укажите число целых решений неравенства

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{x+3}} \ge 27.$$

B6. Решите уравнение $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$. Если получили два корня, то в ответе запишите их произведение, если один, то его запишите в ответ.

B7. Укажите число корней уравнения

$$\left(2^{x^2} - 32\right) \cdot \sqrt{3-x} = 0.$$

B8. Укажите число целых решений неравенства

$$(0{,}5)^{|3x+1|} \ge \frac{1}{8}.$$

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

С9. Решите уравнение $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=62$.

С10. При каких значениях параметра a уравнение $2\cdot 9^x-(2a+3)\cdot 6^x+3a\cdot 4^x=0$ имеет ровно один корень?

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Производная функции

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: геометрический смысл производной, физический смысл производной, таблица производных, исследование функции с помощью производной.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Найдите производную функции

$$f(x) = (x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 3).$$

B2. Вычислите $y'(1)$, если $y = x^4 - \frac{1}{x}$.

B3. Вычислите $y'(0)$, если $y = \frac{-2x+1}{4x+2}$.

B4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = (x - 1)(x^2+1)(x+1).$$

B5. Укажите наибольшее целое решение неравенства $f'(x) > 0$, если $f(x) = -x^2 - 4x - 2000$.

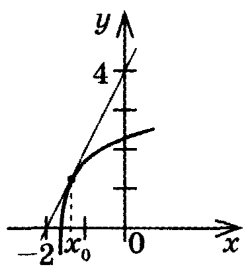
B6. Укажите наименьшее целое решение неравенства $f'(x) < 0$, если $f(x) = x^2 + 8x + 2000$.

B7. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1}$, касательная в которой параллельна (или совпадает) с прямой $y = -32x + 7$.

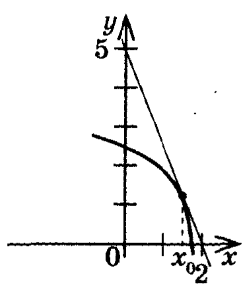
B8. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y=6x-\dfrac{2}{x}$ в его точке с абсциссой (-1).

B9. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \sin(2x)$ в его точке с абсциссой 0.

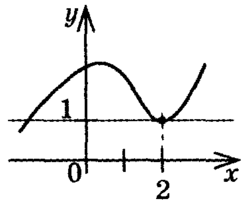
B10. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



B11. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



B12. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Найдите значение производной в точке x_0.



B13. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 3x + 2$.

B14. Найдите минимум функции $y = x^3 - 3x + 2$.

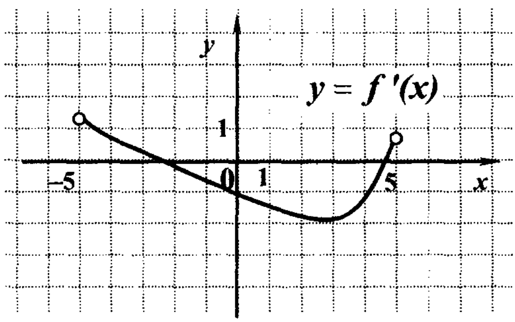
B15. Укажите число точек экстремума функции

$$y = 0,2x^5 - \frac{4}{3}x^3.$$

B16. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = 2x^3 - 6x$ на отрезке $[0;\ 2]$.

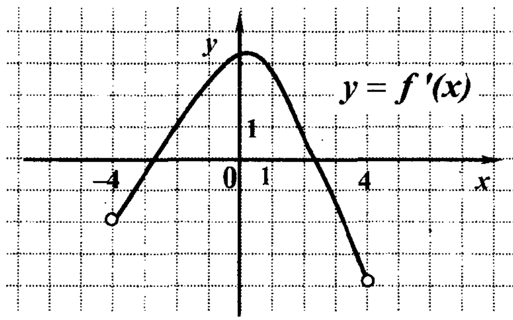
B17. Найдите площадь треугольника, который образует касательная к графику функции $h(x) = \ln x$ в точке с абсциссой 1 с осями координат.

B18. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5;\ 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции.



К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют отрицательный угловой коэффициент?

B19. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 4)$. На рисунке изображен график производной этой функции.



К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют положительный угловой коэффициент?

B20. В какой точке отрезка $[-200; 200]$ функция $y(x) = 4x^2 + 23$ принимает наименьшее значение?

B21. Найдите значение производной функции

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$$

в точке $x_0 = 1000$.

B22. Найдите значение производной функции

$$f(x) = \frac{1 - 4x}{2x + 1}$$

в точке $x_0 = -1$.

B23. Найдите значение производной функции

$$f(x)=\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)+1$$

в точке $x_0 = 2$.

B24. Найдите значение производной функции

$$f(x)=2\sqrt{x}+\frac{16}{x}$$

в точке $x_0 = 4$.

B25. Найдите значение производной функции

$$f(t)=\cos t+\operatorname{tg} t$$

в точке $t_0 = -\pi$.

B26. Найдите значение производной функции

$$f(x)=\sin t-\operatorname{ctg} t$$

в точке $t_0 = 0{,}5\pi$.

B27. Укажите число целых решений неравенства $f'(x)\le 0$, если $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{16}{3}x^3$.

B28. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к графику функции $y = x^5 - x$ в начале координат? В ответе укажите градусную меру этого угла.

B29. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $g(x) = (x-1)^2(x+1)^2 - (x^2+1)^2$, проведенной в точке с абсциссой 1.

B30. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $g(x)=\frac{1-2x}{4x+1}$, проведенной в точке с абсциссой $(-0{,}5)$.

B31. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции

$$y=(x+1)\left(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1\right)$$

в его точке с абсциссой (–1).

B32. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \cos x + 6\operatorname{tg} x$ в его точке с абсциссой $\frac{\pi}{6}$.

B33. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2\sin x - 3\operatorname{ctg} x$ в его точке с абсциссой $\frac{\pi}{3}$.

B34. Найдите точку графика функции

$$f(x)=(x-1)\left(x^{2006}+x^{2005}+\ldots+x+1\right),$$

касательная в которой параллельна оси абсцисс. В ответе укажите сумму координат этой точки.

B35. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$, параллельной прямой $y = 4x - 5$. В ответе укажите площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

B36. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x$, параллельной оси абсцисс. В ответе укажите расстояние от точки (0; 0) до этой касательной.

B37. Укажите точку графика функции $y = x^2 + 4x$, в которой касательная параллельна прямой $y - 2x + 5 = 0$. В ответе запишите сумму координат этой точки.

B38. Укажите точку максимума функции $g(x)$, если $g'(x)=(x+6)(x-4)$.

B39. Укажите точку минимума функции $g(x)$, если $g'(x)=(x-7)(x+3)$.

B40. Найдите максимум функции $f(x)=x^3-2x^2-7x+3$.

B41. Укажите точку максимума функции $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x}$.

B42. Укажите число точек экстремума функции

$$g(x)=x^5-15x^3.$$

B43. Укажите число точек экстремума функции

$$f(x)=x^3(x-1)^4.$$

B44. Укажите точку минимума функции

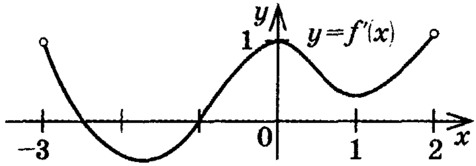
$$f(x)=x^3+x^2-5x+4.$$

B45. Найдите минимум функции $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$.

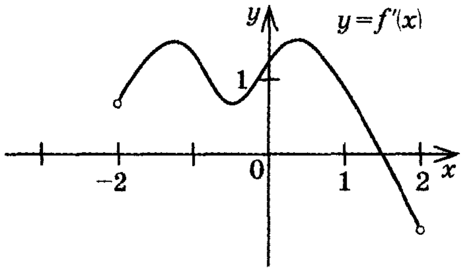
B46. Укажите длину промежутка возрастания функции

$$f(x)=-\frac{x^3}{3}-x^2+3x+4.$$

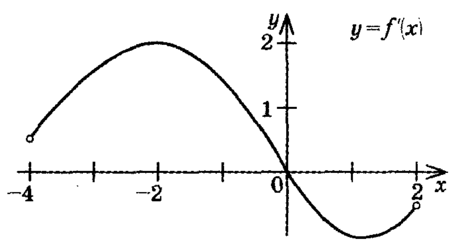
В47. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3;\ 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число промежутков убывания функции.



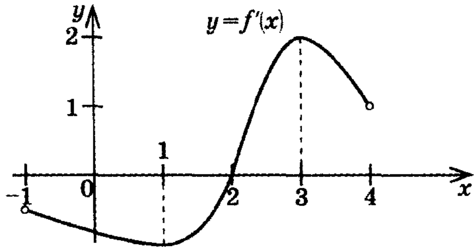
В48. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2;\ 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число промежутков возрастания функции.



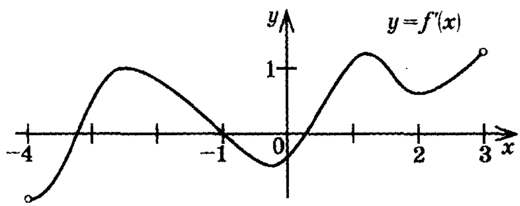
В49. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4;\ 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



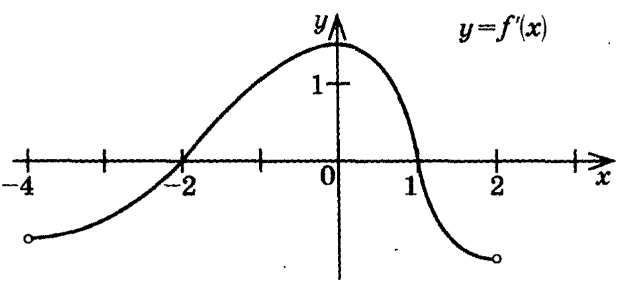
B50. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-1; 4)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение.



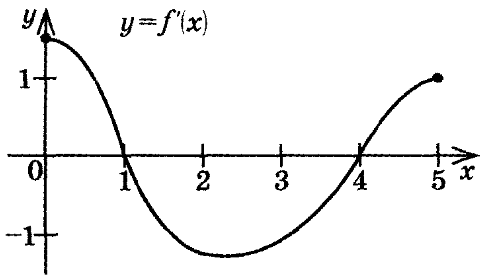
B51. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 3)$. График ее производной изображен на рисунке. Сколько точек экстремума имеет функция $f(x)$ на этом промежутке?



B52. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите длину промежутка возрастания функции $y = f(x)$.



B53. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[0;\ 5]$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите длину промежутка убывания функции $y = f(x)$.



B54. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[0;\ 3]$.

B55. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-3;\ 3]$.

B56. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^3 + 3x$ на отрезке $[-2;\ 31]$.

B57. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-2;\ 31]$.

B58. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^4(x + 2)^3$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

B59. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 2x + 7$ на отрезке $[-100;\ 100]$.

B60. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = x^2 - 2x + 7$ на отрезке $[-100;\ 100]$.

B61. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = -3\sin x + 1$ на отрезке $[-100;\ 100]$.

B62. Найдите наибольшее значение функции $g(x) = 3\cos x + 1$ на отрезке $[-100; 100]$.

B63. Найдите наименьшее значение функции

$$g(x)=\sqrt{4\cos x+5}$$

на отрезке $[1; 100]$.

B64. Найдите наибольшее значение функции

$$g(x)=\sqrt{4\sin x+5}$$

на отрезке $[1; 100]$.

B65. Найдите наименьшее значение функции

$$g(x)=\frac{x}{100}+2$$

на отрезке $[-100; 100]$.

B66. Найдите наибольшее значение функции

$$g(x)=-\frac{x}{100}+1$$

на отрезке $[-100; 100]$.

B67. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки B этой прямой изменяется по закону $S(t)=2t^3-12t^2+7$ (t — время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения ускорение тела будет равно 36м/с^2?

B68. Тело движется по прямой так, что расстояние от начальной точки изменяется по закону $S=5t+0{,}2t^3-6$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 5 секунд после начала движения.

В69. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $(-2;\ 10)$. Найдите $f'(-2)$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

С70. Через точку $M(-1;\ 0)$ к графику функции $y=\sqrt{2x-1}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение. В ответе укажите градусную меру угла между касательной и положительным направлением оси OX.

С71. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\sqrt{1-x}$, проходящей через точку $P(2;\ 0)$. В ответе укажите площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

С72. При каких значениях b прямая $y = bx$ является касательной к параболе $f(x)=x^2-2x+4$?

С73. При каком значении a прямая $y = -10x + a$ является касательной к параболе $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$?

С74. При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2$ более чем в двух различных точках?

С75. При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $y=x^3-3x^2$ в единственной точке?

С76. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 32 см^3, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания. В ответе укажите этот периметр.

С77. Определите размеры бассейна с квадратным дном и объемом 32 м^3 таким образом, чтобы сумма площади боковой поверхности и площади дна была минимальной. В ответе укажите площадь боковой поверхности.

С78. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания. В ответе укажите этот периметр.

С79. Найдите промежутки убывания функции

$$f(x) = -7x + 3\sin x - 2006.$$

С80. Найдите множество значений функции

$$h(x) = 2\sqrt{x+14} + \sqrt{6-x}.$$

С81. Найдите множество значений функции

$$g(x) = 4\cos x - 4\sqrt{4\cos x + 5}.$$

С82. Найдите множество значений функции

$$g(x) = 2\sqrt{-x+3} - 3\sqrt{5x-10}.$$

3.2. Первообразная функции

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: первообразная суммы функций, первообразная произведения функции на число, задача о площади криволинейной трапеции.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Вычислите площадь фигуры (S), ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. В ответе запишите $3S$.

B2. Вычислите площадь фигуры (S), ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. В ответе запишите $3S$.

B3. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ и графиком функции $y = 2\sin x$.

B4. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = 2$, $x = 4$ и графиком функции $y = \frac{1}{x^2}$.

B5. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = -2x$.

B6. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x$ и прямой $y = 0$.

B7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $y = -2$.

B8. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x=-\frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ и графиком функции $y = \cos x$.

B9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

B10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 8$, осью ординат и $y = 8$.

B11. Вычислите $3\sqrt{2}S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-x}$, $y = 0$.

B12. Вычислите $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{8-x}$, $y = 0$.

B13. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x+1}$, $y = x - 1$, $y = 0$.

B14. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$.

B15. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{y}=\sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

B16. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=x^2$, $x = 0$, $x = 3$.

B17. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две различные первообразные функции $f(x)$, причем $F_1(3) = 8$, $F_2(5) = 12$, $F_1(5) = 14$. Найдите $F_2(3)$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

С18. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 + 3x$ и $y = 5$.

С19. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 - 3x$ и $y = -1$.

С20. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = 5 - 2x - x^2$.

С21. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 2x - 2$ и графиком ее первообразной $F(x)$, зная, что $F(0) = 1$.

С22. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{1-4x}$, касательной к графику этой функции в его точке с абсциссой $x_0 = 5$ и прямой $y = 0$.

С23. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2x-1}$, касательной к графику этой функции в его точке с абсциссой $x_0 = 5$ и прямой $y = 0$.

С24. На множестве R задана функция

$$f(x)=-3x^2-2x+16.$$

Найти произведение нулей той первообразной, график которой проходит через точку $M(-1;\ 0)$.

C25. При каких значениях x, $x \in [\pi; 2\pi]$ обращается в нуль та из первообразных функции

$$f(x) = \cos x - \sin x,$$

которая при $x = \frac{3\pi}{2}$ имеет значение, равное -2?

C26. При каких значениях x, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ обращается в нуль та из первообразных функции

$$f(x) = 2\cos 2x - \sin x,$$

которая при $x = \pi$ имеет значение, равное -1?

C27. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$.

C28. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{8x - x^2 - 12}$, $y = 0$, $x = 4$.

C29. Сравните значения $F(1)$ и $F(2)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = -\sqrt{x^{200} + 200}$.

C30. Укажите общий вид первообразных для функции

$$f(x) = (x - 1)(x + 3)^{32}.$$

C31. Укажите первообразную функции

$$f(x) = (x + 5)(x - 7)^{2005},$$

проходящую через точку $M(7; 0)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

В1. Найдите $f'(4)$, если $f(x)=4\sqrt{x}-5$.

В2. Найдите $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, если $g(x) = 4x + \cos x$.

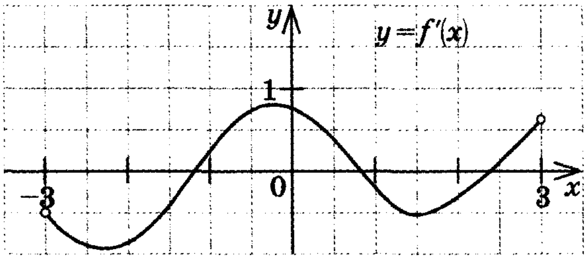
В3. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки B этой прямой изменяется по закону $S(t) = 3t^2 - 12t + 7$ (t — время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость тела будет равна 72 м/с?

В4. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$ в его точке с абсциссой (-3).

В5. Укажите количество целочисленных решений неравенства $g'(x)\le 0$, если $g(x) = 2x^2e^x$.

В6. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две различные первообразные функции $f(x)$, причем $F_2(7) = 8$, $F_1(7) = 18$. Найдите $F_2(2)$, если $F_1(2) = 3$.

B7. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(-3; 3)$. Сколько точек максимума имеет функция на этом промежутке?



B8. Найдите минимум функции $g(x) = 3x^5 - 5x^3$.

B9. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 9$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C10. Найдите наименьший из возможных углов, образуемых с положительным направлением оси абсцисс касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 1.$$

В ответе запишите его градусную меру.

Вариант 2

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Найдите $f'(16)$, если $f(x)=8\sqrt{x}-3$.

B2. Найдите $g'(\pi)$, если $g(x) = 5x - \sin x$.

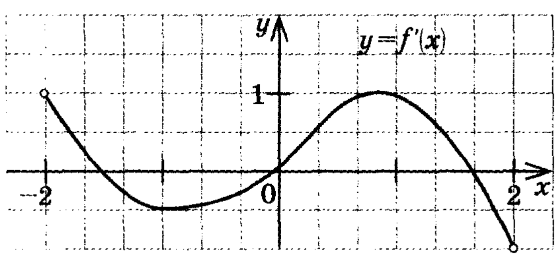
B3. Тело движется по прямой так, что расстояние от начальной точки изменяется по закону $S = t + 0{,}4t^2 - 6$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 10 секунд после начала движения.

B4. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ в его точке с абсциссой (-3).

B5. Укажите количество целочисленных решений неравенства $g'(x)<0$, если $g(x) = 3x^2e^x$.

B6. $G_1(x)$ и $G_2(x)$ две различные первообразные функции $y = g(x)$, причем $G_2(2) = 3$, $G_1(2) = 7$. Найдите $G_1(6)$, если $G_2(6) = 5$.

B7. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(-2; 2)$. Сколько точек минимума имеет функция $f(x)$ на этом промежутке?



B8. Найдите максимум функции $g(x) = 3x^5 - 20x^3$.

B9. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C10. Найдите наименьший из возможных углов, образуемых с положительным направлением оси абсцисс касательной к графику функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+2x-3.$$

В ответе запишите его градусную меру.

4. ГЕОМЕТРИЯ

4.1. Планиметрия

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: признаки равенства и подобия треугольников, решение треугольников, площадь треугольника, параллелограмм и его виды, трапеция, окружность, вписанная в треугольник, окружность, описанная около треугольника, координаты вектора, сложение векторов, умножение вектора на число, скалярное произведение векторов.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами, равными 6 и 8.

B2. Найдите диаметр окружности, описанной около квадрата со стороной $8\sqrt{2}$.

B3. Найдите площадь круга (S), вписанного в прямоугольный треугольник с катетами, равными 24 и 10. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

B4. Найдите площадь круга (S), вписанного в квадрат с диагональю $10\sqrt{2}$. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

B5. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна $2\sqrt[4]{3}$.

В6. Найдите диагональ AC параллелограмма $ABCD$, если $AB = 16$, $AD = 7$, $BD = 21$.

В7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 13$, $AD = 14$, $BD = 15$.

В8. Найдите площадь ромба с диагоналями, равными 10 и 16.

В9. Найдите высоту ромба со стороной 10 см и диагональю 12 см.

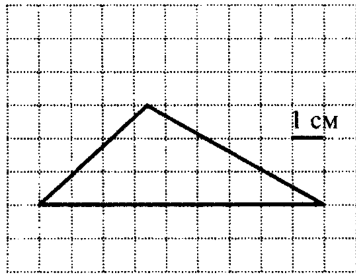
В10. Равнобедренная трапеция $MNPQ(MN \| PQ)$ описана около окружности. Известно, что $MN = 1$, $PQ = 9$. Найдите радиус окружности.

В11. Найдите площадь круга (S), вписанного в равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB \| CD$), если $AB = 4$, $DC = 16$. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

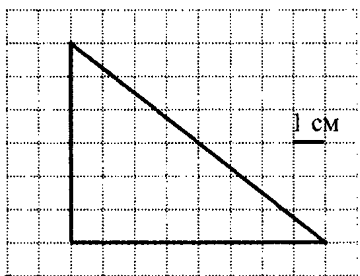
В12. Найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами 20, 20, 32.

В13. Найдите длину большей диагонали параллелограмма со сторонами $3\sqrt{2}$ см и 1 см и углом 45°.

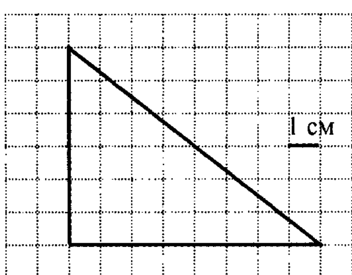
B14. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник. Найдите площадь треугольника (в квадратных сантиметрах).



B15. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник. Найдите высоту, проведенную к большей стороне треугольника (в сантиметрах).



B16. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник. Найдите медиану треугольника, проведенную к большей стороне (в сантиметрах).



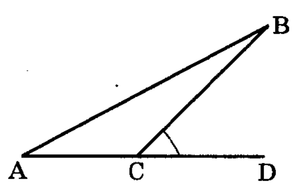
B17. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка O — точка пересечения диагоналей. Разложите вектор $\overrightarrow{CO}$ по векторам $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $AD:BC = 4:1$. В ответе укажите сумму коэффициентов разложения.

B18. В параллелограмме $MNPQ$ точка A делит сторону MN в отношении 1:3, считая от вершины M, точка B делит сторону NP в отношении 1:3, считая от вершины P. Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{NP}$. В ответе укажите сумму коэффициентов разложения.

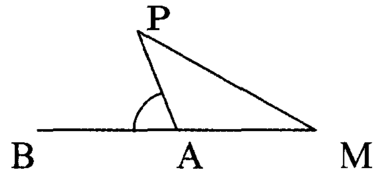
B19. В равностороннем треугольнике ABC из точки D (середины стороны BC) проведен перпендикуляр DK на сторону AC. Разложите вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. В ответе укажите наибольший из коэффициентов разложения.

B20. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 2$, $\angle ABD = 30^\circ$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BD}$.

B21. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 7$, $BC = 8\sqrt{3}$, $\angle DCB = 60^\circ$.



B22. Найдите площадь треугольника PAM, если $PA = 8$, $AM = 4$, $\angle PAB = 30^\circ$.

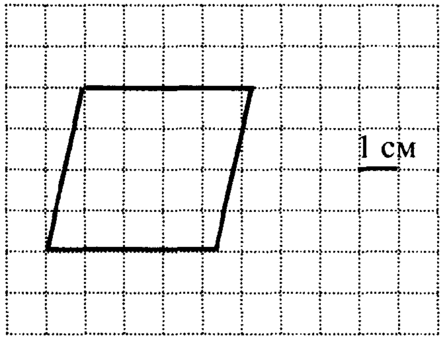


B23. Найдите площадь параллелограмма $MBTC$, если диагональ MT образует со стороной MB угол 15°, $\angle MBT = 150^\circ$, а периметр параллелограмма равен 32 см.

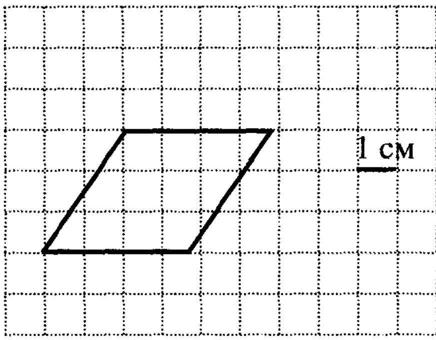
B24. Найдите отношение площади правильного шестиугольника, вписанного в окружность к площади правильного шестиугольника, описанного около этой же окружности.

B25. Найдите отношение площади правильного четырехугольника, вписанного в окружность к площади правильного четырехугольника, описанного около этой же окружности.

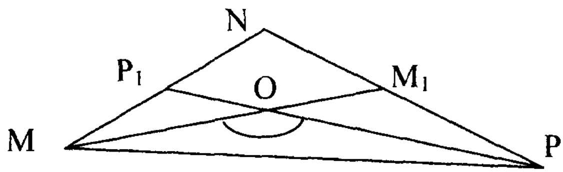
B26. На клетчатой бумаге с клетками размером 1×1 см изображен ромб. Найдите радиус вписанной в него окружности (в сантиметрах).



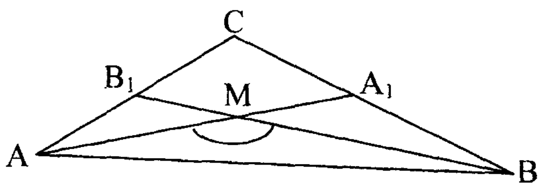
B27. На клетчатой бумаге с клетками размером 1×1 см изображен ромб. Найдите высоту ромба (в сантиметрах).



B28. В треугольнике MNP MM_1, PP_1 — медианы, $MM_1 = 9\sqrt{3}$, $PP_1 = 6$, $\angle MOP = 150^\circ$. Найдите MP.



B29. В треугольнике ABC AA_1, BB_1 — медианы, $AA_1 = 9$, $BB_1 = 15$, $\angle AMB = 120^\circ$. Найдите AB.



B30. Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC, $\angle ABC = \angle AMB = 90^\circ$, $BC = 2\sqrt{5}$, $MC = 2$, $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{CM}$. Найдите x.

B31. Точка P лежит на стороне DC треугольника DBC, $\angle DBC = \angle BPD = 90^\circ$, $BD = \sqrt{10}$, $DP = 1$, $\overrightarrow{CP} = y\overrightarrow{DP}$. Найдите y.

B32. В треугольнике со сторонами 7 см, 9 см, 14 см найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.

B33. В треугольнике со сторонами 7 см, 11 см, 12 см найдите медиану, проведенную к большей стороне.

B34. Найдите диаметр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20, 24.

B35. Найдите диаметр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 15, 15, 24.

B36. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-4\vec{q}$, если $\vec{p}$ и $\vec{q}$ единичные перпендикулярные векторы.

B37. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p}=-2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные перпендикулярные векторы.

B38. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AB = 18$, $AC = 5$, $AH = 3$ и AH — высота треугольника ABC.

B39. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MNP, если $MN = 5$, $NP = 16$, $NA = 4$ и NA — высота треугольника MNP.

B40. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 9, 10, 17.

B41. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 4, 13, 15.

B42. Три окружности, радиусы которых 6 см, 2 см и 4 см, касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через центры данных окружностей.

B43. Три окружности, радиусы которых 10 м, 2 м и 3 м, касаются друг друга внешним образом. Найдите диаметр окружности, проходящей через центры данных окружностей.

B44. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, площадь которой равна 64 см. Найдите боковую сторону трапеции (a), если острый угол при основании трапеции равен 30°. В ответе запишите $a\sqrt{2}$.

B45. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна $3\sqrt{2}$ и составляет с основанием угол 45°.

B46. В треугольнике ABC сторона $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, медианы треугольника AA_1 и CC_1 пересекаются под углом 90°. Найдите длину стороны AC. В ответе запишите $AC\sqrt{5}$.

B47. Средние линии прямоугольного треугольника, параллельные катетам, равны 5 см и 12 см. Найдите высоту треугольника (h), опущенную из вершины прямого угла. В ответе запишите $13h$.

B48. В прямоугольнике $MNPQ$ сторона MN в 6 раз меньше диагонали NQ. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Периметр треугольника NEM равен 35 см. Найдите диагональ MP.

B49. В трапеции $ABND$ ($BN \parallel AD$) проведена средняя линия OE. Найдите длину наименьшего из отрезков, на которые OE разбивается диагоналями BD и AN, если $BN = 12$ и $AD = 20$.

B50. В равнобедренной трапеции $FOND$ $ON \parallel FD$ проведена средняя линия AB. Из вершины тупого угла трапеции проведена высота NC. Найдите длину FC, если $ON = 8$ и $FD = 18$.

B51. Найдите площадь параллелограмма, если его меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне и высота, проведенная из вершины тупого угла параллелограмма, делит большую сторону на отрезки 9 см и 25 см.

B52. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если длина гипотенузы равна $2\sqrt{13}$ см, а длина медианы меньшего острого угла равна 5 см.

B53. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$. Найдите длину стороны AB.

B54. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Боковая сторона равна 4. Найдите квадрат длины медианы, проведенной к боковой стороне.

B55. Найдите площадь параллелограмма $MPKN$, если $\angle PKM = 45^\circ$, $PK = 5\sqrt{2}$, $PN = 26$.

B56. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы его вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

B57. В треугольнике MBO построена высота BH. Длина $BO = 5$, $OH = 4$, радиус окружности, описанной около треугольника MBO, равен 10. Найдите длину стороны MB.

B58. Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

B59. На диагонали BD прямоугольника $ABCD$ взята точка N так, что $BN:ND = 3:2$. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCN$, если $AC = 10$ и $\angle AOB = 30^\circ$.

B60. В параллелограмме $MNPQ$ биссектриса угла M пересекает сторону NP в точке A так, что AN: AP = = 3:2. Найдите длину меньшей стороны параллелограмма, если его периметр равен 48 см.

B61. Катеты прямоугольного треугольника имеют длину 12 и 5. Найдите длину медианы, проведенную к гипотенузе.

B62. Известны длины сторон треугольника ABC:$AB = 6$, $CA = 7$, $BC = 5$. На луче BC выбрана такая точка F, что угол BAF равен углу ACB. Найдите меньшую сторону треугольника ACF.

B63. Трапеция $MNPQ$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее меньшее основание MN равно 24, $\sin\angle MQN = 0{,}2$, $\cos\angle PMQ = 0{,}6$.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C64. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известны площади треугольников: $S_{ABP} = 4$, $S_{BCP} = 12$, $S_{CDP} = 6$. Найдите площадь треугольника ADP.

C65. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известны площади треугольников: $S_{PBP} = 6$, $S_{BCP} = 9$, $S_{CDP} = 12$. Найдите площадь треугольника ADP.

C66. На стороне AB трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) взята точка K так, что $AK:KB = 2:3$. Точка O — пересечение отрезков KC и BD, точка M — пересечение двух прямых: одна из них проходит через точки A и D, другая — через K и C. Известно, что $AD:BC = 2:1$. Найдите отношение площадей треугольников OBC и OCD.

C67. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята точка K так, что $AK:KB = 3:1$. Точка O — пересечение отрезков KC и BD, точка M — пересечение двух прямых: одна из них проходит через точки A и D, другая — через K и C. Известно, что $AD:BC = 5:2$. Найдите отношение площадей треугольников OBC и OCD.

4.2. Стереометрия

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: пирамида, призма, тела вращения, комбинации тел.

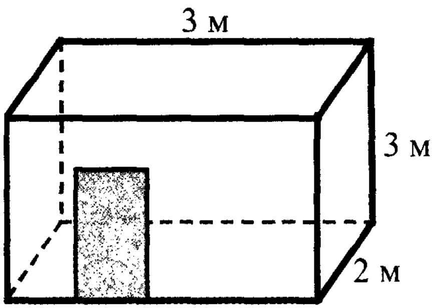
Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. В санатории для обучения плаванию делают отдельный бассейн, имеющий форму цилиндра. Длина окружности его основания равна 30 м, а высота — 1,1 м. Стены бассейна выкладывают керамической плиткой. Сколько килограммов клея нужно приобрести, если на 1 м^2 расходуется 2 кг клея?

B2. В спорткомплексе для организации соревнований по плаванию делают отдельный бассейн, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Длина бассейна 50 м, ширина — 6 м, а высота — 2 м. Стены и пол бассейна выкладывают керамической плиткой. На 1 м^2 расходуется 2 кг клея (площадь сливных отверстий в полу не учитывать). Клей продается в мешках массой 50 кг. Сколько мешков клея нужно приобрести?

В3. Для оформления стен ванной комнаты (см. рис.) нужно приобрести керамическую плитку. Ширина двери равна 0,7 м, высота — 2 м. Цена плитки 500 р. за 1 м^2. Определите стоимость плитки, если стены решено оклеить полностью, от пола до потолка.



В4. Купол здания, имеющий форму конуса с радиусом основания $\frac{8}{\pi}$ м и образующей 6 м, решено обкладывать плиткой. Сколько м^2 плитки надо приобрести, если плитка покупается с запасом в 10%?

В5. Крышу здания, имеющий форму правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 8 м и высотой 3 м, решено покрасить специальной краской. Расход краски 500 г на 1 м^2. Краска продается в банках массой 6 кг. Сколько банок краски надо приобрести?

В6. Купол здания, имеющий форму полусферы с радиусом основания $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ м, решено обкладывать плиткой. Сколько м^2 плитки надо приобрести, если плитка покупается с запасом в 5%?

B7. В правильной четырехугольной пирамиде известны длина стороны основания $2\sqrt{2}$ и длина высоты 2. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Ответ запишите в градусах.

B8. В правильной четырехугольной пирамиде известны длина стороны основания $2\sqrt{3}$ и длина высоты 3. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания. Ответ запишите в градусах.

B9. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания 6 и длиной бокового ребра $\sqrt{34}$ найдите расстояние от ребра основания до противоположной грани.

B10. В правильной четырехугольной пирамиде известны длина стороны основания 12 и длина высоты 8. Найдите расстояние от вершины пирамиды до ребра основания.

B11. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания 12 найдите расстояние от высоты пирамиды до стороны основания.

B12. Найдите площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды, проходящего через высоту и боковое ребро, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а высота равна 2.

B13. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Ответ запишите в градусах.

B14. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания.

B15. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите косинус плоского угла при вершине пирамиды.

B16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма $AB = 5\sqrt{2}$, $AA_1 = 6$. Найдите тангенс угла между B_1D и плоскостью ABC.

B17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 6$. Найдите синус угла между B_1D и плоскостью DCC_1.

B18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 6$, $AA_1 = 8$. Найдите площадь диагонального сечения ADC_1B_1.

B19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите тангенс угла между плоскостью ADC_1 и плоскостью ABC.

B20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 6$, $AA_1 = 8$. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой AD.

B21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между прямыми CC_1 и AB. Ответ запишите в градусах.

B22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите расстояние между прямыми CC_1 и AB.

B23. Дана правильная треугольная призма со стороной основания $4\sqrt{3}$ и высотой 4. Найдите объем (V) вписанного в призму цилиндра. В ответе запишите $\frac{V}{\pi}$.

B24. Дана правильная треугольная призма со стороной основания $4\sqrt{3}$ и высотой 4. Найдите объем (V) описанного около призмы цилиндра. В ответе запишите $\frac{V}{\pi}$.

B25. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания $4\sqrt{3}$. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды.

B26. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания $4\sqrt{3}$. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем вписанного в пирамиду конуса (V). В ответе запишите $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}V$.

B27. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания $4\sqrt{3}$ см. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности описанного около пирамиды конуса. В ответе запишите $\frac{\sqrt{3}}{\pi}S$.

B28. Найдите площадь боковой поверхности (S) усеченного конуса, если радиусы оснований усеченного конуса равны 6 и 9, а образующая равна 5. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

B29. В треугольной пирамиде $ABCK$ длины ребер $AK = 3$, $CK = 5$, $\angle KAC = 90^\circ$. Ребро BK перпендикулярно основанию ABC. Найдите объем пирамиды, если угол между гранями ABC и AKC равен 15°.

B30. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $3\sqrt{3}$ и 11 и углом в 30° между ними. Все боковые ребра пирамиды равны 8. Найдите объем пирамиды (V). В ответе запишите $V\sqrt{5}$.

B31. Найдите площадь боковой поверхности четырехугольной пирамиды (S), если в основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 30 и 40, и все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. В ответе запишите $S\sqrt{3}$.

B32. В четырехугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является прямоугольник, длины ребер $SC = 8$, $CD = 6$, а ребро $SB \perp ABC$. Угол между плоскостями SCD и ABC равен 30°. Во сколько раз площадь основания больше площади грани SBC?

B33. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания. Ответ запишите в градусах.

B34. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите радиус описанного шара.

B35. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите расстояние (p) между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания. В ответе запишите $3\sqrt{6}p$.

B36. В правильной треугольной пирамиде высота равна 4, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 45°. Найдите объем пирамиды (V). В ответе запишите $\sqrt{3}V$.

B37. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна высоте и равна 4. Найти расстояние (p) от вершины основания до плоскости диагонального сечения, не проходящего через эту вершину. В ответе запишите $\frac{p\sqrt{2}}{2}$.

B38. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCKEF$ с вершиной M длина стороны основания равна $4\sqrt{3}$, а длина апофемы 10 см. Найдите площадь сечения (S), проходящего через вершину пирамиды и меньшую из диагоналей основания. В ответе запишите $\frac{S}{\sqrt{19}}$.

B39. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCKEF$ с вершиной M длина стороны основания равна $4\sqrt{3}$, а длина апофемы 10 см. Сечение проходит через вершину пирамиды и большую из диагоналей основания. Найти отношение объемов частей пирамиды, на которые она делится плоскостью сечения.

B40. В треугольной пирамиде с равными боковыми ребрами известны длины сторон основания 6, 8, 10 и длина высоты 1. Найдите радиус описанного шара.

B41. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, с высотой, равной 8, и апофемой, равной 10.

B42. В треугольной пирамиде все боковые ребра равны 15,5 см. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 7 см, 15 см, 20 см. Найдите объем пирамиды (V). В ответе запишите $\frac{V}{\sqrt{21}}$.

B43. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб с диагоналями 30 см и 40 см. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом. Найдите боковую поверхность пирамиды, если ее высота равна 16 см.

B44. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $\sqrt{2}$ и 8 и углом в 45° между ними. Все боковые ребра пирамиды равны 7. Найдите объем пирамиды (V). В ответе запишите $V\sqrt{6}$.

B45. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна $36\sqrt{3}$. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с плоскостью основания углы 45°, 30°. Найдите объем пирамиды (V). В ответе укажите $V\sqrt{3}$.

B46. В основании четырехугольной пирамиды $ABCDF$ лежит квадрат со стороной, равной 4. Боковые грани FAD и FCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а высота пирамиды равна диагонали ее основания. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC параллельно прямой FB (S). В ответе укажите $S\sqrt{2}$.

B47. Угол наклона боковой грани к плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды равен 60°, а боковое ребро равно $2\sqrt{15}$. Найдите расстояние между центрами вписанного и описанного шаров.

B48. Угол наклона боковой грани к плоскости основания правильной треугольной пирамиды равен 60°. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен 35. Найдите радиус вписанного шара.

B49. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, причем $AC = 4$, $\angle C = 120^\circ$, боковое ребро AA_1 равно 8. Найдите площадь сечения A_1B_1C (S). В ответе укажите $S\sqrt{51}$.

B50. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, причем $AC = 4$, $\angle C = 120^\circ$, боковое ребро AA_1 равно 8. Найдите тангенс угла между плоскостями ABB_1 и A_1CB_1.

B51. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, причем $AC = 4$, $\angle C = 120^\circ$, боковое ребро AA_1 равно 8. Найдите расстояние (p) между прямыми AC и BB_1. В ответе укажите $p\sqrt{3}$.

B52. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$ с углом A, равным 60°, и стороной $AB = 4$ см. Известно, что высота AA_1 равна $2\sqrt{3}$ см. Определите угол между плоскостью ABC и плоскостью сечения, проходящего через прямые AB и C_1D_1. Ответ запишите в градусах.

B53. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной 2. Боковое ребро AA_1 призмы равно 2 и образует со сторонами AB и AC углы по 60°. Определите объем призмы (V). В ответе укажите $V\sqrt{2}$.

B54. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной 2. Боковое ребро AA_1 призмы равно 2 и образует со сторонами AB и AC углы по 60°. Определите площадь грани BCC_1B_1.

B55. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 5. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 6 и 8, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 10. Найти объем параллелепипеда.

B56. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 5. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 6 и 8, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 10. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

B57. Концы отрезка MN лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 10, длина отрезка MN равна 24, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен 60°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки M и N.

B58. Через вершину конуса и хорду основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 45°. Радиус основания конуса равен 4 см, а высота равна 3 см. Найдите площадь сечения (S). В ответе укажите $S\sqrt{14}$.

B59. Через вершину конуса и хорду основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 45°. Радиус основания конуса равен 4 см, а высота равна 3 см. Найдите расстояние (p) от центра основания конуса до плоскости сечения. В ответе запишите $p\sqrt{2}$.

B60. Сфера проходит через вершины равнобедренного треугольника с основанием 4 см и углом при вершине $\arcsin\frac{1}{3}$. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 8 см. Найдите радиус сферы.

B61. Все стороны ромба с диагоналями 30 м и 40 м касаются поверхности шара радиуса 20 м. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

B62. В правильную четырехгранную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины принадлежат боковым ребрам пирамиды, а четыре другие принадлежат ее основанию. Найдите ребро куба (a), если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{2}$, а ее боковое ребро равно 3. В ответе запишите $3\sqrt{2}a$.

B63. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ секущая плоскость проходит через вершину D_1 и середины ребер AD и CD. Найдите объем получившейся пирамиды, если объем куба равен 96.

B64. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны $6\sqrt{2}$ и $12\sqrt{2}$. Высота призмы равна $\sqrt{10}$. Секущая плоскость проходит через вершину D_1 и середины ребер AD и CD. Найдите котангенс угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

С65. Сфера касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной 2. Найдите длину бокового ребра пирамиды, если радиус сферы равен 3.

С66. Около пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной, равной 3, описан шар. Найдите радиус шара, если известно, что одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно ее основанию и равно 2.

С67. В сферу радиуса $\sqrt{66}$ вписана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D — вершина), длина апофемы которой относится к длине высоты как $3:2\sqrt{2}$. Найдите наименьшую площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды, середину стороны AC и пересекающей сторону BC.

С68. Основанием пирамиды $DABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AC = 4\sqrt{2}$. Ребро AD перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников ADB и ADC. Найдите объем пирамиды $AMLC$.

II. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЗ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ (5—11-е КЛАССЫ)

1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: рациональные неравенства, системы неравенств, комбинированные неравенства, неравенства с параметром.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

В1. Укажите наименьшее целое решение неравенства $-x + 0{,}5(x + 4) < 4$.

В2. Найдите число целых решений неравенства

$$-3 \le \frac{x}{4} - 1 < 1.$$

В3. Укажите середину промежутка, на котором выполняется неравенство $-x^2 - 2x + 3 \ge 0$.

В4. Сколько целочисленных решений неравенства $x^2 + 9 > 6x$ принадлежит отрезку [1; 6]?

В5. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $4 \le x^2 \le 9$?

В6. Решите неравенство $4x^2 + 4x + 1 \le 0$.

B7. Сколько целочисленных решений имеет система неравенств $\begin{cases} x^2 \le 9, \\ 4x^2 + 4x + 1 < 0? \end{cases}$

B8. Сколько целочисленных решений имеет система неравенств $\begin{cases} x^2 \le 1, \\ -x^2 - 6x - 10 < 0? \end{cases}$

B9. Сколько целочисленных решений имеет система неравенств $\begin{cases} x^2 + 2x \le 0, \\ -x^2 - 6x - 10 > 0? \end{cases}$

B10. Найдите наименьшее целое решение неравенства $(x - 3)(x + 4)(7 - x) \le 0$.

B11. Укажите середину промежутка, являющегося решением неравенства $\frac{1}{x} > 2$.

B12. Укажите наибольшее целое решение неравенства $(x - 1)(4 - x)(x + 5) \ge 0$.

B13. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $\frac{(4x-4)(4-x)}{5-x} \le 0$.

B14. Укажите наименьшее натуральное число, входящее в область определения функции $y = \sqrt{\frac{x+9}{x-19}}$.

B15. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $(x+5)^2 \le 25 - x^2$?

B16. Укажите середину промежутка, являющегося решением неравенства $-7 < 3 - 2x < 13$.

B17. Сколько целочисленных решений имеет система неравенств: $\begin{cases} 3x-4>5, \\ 2{,}5x\le 10? \end{cases}$

B18. Укажите середину промежутка, являющегося решением неравенства $2\cdot x^{-1} < 5$.

B19. Укажите наименьшее значение x, при котором имеет смысл выражение $3\sqrt{x-17}$.

B20. Найдите наименьшее решение неравенства $(x - 3)(x + 4)^2 \ge 0$.

B21. Сколько целочисленных решений неравенства $(x - 3)(x + 4)^2 > 0$ принадлежит отрезку $[1; 7]$?

B22. Сколько целочисленных решений неравенства $(x - 3)(x + 4)^2 \le 0$ принадлежит отрезку $[0; 7]$?

B23. Укажите наибольшее целое решение неравенства $(x - 3)(x + 4)^2 < 0$.

B24. Укажите наименьшее натуральное число, входящее в область определения функции

$$y=\frac{x+7}{\sqrt{x^2+x-12}}.$$

B25. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{\left(x^2-10x+25\right)x}{x^2-9}<0.$$

B26. Укажите число целых решений неравенства

$$\frac{(x+2)(x-4)}{-x^2+4x-4} \geq 0.$$

B27. Найдите наименьшее решение неравенства

$$\sqrt{x+4}(x-7) \geq 0.$$

B28. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x+4}(x-7) > 0$.

B29. Укажите середину промежутка, являющегося решением неравенства $\sqrt{x+4}(x-7) \leq 0$.

B30. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x+14}{7-x}}$?

B31. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{7x-x^2}}{x-4}$?

B32. Укажите наименьшее целое число, входящее в область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+14}}{x-7}}$.

B33. Укажите наименьшее целое число, входящее в область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x+14}}{\sqrt{x-7}}$.

B34. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{x^2-16}{1+4x-5x^2} \geq 0.$$

В35. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{(8-x)x} \geq 0.$$

В36. Решите систему неравенств и укажите наибольшее целое решение: $\begin{cases} 5x-4(2x-1)>3(x+2), \\ 9-x^2 \geq 0. \end{cases}$

В37. При каком значении a решением неравенства $ax < 5$ является промежуток $(-\infty;\ +\infty)$?

В38. Найдите корень уравнения $\frac{x^2-3x+2}{x^2-9}=0$, удовлетворяющий неравенству $-(5-2x) > -(6{,}5-3x)$.

В39. Среди решений уравнения $\frac{2x-2}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=5$ найдите те, которые не удовлетворяют неравенству $-x^2-7x+8>0$.

В40. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\frac{9-x^2}{3x^2-2x-1} \geq 0.$$

В41. Укажите число целых решений неравенства

$$\frac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{5-x} \geq 0.$$

В42. Укажите среднее арифметическое целых решений неравенства $\frac{\left(x^2+7\right)(3-x)}{x+4}>0.$

B43. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{x^2+12x+36}{5-x}\le 0.$$

B44. Решите неравенство $\dfrac{x^2+4x-5}{-x^2-6x+7}\le 0$. В ответе укажите наименьшее натуральное решение.

B45. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{x+6}{x-5}>1.$$

B46. Укажите сумму целых чисел, не являющихся решением неравенства $\dfrac{4x^2-3x-1}{2x^2+3x+1}>0$.

B47. Найдите наибольшее целое решение двойного неравенства $-1\le\dfrac{x+1}{2-x}<1$.

B48. Найдите целое решение неравенства

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{x^2-1}<0.$$

B49. Укажите число целых решений неравенства

$$(4x-1)^2-9(1-4x)\le 0.$$

B50. Укажите наименьшее значение x, при котором выражение $\sqrt{x-6}+\sqrt{x+3}$ имеет смысл.

B51. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^3-4x^2\ge 0, \\ x\le 0. \end{cases}$

B52. Найдите произведение натуральных решений неравенства $\dfrac{x^3-27}{x^4-\dfrac{16}{81}}\le 0.$

B53. Найдите сумму натуральных решений неравенства
$$\frac{x^3-4x^2+x-4}{2-x}\ge 0.$$

B54. Укажите целое число, входящее в область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{-5}{x^2-6x+8}}$.

B55. Решите неравенство $x^4+2x^2-3\le 0$. В ответе запишите длину промежутка, на котором выполняется неравенство.

B56. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2-6x+9\le 0, \\ x^4-81x+2006>0. \end{cases}$

B57. Укажите число целых чисел, входящих в область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+36}}{x+2}$.

B58. Укажите число целых чисел, входящих в область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{-x^2+36}}{x+2}}$.

B59. Укажите число целых решений неравенства
$$\frac{x^2+2x-8}{-x^2+5x-6}\ge 0.$$

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

С60. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{20+x-x^2}}{2x-3}\le\dfrac{\sqrt{20+x-x^2}}{x-6}$.

С61. Решите неравенство

$$\frac{\left(x^4-2x^3+2x-1\right)\left(x^2-4x+4\right)}{7-6x-x^2}\ge 0.$$

С62. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+3x-18\right)\left(4x^2-4x+1\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(3x^2-8x+14\right)}\le 0.$$

С63. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ справедливо для любых $x\in[1;\ 2]$?

С64. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-4}{x+3a-2}\le 0$ выполняется для всех $x\in[1;\ 3]$.

С65. Укажите число целых решений неравенства

$$\left(x^2-9\right)\left(\operatorname{ctg}^2 x+2\right)<0.$$

С66. Укажите число целых решений неравенства

$$\left(x^2-9\right)\left(\sin^2 x+2\right)<0.$$

С67. Укажите число целых решений неравенства

$$\left(x^2-9\right)\left(\ln^2 x+1\right)\le 0.$$

С68. Укажите число целых решений неравенства

$$\left(x^2-9\right)\left(\arcsin^2 x+1\right)<0.$$

С69. Укажите число целых решений неравенства

$$\left(x^2-9\right)\left(\sqrt{x}+1\right)<0.$$

С70. Укажите число натуральных решений неравенства

$$\left(x^2-9\right)\left(\sqrt[3]{x}+1\right)<0.$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: область определения функции, множество значений функции, периодичность, возрастание (убывание), экстремумы функции, наибольшее (наименьшее) значение функции, ограниченность, сохранение знака функции, связь между свойствами функции и ее графиком, значения функции.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\frac{6}{x}$ на отрезке [1; 12].

B2. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\frac{6}{x}$ на отрезке [1; 12].

B3. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=-\frac{10}{x}$ на отрезке [1; 10].

B4. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=-\frac{10}{x}$ на отрезке [1;10].

B5. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -2x - 11$ на отрезке [11; 24].

B6. Найдите наибольшее целое значение функции $f(x) = -2x - 11$ на промежутке (11; 24).

B7. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = -2x - 11$ на отрезке $[11;24]$.

B8. Найдите наименьшее целое значение функции $f(x) = -2x - 11$ на промежутке $(11;\ 24)$.

B9. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x - 8$ на отрезке $[11;\ 24]$.

B10. Найдите наименьшее целое значение функции $f(x) = 3x - 8$ на промежутке $(11;\ 24)$.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = -4x^2 + 3$ на отрезке $[1;\ 3]$.

B12. Найдите наибольшее целое значение функции $y = -4x^2 + 3$ на промежутке $(1;\ 3)$.

B13. Найдите наименьшее значение функции $y = -4x^2 + 3$ на отрезке $[1;\ 3]$.

B14. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 + 10x$ на отрезке $[0;\ 7]$.

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 + 10x$ на промежутке $(0;\ 7)$.

B16. Найдите наименьшее целое значение функции $f(x) = 0{,}2^x$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

B17. Найдите наибольшее целое значение функции $f(x) = 0{,}2^x$ на промежутке $(-1;\ 2)$.

B18. Найдите наибольшее целое значение функции $f(x) = 2^x$ на промежутке $(-1;\ 2)$.

B19. Найдите наименьшее целое значение функции $f(x) = \log_3 x$ на отрезке $[1;\ 243]$.

B20. Найдите наибольшее целое значение функции $f(x) = \log_3 x$ на промежутке (1; 243).

B21. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

на отрезке [1; 27].

B22. Найдите наименьшее целое значение функции

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

на промежутке (1; 27).

B23. Найдите наибольшее целое значение функции $f(x) = \sqrt{x+1}$ на промежутке (0; 63).

B24. Найдите наименьшее целое значение функции $f(x) = \sqrt{x+8}$ на промежутке (12; 56).

B25. Найдите наибольшее целое значение функции $\sqrt[3]{x+1}$ на промежутке (0; 83).

B26. Найдите наибольшее значение функции

$g(x) = 7\sin x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

B27. Найдите наибольшее целое значение функции $g(x) = 7\sin x$ на промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

B28. Найдите наибольшее целое значение функции

$g(x) = 7\sin x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.

В29. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = 8\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

В30. Найдите наименьшее целое значение функции $g(x) = 8\cos x$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

В31. Найдите наибольшее целое значение функции $g(x) = 4\sqrt{3}\operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

В32. Найдите наименьшее целое значение функции $g(x) = 4\sqrt{3}\operatorname{ctg} x$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

В33. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 3\sin x + 4$?

В34. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = \sin(3x) + 4$?

В35. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = \frac{\sin x}{3} + 4$?

В36. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 3\cos^2 x + 2$?

В37. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 3\cos^3 x + 2$?

В38. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 6\sin x\cos x$?

B39. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x)=5\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$?

B40. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = \cos x\sin 16^\circ - \sin x\cos 16^\circ$?

B41. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 4\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$?

B42. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{35}{\cos x+3}.$$

B43. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{35}{\sin x+3}.$$

B44. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\log_3\left(27-x^2\right).$$

B45. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\log_{\frac{1}{3}}\left(81-x^2\right).$$

B46. Какого значения функция $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ не достигает ни при каком действительном значении x?

B47. Какого значения функция $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ не достигает ни при каком действительном значении x?

B48. Какого значения функция $y=\dfrac{5x+1}{2x+1}$ не достигает ни при каком действительном значении x?

B49. Какое число не входит в область определения функции $y=\dfrac{5x+1}{2x+1}$?

B50. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^4-16}{x^2-4}.$$

B51. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^4-16}{x^2+4}.$$

B52. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x)=\sqrt{6-x}+\sqrt[4]{x+2}$?

B53. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x)=\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt[4]{x+2}}$?

B54. Сколько натуральных чисел содержится в области определения функции $g(x)=\dfrac{\sqrt{6-x}}{x-2}$?

B55. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{16-x^2}}{x+2}$?

B56. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x)=\sqrt[4]{4x-x^2}+\log_5(x-2)$?

B57. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x)=\sqrt[4]{4x-x^2}+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$?

B58. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x)=\sqrt[4]{4x-x^2}+\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$?

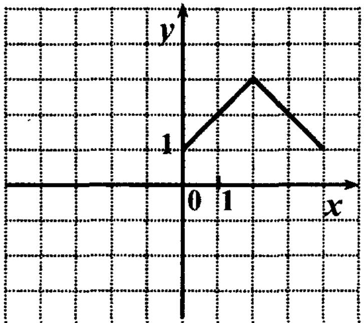
B59. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x)=\log_2\left(10-x^2\right)$?

B60. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x)=\log_{10-x^2} x$?

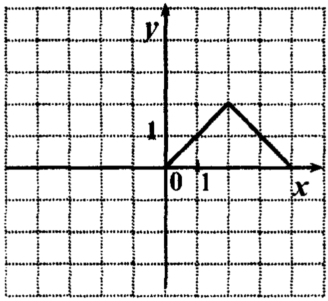
B61. Укажите, сколько целых чисел содержит область определения функции $y=\log_4\frac{4-x}{x+2}$.

B62. Укажите, сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\sqrt[4]{\frac{4-x}{x+2}}$.

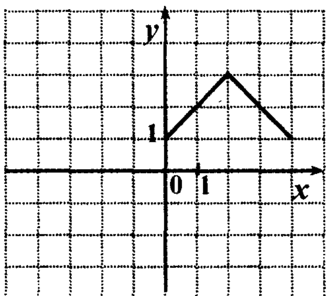
B63. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной. На рисунке изображен график этой функции при $0 \le x \le 4$. Найдите $f(-1)$.



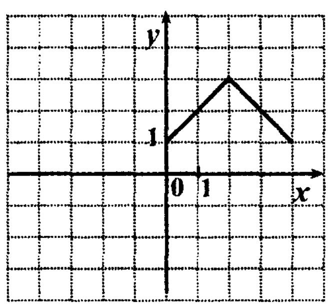
B64. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной. На рисунке изображен график этой функции при $0 \le x \le 4$. Найдите $f(-3)$.



B65. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4. На рисунке изображен график этой функции при $0 \le x < 4$. Найдите $f(-3)$.



B66. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4. На рисунке изображен график этой функции при $0 \le x < 4$. Найдите $f(2010)$.



B67. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной. На промежутке (0; 6) она задается формулой $f(x) = (x - 3)^2$. Найдите $f(-2)$.

B68. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной. На промежутке (0; 6) она задается формулой $f(x) = 6x - x^2$. Найдите $f(-2)$.

B69. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 6. На промежутке (0; 6) она задается формулой $f(x) = 6x - x^2$. Найдите $f(-2)\cdot f(99)$.

B70. Нечетная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 2{,}1 + f(x - 4)$ вычислите $g(1) + g(3) + g(5) + g(7)$.

B71. Нечетная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 1{,}1 + f(x - 4)$ вычислите $g(2) + g(3) + g(5) + g(6)$.

B72. Четная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 1{,}3 + f(x - 3)$ вычислите $g(1) + g(2) - g(4) - g(5)$.

B73. Четная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 1{,}2 + f(x - 3)$ вычислите $g(0) + g(2) - g(4) - g(6)$.

B74. Нечетная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции

$$f(x) = x(x - 7)\cdot(x^2 - x - 12).$$

Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$?

B75. Нечетная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции

$$f(x) = x(x - 7)\cdot(x^2 - x - 12).$$

Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$?

B76. Четная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = (x^3 - 4x)(0{,}5^x - 2)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$?

B77. Четная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = (x^3 - 4x)(0{,}5^x - 2)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$?

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C78. Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{9{,}6 + 0{,}2x - x^2}}{\sin x}.$$

C79. Найдите область определения функции

$$y = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{6{,}4 - 2{,}4x - x^2}.$$

C80. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0{,}5}(\sin x + 5).$$

С81. Найдите множество значений функции

$$y = \log_3(x - |x| + 3).$$

С82. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{3-\sin x}}.$$

С83. При каких значениях a функция

$$y = x^2 + (a-2)x + 0{,}25$$

не принимает отрицательных значений?

С84. Пусть $f(x) = x + 3^x$. Решите неравенство $f(x) > 30$.

С85. Пусть $f(x) = -x + \log_{0,5} x$. Решите неравенство $f(x) \geq -3$.

С86. При каком значении a область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 4x + a} + \sqrt{x-3}$ состоит из одной точки?

С87. При каком значении a область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 6x + a} + \sqrt{x-4}$ состоит из одной точки?

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Содержание, проверяемое заданиями КИМ: задачи на движение, на работу, на проценты и на сложные проценты, на десятичную форму записи числа, на смеси и сплавы, практикоориентированные задачи.

Часть I

Инструкция для учащихся. Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. В коробку помещается 1,4 м^2 керамической плитки размером 20×20 см. Плитка продается коробками.

а) Сколько плиток в коробке?

б) Какое минимальное количество полных коробок нужно купить, если требуется 60 плиток?

в) Сколько плиток требуется для полного обкладывания стены площадью 12 м^2?

г) Какое минимальное количество коробок плитки надо купить для полного обкладывания стены площадью 9 м^2?

д) Какое минимальное количество коробок плитки надо купить для полного обкладывания стены площадью 8 м^2, в которой есть дверь размером 2 м × 0,7 м?

е) Какое минимальное количество коробок плитки надо купить для полного обкладывания стены площадью 7 м^2 с учетом 15% запаса?

B2. На три полки поставили 278 книг. На первую из них поставили на 14 книг больше, чем на вторую. На третью полку — в 2 раза больше, чем на вторую. Сколько книг поставили на первую полку?

B3. На склад привезли 126 тонн яблок, груш и слив. Яблок оказалось в 4 раза больше, чем груш. Слив на 18 тонн меньше, чем груш. Сколько тонн яблок привезли на склад?

B4. Моторная лодка прошла 10 км по озеру и 4 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

B5. Катер прошел 15 км по течению реки и 4 км по озеру, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

B6. Для распечатки 302 страниц были использованы две копировальные машины. Первая машина работала 8 мин, вторая — 10 минут. Сколько страниц в минуту печатает первая машина, если первая печатает в минуту на 4 страницы больше, чем вторая?

B7. Двое рабочих изготавливают по одинаковому количеству деталей. Первый выполнил эту работу за 6 ч, второй за 4 ч, так как изготовлял в час на 14 деталей больше первого. Сколько деталей изготовил второй рабочий?

B8. В связи с распродажей диван подешевел на 20% и теперь стоит 12 000 рублей. Сколько диван стоил до распродажи?

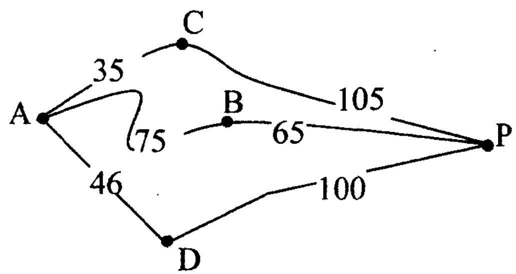
B9. Некоторое число уменьшили на 20%. На сколько процентов надо увеличить результат, чтобы получить первоначальное число?

B10. Вкладчик положил в сбербанк 10 000 рублей из расчета 1% годовых. Каким будет его вклад через один год?

B11. Сбербанк в конце года начисляет 4% годовых к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 2500 рублей через один год?

B12. Магазин в первый день продал 40% имеющихся овощей. За второй день он продал 80% овощей, проданных в первый день. В третий день — оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

B13. Водитель машины собирается проехать из пункта A в пункт P, в который ведут три маршрута: через пункт B, через пункт C и через пункт D. Расстояния в километрах между соседними пунктами показаны на схеме. Известно, что если ехать через C, то средняя скорость автобуса будет равна 50 км/ч, если ехать через B — 56 км/ч, если ехать через D — 58 км/ч. Водитель выбрал маршрут так, чтобы доехать до пункта P за наименьшее время. Сколько часов он будет в пути?



B14. Конфеты продаются в трех различных упаковках. В 300-граммовой упаковке они стоят 27 рублей, в 500-граммовой упаковке они стоят 41 рубль, а в 900-граммовой упаковке — 77 рублей. Покупатель выбрал самую выгодную упаковку. Сколько он заплатил за две упаковки таких конфет?

B15. На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй, и они вместе закончили работу через 4 дня. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму. За сколько дней может построить эту стену первый каменщик, работая один?

B16. За определенное время на заводе собирают 90 автомобилей. Первые три часа на заводе выполняли установленную норму, а затем стали собирать на один автомобиль в час больше. Поэтому за час до срока уже было собрано 95 автомобилей. Сколько автомобилей в час должны были собирать на заводе?

B17. Два велосипедиста отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 54 км, и встречаются через 2 ч. Определите скорость каждого велосипедиста, если скорость у одного из них она на 3 км/ч больше, чем у другого.

B18. Два пешехода отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 50 км, и встречаются через 5 ч. Определите скорость первого пешехода, если его скорость на 2 км/ч больше, чем у другого.

B19. Найдите двузначное число, если частное от деления искомого числа на сумму его цифр равно 4, а частное от деления произведения его цифр на сумму цифр равно 2.

B20. Найдите двузначное число, если произведение его цифр в 6 раз меньше самого числа, а если к исходному числу прибавить 9, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

B21. К 40% раствору соляной кислоты добавили 50 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60%. Найдите первоначальный вес раствора.

B22. Какое количество воды нужно добавить в 1 литр 9%-ного раствора уксуса, чтобы получить 3%-ный раствор?

B23. Цена изделия составляла 1000 рублей и была снижена сначала на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена товара?

B24. Цену товара повысили на 25%, затем новую цену повысили еще на 10% и, наконец, после перерасчета произвели повышение цены еще на 12%. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

B25. Сберегательный банк в конце года начисляет 3% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 1000 рублей через 2 года?

B26. Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения двух лет она выросла на 304,5 рубля при 3% годовых.

B27. В первый день со склада было отпущено 20% имевшихся яблок. Во второй день – 180% от того количества яблок, которое было отпущено в первый день. В третий день — оставшиеся 88 кг яблок. Сколько килограммов яблок было на складе первоначально?

B28. Изделие, цена которого 500 рублей, сначала подорожало на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена изделия?

B29. Цену на некоторый товар сначала снизили на 30%, а затем повысили на 20%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?

B30. Цену некоторого товара снизили на 15%, а потом еще на 20%. Найдите общий процент снижения цены.

B31. Цена первого товара повысилась на 30%, а потом еще на 5%. Цена второго товара повысилась на 25%. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена одного товара больше первоначальной цены другого товара.

B32. Сумма двух чисел равна 1100. Найдите наибольшее из них, если 6% одного из них равны 5% другого.

B33. Зарплата была повышена два раза за один год. При таком повышении рабочий стал получать вместо 1000 руб. за один день 1254,4 руб. Определите, на сколько процентов повысилась зарплата.

B34. Сберегательный банк в конце года начисляет 2% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 5000 рублей через 3 года?

B35. Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения трех лет она выросла на 765,1 рубля при 2% годовых.

B36. Сберегательный банк в конце года начисляет 5% к сумме, находившейся на счету. На сколько процентов увеличится первоначальный вклад в 2000 рублей через 2 года?

4. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Часть I

Инструкция для учащихся. Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1. Решите уравнение $|2x-7|=5$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B2. Укажите число корней уравнения $|2x^2-7|=5$.

B3. Решите уравнение $|14-6^x|=22$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B4. Решите уравнение $\left|\left(\frac{1}{6}\right)^x-7\right|=29$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B5. Решите уравнение $|2\log_2 x-1|=3$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B6. Решите уравнение $|2\sin x-1|=3$. В ответе укажите наименьший положительный корень (в градусах).

B7. Решите уравнение $|2\cos x+1|=3$. В ответе укажите наибольший отрицательный корень (в градусах).

B8. Решите уравнение $\left|1-5\sqrt{x}\right|=14$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B9. Решите уравнение $\left|5\sqrt[4]{x}-1\right|=19$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B10. Решите уравнение $\left|0,5\sqrt[3]{x}-1\right|=2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B11. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $|x-3|<4$?

B12. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\sqrt{x^4-6x^2+9}<6$?

B13. Сколько натуральных чисел являются решением неравенства $\left|7^x-3\right|\le 4$?

B14. Сколько целых чисел, принадлежащих промежутку $(-3;\ 3)$ являются решением неравенства

$$\left|\left(\frac{1}{7}\right)^x-3\right|\le 4?$$

B15. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $|\lg x|\le 2$?

B16. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\left|\log_{0,25} x\right|\le 2$?

B17. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\left|\sqrt[3]{x}\right| \le 3$?

B18. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\left|\sqrt{x}-1\right| \le 2$?

B19. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $|2-x| > 9$.

B20. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $\left|x^2-3\right| > 17$.

B21. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $\left|\sqrt{x}-2\right| > 17$.

B22. Сколько целых чисел, принадлежащих промежутку (20; 30), являются решением неравенства $\left|\log_5 x - 3\right| > 1$?

B23. Сколько целых чисел, принадлежащих промежутку (−3; 3), являются решением неравенства $\left|2^x - 5\right| > 1$?

B24. Сколько целых чисел являются решением неравенства $(0{,}2)^{|2x-1|} \ge \frac{1}{25}$?

B25. Укажите середину промежутка, являющегося решением неравенства $(0{,}5)^{|4x+1|} \ge \frac{1}{8}$.

В26. Сколько целых чисел являются решением неравенства $\log_{\frac{1}{6}}|3x-3| \geq -1$?

В27. Сколько целых чисел являются решением неравенства $\log_{0,25}|2x-8| \geq -2$?

В28. Решите уравнение $|x-3| = 3x+1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

В29. Решите уравнение $\left|x^2-3\right| = 3x^2-1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

В30. Решите уравнение $\left|\sqrt{x}-3\right| = 3\sqrt{x}+1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

В31. Решите уравнение $\left|2^x-3\right| = 3\cdot 2^x-1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

В32. Решите уравнение $|3\sin x-1| = 2\sin x+1$. В ответе укажите наименьший положительный корень (в градусах).

В33. Решите уравнение $|3\cos x-1| = 2\cos x+1$. В ответе укажите наибольший отрицательный корень (в градусах).

В34. Укажите наименьшее решение уравнения

$$|4x-7| = 4x-7.$$

B35. Укажите наибольшее целое решение уравнения

$$\left|x^2-27\right|=27-x^2.$$

B36. Укажите наименьшее целое решение уравнения

$$\left|2^x-17\right|=2^x-17.$$

B37. Укажите наибольшее решение уравнения

$$\left|\log_5 x-2\right|=2-\log_5 x.$$

B38. Решите уравнение $x^2+\sqrt{x^2}-12=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B39. Решите уравнение $x^2+\left(\sqrt{x}\right)^2-20=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B40. Решите уравнение $\log_2^2 x+2\sqrt{\left(\log_2 x\right)^2}-3=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B41. Решите уравнение $\log_2^2 x+2\left(\sqrt{\log_2 x}\right)^2-3=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B42. Решите уравнение $x^2+4\left(x^{0,5}\right)^2=21$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B43. Решите уравнение $x^2+4\left(x^2\right)^{0,5}=21$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B44. Решите уравнение $|0,5x-6|=|x|$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите среднее арифметическое всех его корней.)

B45. Решите уравнение $\left|3^x-8\right|=\left|3^x-10\right|$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

B46. Решите уравнение $|2\lg x-1|=|\lg x+1|$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

B47. Решите уравнение $\left|0,5\sqrt{x}-2\right|=\left|1,5\sqrt{x}-3\right|$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов сумму всех его корней.)

B48. Укажите наименьшее решение неравенства

$$|x-3|(x-7)\geq 0.$$

B49. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$|x-5|(x-6)<0.$$

B50. Укажите наименьшее решение неравенства

$$\left|2^x-4\right|\left(2^x-64\right)\geq 0.$$

B51. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$|\lg x|(\lg x-1)<0.$$

B52. Решите уравнение $||x|-7|=4$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите наименьший из всех его корней.)

B53. Решите уравнение $||x|-4|=7$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

Часть II

Инструкция для учащихся. Запишите решение с полным его обоснованием.

C54. Решите неравенство $||x|-4|<7$.

C55. Решите уравнение $||\cos x|-3|=2$.

C56. Решите уравнение $||\log_2 x|-2|=3$.

C57. Решите уравнение $||6^x-1|-3|=2$.

C58. Решите уравнение $||\sqrt[4]{x}-1|-1|=1$.

C59. Решите уравнение $\log_3(1-x)+0{,}5\log_3(4x-7)^2=0$.

C60. Решите уравнение

$$\log_2(4x-11)+0{,}25\log_2(2-x)^4=0.$$

C61. Решите уравнение $|x^2-4|+|x^2-9|=7$.

C62. Решите уравнение $|x^2-4|+|x^2-9|=5$.

C63. Решите уравнение $|x^2-4|+|x^2-9|=4$.

С64. Решите уравнение $\left|2-\sqrt{x}\right|+\left|\sqrt{x}-4\right|=2$.

С65. Решите уравнение $\left|\log_3 x+2\right|+\left|\log_3 x-1\right|=5$.

С66. Решите уравнение $\sqrt{4^x-2\cdot 2^x+1}+\left|2^x-9\right|=7$.

С67. Решите уравнение $|5-4x|+|2+4x|=7$.

С68. Решите уравнение $|5-x|+|2+14x|=7-13x$.

С69. Решите уравнение $|5-x|+|2-14x|=-7+15x$.

С70. Решите неравенство $|x+1|+|x+2|+|x-1|<8x-32$.

С71. Решите неравенство

$$|x+1|+|x+2|+|x-1|+|x-2|<8x-32.$$

С72. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2+8x+16}<4x+4.$$

С73. Решите уравнение

$$\left|\log_3\left(x^2-16\right)+x-5\right|=\left|\log_3\left(x^2-16\right)\right|+|x-5|.$$

С74. Решите неравенство

$$\left|\log_3\left(x^2-16\right)+x-5\right|\le\left|\log_3\left(x^2-16\right)\right|+|x-5|.$$

С75. Решите неравенство

$$\left|\log_3\left(x^2-16\right)+x-5\right|\ge\left|\log_3\left(x^2-16\right)\right|+|x-5|.$$

III. УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЯМ ГРУППЫ II

РАЗДЕЛ I

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.1. Преобразования тригонометрических выражений

39. Сгруппируйте слагаемые с суммой аргументов, равной 180°, и примените формулы приведения или формулу суммы косинусов.

40. Примените формулу синуса двойного угла, для этого умножьте выражение на $\dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.

41. Умножьте исходное выражение на дробь $\dfrac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}$. Далее в числителе примените формулу «синуса двойного угла» и используйте равенство $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$.

42. Выразите $\sin\alpha\cos\alpha$ через $\sin\alpha - \cos\alpha$. Для этого рассмотрите $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

43. Выразите $\sin\alpha\cos\alpha$ через $\sin\alpha + \cos\alpha$. И подставьте в исходное выражение, при этом используя формулу разности кубов.

44. Разделите и числитель и знаменатель дроби на $\cos 2\alpha$. И примените формулу тангенса двойного угла.

45. Из уравнения $4\sin 2\alpha = 15\sin^2\alpha + 1$ найдите $\operatorname{tg}\alpha$. Разделите и числитель и знаменатель исходной дроби на $\cos\alpha$.

46. В первой скобке дополните до квадрата суммы и используйте основное тригонометрическое тождество. Во второй скобке используйте формулу суммы кубов.

1.2. Тригонометрические функции

43. Используйте определение четной функции, т.е. $y(-x) = y(x)$.

44. Используйте определение нечетной функции, т.е. $y(-x) = -y(x)$.

45. Найдите сначала $f(0) = \cos 0$, затем $f(f(0))$, т.е. $f(1)$. Аналогично со значением функции $g(g(0))$.

46. Найдите сначала $g(0)$. Затем $f(g(0))$, т.е. $f(0)$.

47. Найдите сначала $f(0)$, затем $f(f(0))$, т.е. $f(0)$. И так далее.

48. Используйте свойства четной функции $f(x) = \cos x$, а именно: если $f(x_0) = 0$, то и $f(-x_0) = 0$.

49. Используйте свойства четной функции $f(x) = 16\cos^4 x - 4\cos x + 1$, а именно: если $f(x_0) = 0$, то и $f(-x_0) = 0$.

50. Уменьшите аргумент каждой из функций, применяя свойства периодичности тригонометрических функций и формулы приведения. Т.е. получите $-\sin 20^\circ$, $-\cos 20^\circ$, $\operatorname{tg} 20^\circ$, $\operatorname{ctg} 20^\circ$. Далее используйте возрастание (убывание) тригонометрических функций на соответствующих промежутках.

51. Оцените каждое слагаемое, т.е. $\sin 1 < 1$, $-1 < \cos 2 < 0$, $\operatorname{ctg} 3 < -1$, $\operatorname{tg} 4 > 1$.

52. Применяя метод вспомогательного аргумента, можно получить, что $E(\cos 200x + \sin 200x) = \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$.

53. Применяя метод вспомогательного аргумента, можно получить, что

$$E(\cos 200x - \sin 200x) = \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right].$$

1.3. Тригонометрические уравнения

53. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом существует. Учтите, что $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ определен не при всех значениях переменной x.

54. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом определен. Учтите, что $\operatorname{tg} x$ определен при

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

55. Уравнение можно решить разложением на множители. Получим: $(\sin \pi x + 3)(2\cos \pi x - 1) = 0$, т.е. $2\cos \pi x - 1 = 0$. Используйте свойства четной функции $f(x) = 2\cos \pi x - 1$, а именно: если $f(x_0) = 0$, то и $f(-x_0) = 0$.

56. Уравнение можно решить введением новой переменной. Получим, что $\sin \pi x = 0{,}5$. Итак,

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{6} + 2m,\ m \in Z,\ (1) \\ x = \frac{5}{6} + 2m,\ m \in Z.\ (2) \end{array}\right.$$

Из (1) серии решений получим $\frac{1}{6}+2\frac{1}{6}+\ldots+18\frac{1}{6}$.

Из (2) серии решений получим $\frac{5}{6}+2\frac{5}{6}+\ldots+18\frac{5}{6}$.

Суммируем решения, используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

57. $$\cos^2 x+0{,}5|\cos x|\cdot\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \cos^2 x+0{,}5\cos x\sin x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ \cos^2 x-0{,}5\cos x\sin x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

58. $$\cos^2 x-0{,}5|\cos x|\cdot\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \cos^2 x-0{,}5\cos x\sin x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ \cos^2 x+0{,}5\cos x\sin x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

59. Уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1,\\ \sin 2x=-1.\end{cases}$

60. Используйте формулу понижения степени для $\cos^2 2x$. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 4x=1,\\ \sin 3x=-1.\end{cases}$$

61. Рассмотрите уравнение как квадратное относительно $\sin x$ и используйте неотрицательность дискриминанта.

62. Уравнение можно решить введением новой переменной. Пусть $\sin x + \cos x = a$, тогда

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

63. Используя свойство ограниченности функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и основное тригонометрическое тождество, получите, что уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos^3 x = \cos^2 x, \\ \sin^4 x = \sin^2 x. \end{cases}$

64. Так как $\cos^4 x = -1 - \sin^3 x \geq 0$, то $\sin^3 x \leq -1$. Поэтому $\sin x = -1$.

65. Рассмотрите уравнение как квадратное относительно и используйте, что $-1 \leq \cos x \leq 1$.

66. Рассмотрите уравнение как квадратное относительно и используйте, что $0 \leq \cos^2 x \leq 1$.

67. Рассмотрите функцию $f(t) = t^2 - t + a$, где $-1 \leq t \leq 1$. Изобразите соответствующую параболу. Чтобы уравнение имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} f(-1) \geq 0, \\ f(1) \leq 0. \end{cases}$$

68. Рассмотрите функцию $f(t) = t^2 - 6t + a$, где $0 \leq t \leq 1$. Изобразите соответствующую параболу. Чтобы уравнение не имело решений, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left[\begin{array}{l} D < 0; \\ \begin{cases} D > 0, \\ f(1) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0, \\ f(0) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

69. Выделите в левой части уравнения квадрат разности $(x - y)^2$.

2. АЛГЕБРА

2.1. Преобразования иррациональных и степенных выражений

61. Используйте формулу разности квадратов.

62. Используйте формулу разности квадратов.

63. Возведите исходное выражение в квадрат.

64. Раскройте скобки и сравните полученное выражение с выражением под знаком арифметического квадратного корня.

65. Возведите первое слагаемое в квадрат и сравните полученное выражение с выражением под знаком арифметического квадратного корня.

66. Рассмотрите выражение $\left(\sqrt{3}+1\right)^3$.

67. Рассмотрите выражение $\left(3-\sqrt{2}\right)^3$.

68. Введите новую переменную $a=\sqrt{x-9}$, тогда исходное выражение будет иметь вид

$$50\left(|a-3|-|a+3|\right).$$

69. Введите новую переменную $a=\sqrt{x-4}$, тогда исходное выражение будет иметь вид $\left(|a-2|-|a+2|\right)$.

70. Получите, что выражение под корнем равно $|x - 1|$ и разложите x^2+2x-3 на множители.

71. Рассмотрите разность

$$A = \sqrt{2004} - \sqrt{2005},\ B = \sqrt{2006} - \sqrt{2007}.$$

Умножьте A и B на сопряженные к ним выражения и сравните знаменатели получившихся дробей.

72. Упростите выражение $\left|8\sqrt{3} - 14\right|$. Рассмотрите числитель дроби и покажите, что он равен $-2\sqrt{6}$.

73. Выделите выражение вида $(a + b)^4$.

2.2. Иррациональные уравнения

50. Функция в левой части уравнения является возрастающей на отрезке $\left[\frac{15}{17};\ +\infty\right)$. Поэтому уравнение имеет не более одного решения.

51. Функция $f(x) = \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}$ является возрастающей на отрезке $\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$. Поэтому уравнение $f(x) = 5$ имеет не более одного решения.

52. Функция $f(x) = \sqrt{129 - x}$ является убывающей на отрезке $(-\infty;\ 129]$, а $g(x) = 3x - 13$ возрастает на всей числовой прямой, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.

53. Рассмотрите область определения уравнения.

54. Рассмотрите область определения уравнения.

55. Область определения уравнения состоит из одного числа $x = -3$.

56. $\sqrt{x^3-3x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x+1=(x-1)^2, \\ x-1\geq 0. \end{cases}$

57. Выделите в левой части уравнения квадрат суммы $(x + 5)^2$.

58. Выделите в левой части уравнения квадрат суммы $(x + 6)^2$.

59. Пусть $y=\sqrt{x-4}$, $y \geq 0$, тогда исходное уравнение имеет вид

$$\sqrt{y^2-2y+1}-\sqrt{y^2-6y+9}=2,$$

$$\sqrt{(y-1)^2}-\sqrt{(y-3)^2}=2,\ |y-1|-|y-3|=2.$$

60. Введите новую переменную $a=\sqrt{2x-5}$ и упростите левую часть уравнения.

61. Рассмотрите первое уравнение системы. Получите, что $x - y - 5 = 0$. Выразите y через x или x через y и подставьте во второе уравнение.

62. Рассмотрите первое уравнение системы. Получите, что $x + 3y + 1 = 4$. Выразите x через y или y через x и подставьте во второе уравнение.

63. Введите новые переменные $a=\sqrt[4]{1-x}$, $b=\sqrt[4]{x+15}$ и решите систему

$$\begin{cases} a+b=2, \\ a^4+b^4=16, \\ a\geq 0, \\ b\geq 0. \end{cases}$$

64. Оцените левую и правую часть уравнения. Получите, что уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+4x+8=4, \\ x^2-4=0. \end{cases}$$

65. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2000, \\ x \geq a; \end{cases} \\ x=a. \end{array}\right.$$

66. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a, \\ x \geq 2000; \end{cases} \\ x=2000. \end{array}\right.$$

67. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-3, \end{array}\right. \\ x \geq a; \end{cases} \\ x=a. \end{array}\right.$$

68. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 3; \end{array}\right. \end{cases} \\ x=1,\ x=3. \end{array}\right.$$

69. $\sqrt{x-a}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4\geq 0, \\ x-a=(x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4, \\ x^2+7x+16+a=0. \end{cases}$

Уравнение имеет единственное решение, если

1. $D = 0$ и $x_1 = x_2 \geq -4$.
2. $D > 0$ и один из корней меньше -4, а другой больше -4, т.е., как говорят, -4 разделяет корни.

70. $\sqrt{x+2a}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\geq 0, \\ x+2a=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3, \\ x^2-7x+9-2a=0. \end{cases}$

Уравнение имеет единственное решение, если

1. $D = 0$ и $x_1 = x_2 \geq 3$.
2. $D = 0$ и 3 разделяет корни.

2.3. Преобразование логарифмических выражений

44. Выразите через a значение $\log_3 2$ и выразите через этот логарифм данное выражение. Для этого преобразуйте логарифм частного.

45. См. указание к предыдущему заданию.

46. Разложите 14 на множители 7 и 2.

47. Разложите 18 на множители.

48. Приведите к общему знаменателю выражения в круглых скобках. При извлечении квадратного корня из квадрата логарифмического выражения не забудьте оставить модуль. Определите знак выражения под модулем и раскройте модуль, используя его определение.

49. См. указание к предыдущему заданию.

50. Перейдите к одному основанию в логарифмическом выражении во внутренних скобках. Используйте формулу $\sqrt{a^2}=|a|$. Не забудьте раскрыть модуль с учетом знака выражения, стоящего под модулем.

51. См. указание к предыдущему заданию.

2.4. Логарифмические уравнения и неравенства

68. Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, если каждое из выражений равно нулю. Проще первое выражение приравнять нулю, решить соответствующее уравнение, а его корни подставить во второе выражение для проверки.

69. См. указание к предыдущему заданию.

70. См. указание к заданию № 68.

71. См. указание к заданию № 68.

72. См. указание к заданию № 68.

73. Схема равносильных преобразований для решения данного уравнения следующая:

$$\log_{f(x)} g(x)=c \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=f^c(x), \\ f(x)>0, \\ f(x)\neq 1. \end{cases}$$

74. Разложите на множители выражения под логарифмами. С учетом ООУ отберите корни уравнения.

75. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем. Каждая из двух систем характеризует один из возможных случаев для основания логарифма: $x - 1 > 1$ или $0 < x - 1 < 1$.

76. См. указание к предыдущему заданию.

77. Оцените основание логарифма, тогда сможете выбрать схему равносильных преобразований.

78. Перейдите к одному основанию логарифма (например, к основанию 10) и с помощью введения новых переменных сведите систему к алгебраической системе с двумя неизвестными.

79. Оцените основание логарифма. Покажите, что основание меньше 1 при любых значениях a.

80. Оцените основание логарифма. Покажите, что основание больше 1 при любых значениях a.

2.5. Показательные уравнения и неравенства

44. *1 способ.* Решите уравнение относительно новой переменной $y = 2006^x$, $y > 0$. Рассмотрите два случая: дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю, а корень квадратного уравнения положительный и дискриминант больше нуля, но только один корень квадратного уравнения положительный. *2 способ.* Рассмотрите функцию $f(t) = t^2 - 4t + m^2 - 3m$, где $t = 2006^x > 0$. Уравнение имеет единственный корень, если $f(0) < 0$.

45. См. указание к решению предыдущего задания.

46. Выражение в левой части уравнения разложите на множители и рассмотрите возможные значения параметра a: 1) $a < 0$; 2) $a = 0$; 3) $a > 0$.

47. Сравните числа $\sqrt{3}$ и $\log_3 4$.

48. Сравните числа $\sqrt{5}$ и $\log_3 7$.

49. Рассмотрите первое уравнение системы и введите новую переменную $t = 2^{2x-y}$, $t > 0$. Не забудьте отбросить посторонние корни. Обратите внимание на ОДЗ дробно-рационального выражения.

50. Рассмотрите первое уравнение системы и введите новую переменную $t = 2^{3x+y}$, $t > 0$. Не забудьте отбросить посторонние корни. Обратите внимание на ОДЗ дробно-рационального выражения.

51. Решите второе неравенство. Получите, что 1) $x > 4$ или 2) $x < -4$. В первом случае первое неравенство равносильно неравенству $2^{x^2} + x^2 < 2$, которое не имеет решений при $x > 4$, т.к. $2^{x^2} > 2^4 = 16$. Во втором случае первое неравенство равносильно неравенству $2^{x^2} + x^2 > 2$.

52. Воспользуйтесь заменой переменных:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \frac{5^2 - 24}{\sqrt{5-\sqrt{24}}} = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}.$$

53. Перейдите к одному основанию и решите иррациональное неравенство с учетом того, что $\sqrt{x+1} > 0$ для $x \geq 0$.

54. Рассмотрите функцию $f(x) = 5x + 4 \cdot 3^{x+1}$. Функция является возрастающей и $f(3) = 449$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Производная функции

70. Так как точка M не принадлежит графику функции, то запишите уравнение касательной в общем виде и подставьте координаты точки $M(-1;\ 0)$. Получите, что $x_0 = 0$.

71. Так как точка P не принадлежит графику функции, то запишите уравнение касательной в общем виде и подставьте координаты точки $P(2;\ 0)$. Получите, что $x_0 = 0$.

72. Для того чтобы прямая $y = bx$ была касательной к параболе $f(x) = x^2 - 2x + 4$ в точке с абсциссой x_0, необходимо и достаточно, чтобы: 1) значения обеих функций при $x = x_0$ совпадали; 2) угловой коэффициент прямой $y = bx$ (b) был равен значению производной функции $f(x) = x^2 - 2x + 4$ в точке x_0. Решим систему:

$$\begin{cases} bx_0 = x_0^2 - 2x_0 + 4, \\ b = 2x_0 - 2. \end{cases}$$

73. Необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1) $f'(x_0) = -10$, 2) $y(x_0) = f(x_0)$.

74. Постройте схематично график функции $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$.

Рассмотрите прямые $y = a$, параллельные или совпадающие с осью OX.

75. Постройте схематично график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрите прямые $y = a$, параллельные или совпадающие с осью OX.

76. Пусть x высота, т.е длина бокового ребра параллелепипеда. Тогда стороны его основания равны x и $\frac{32}{x^2}$, а периметр основания $P=2\left(x+\frac{32}{x^2}\right)$. Исходя из смысла задачи переменная x принимает только положительные значения. Исследуйте функцию $P(x)=2\left(x+\frac{32}{x^2}\right)$ на наименьшее значение при $x \in (0;\ +\infty)$. Для этого найдите производную функции и исследуйте ее знак на промежутке $(0;\ +\infty)$.

77. Пусть x сторона квадратного основания бассейна. Тогда его высота равна $\frac{32}{x^2}$. Исследуйте функцию $P(x)=x^2+\frac{128}{x^2}$ на наименьшее значение при $x \in (0;\ +\infty)$.

78. Пусть x высота, т.е длина бокового ребра параллелепипеда. Тогда стороны его основания равны x и $\frac{4}{x^2}$, а периметр основания $P=2\left(x+\frac{4}{x^2}\right)$. Исследуйте функцию $P(x)=2\left(x+\frac{4}{x^2}\right)$ на наименьшее значение при $x \in (0;\ +\infty)$.

79. $f'(x)<0$ для любого $x \in R$.

80. $D(h) = [-14;\ 6]$. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $h(x)$ на этом отрезке.

81. Пусть $t=\sqrt{4\cos x+5}$, тогда $1 \le t \le 3$. Тогда $g(t) = t^2 - 4t - 5$. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $g(t)$ на отрезке [1; 3].

82. Функция $g(x)$ убывает на $D(g) = [2; 3]$.

3.2. Первообразная функции

18. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций. Пусть $f(x) = 2x^2 + 3x$ и $g(x) = 5$, тогда площадь фигуры можно найти по формуле

$$S=\int_{-2,5}^{1}(g(x)-f(x))dx.$$

19. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций. Пусть $f(x) = 2x^2 - 3x$ и $g(x) = -1$, тогда площадь фигуры можно найти по формуле

$$S=\int_{0,5}^{1}(g(x)-f(x))dx.$$

20. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций. Пусть $f(x) = x^2 - 6x + 5$ и $g(x) = 5 - 2x - x^2$, тогда площадь фигуры можно найти по формуле

$$S=\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))dx.$$

21. Первообразная имеет вид $F(x) = (x - 1)^2$. Площадь фигуры можно найти как разность площадей прямоугольного треугольника и соответствующей криволинейной трапеции.

22. Уравнение касательной $y=\frac{2}{5}x+2\frac{3}{5}$. Площадь фигуры можно найти как разность площадей прямоугольного треугольника и криволинейной трапеции.

23. Уравнение касательной $y=\frac{1}{3}x+1\frac{1}{3}$. Площадь фигуры можно найти как разность площадей прямоугольного треугольника и криволинейной трапеции.

24. Первообразная имеет вид $F(x)=-x^3-x^2+16x+16$. Решите уравнение $F(x) = 0$ с помощью группировки.

25. Первообразная $f(x)$ имеет вид $F(x) = \sin x + \cos x - 1$. Для решения уравнения $F(x) = 0$ используйте вспомогательный угол.

26. Первообразная $f(x)$ имеет вид $F(x) = \sin 2x + \cos x$. Для решения уравнение $F(x) = 0$ можно решить разложением на множители.

27. $y=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4-x^2, \\ y\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y\geq 0. \end{cases}$ Получаем, что графиком функции является полуокружность с центром в точке (0; 0) и радиусом, равным 1, расположенная в верхней полуплоскости.

28. Графиком функции $y=\sqrt{8x-x^2-12}$ является полуокружность с центром в точке (4; 0) и радиусом, равным 2, расположенная в верхней полуплоскости.

29. Так как по определению $F'(x)=f(x)$, а функция $f(x)$ принимает только отрицательные значения на R, то $F(x)$ убывает на R.

30. Представьте формулу, задающую функцию $f(x)$, в следующем виде:

$$f(x)=(x-1)(x+3)^{32}=(x+3-4)(x+3)^{32}=$$
$$=(x+3)^{33}-4(x+3)^{32}.$$

31. Представьте формулу, задающую функцию $f(x)$, в следующем виде:

$$f(x)=(x+5)(x-7)^{2005}=$$
$$=(x-7+12)(x-7)^{2005}=(x-7)^{2006}+12(x-7)^{2005}.$$

4. ГЕОМЕТРИЯ

4.1. Планиметрия

64. Треугольники ABP и CBP имеют общую высоту, опущенную из вершины B, поэтому отношение их площадей равно отношению длин сторон AP и PC. Аналогично для треугольников APD и CPD.

65. См. указание к решению предыдущего задания.

66. Треугольники BOC и DOC имеют общую высоту, опущенную из вершины C, поэтому отношение их площадей равно отношению длин сторон BO и OD. Из подобия треугольников BOC и DOM получите, что $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{BC}{DM}$. Отношение $\dfrac{BC}{DM}$ вычислите, используя подобия треугольников KBC и KAM.

67. См. указание к решению предыдущего задания.

4.2. Стереометрия

65. Докажите, что центр сферы принадлежит высоте и длины отрезков касательных, проведенных из каждой вершины к сфере, равны 1. А затем используйте подобие треугольников.

66. Докажите, что центр шара принадлежит прямой, перпендикулярной плоскости основания и проходящей через центр окружности, описанной около основания.

67. Сечением является равнобедренный треугольник, площадь которого зависит от длины высоты, опущенной на боковую сторону. Задача сводится к нахождению расстояния между скрещивающимися прямыми.

68. Используйте следующую формулу объема пирамиды $V_{AMLC}=\frac{1}{3}S_{CML}\cdot h$. Докажите, что $h = AM$. Выразите S_{CLM} через S_{CDB} и получите, что $S_{CLM}=\frac{CL\cdot DM}{CD\cdot BD}\cdot S_{CDB}$. Окончательно: $h=2\sqrt{2}$, а $S_{CLM}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

РАЗДЕЛ II

1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

60. Перенесите все слагаемые в левую часть неравенства и вынесите общий множитель $\sqrt{20+x-x^2}$. Исходное неравенство будет равносильно неравенству

$$\frac{\sqrt{20+x-x^2}\cdot(-x+3)}{(2x-3)\cdot(x-6)}\le 0.$$

61. Разложите числитель на множители и получите

$$(x+1)^3(x-1)(x-2)^2.$$

62. Неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\sqrt{x^2-1}(x+6)(x-3)(2x-1)^2}{(x-2)(x-3)} \le 0.$$

63. Сведите решение рационального неравенства к решению квадратного:

$$\frac{x-2a-1}{x-a} < 0 \Leftrightarrow (x-2a-1)(x-a) < 0.$$

Сравните $2a + 1$ и a. Возможны 3 случая: 1) $2a + 1 > a$; 2) $2a + 1 = a$; 3) $2a + 1 < a$.

64. Сведите решение рационального неравенства к решению квадратного:

$$\frac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2a-4)(x+3a-2) \le 0, \\ x \ne 2-3a. \end{cases}$$

Сравните $2a + 4$ и $2 - 3a$. Возможны 3 случая: 1) $2a + 4 = 2 - 3a$; 2) $2a + 4 > 2 - 3a$; 3) $2a + 4 < 2 - 3a$.

65. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 9 < 0, \\ x \ne \pi n,\ n \in Z. \end{cases}$

66. Неравенство равносильно неравенству $x^2 - 9 < 0$.

67. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 9 \le 0, \\ x > 0. \end{cases}$

68. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 9 < 0, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$

69. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2-9<0, \\ x\geq 0. \end{cases}$

70. Решите неравенство методом интервалов. Получите, что $x\in(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 3)$ и выберите натуральные решения.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ

78. Решите систему $\begin{cases} 9{,}6+0{,}2x-x^2\geq 0, \\ \sin x\neq 0. \end{cases}$

79. Решите систему $\begin{cases} 6{,}4-2{,}4x-x^2\geq 0, \\ \cos x\neq 0. \end{cases}$

80. Найдите множество значений функции $y = \sin x + 5$. Затем используйте убывание функции $\log_{0,5}t$ на $D(\log_{0,5}t)$.

81. При $x \geq 0$ $y = \log_3 3$, при $-1{,}5 < x < 0$ $y = \log_{0,5}(2x + 3)$.

82. Найдите множество значений показателя степени, а затем самой функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{3-\sin x}}$, учитывая, что функция $y = (0{,}5)^x$ – непрерывная и убывающая на $D(y)$.

83. *1 способ.* График функции $y=x^2+(a-2)x+0{,}25$ – парабола – должна лежать выше оси OX или касаться ее. Поэтому достаточно найти ординату вершины параболы и решить неравенство $y_в \geq 0$. *2 способ.* Для того чтобы парабола лежала выше оси OX или касалась ее, достаточно, чтобы дискриминант соответствующего уравнения был меньше или равен нулю.

84. $f(3) = 30$ и функция $f(x) = x + 3^x$ возрастает на всей числовой прямой.

85. $f(2) = -3$ и функция $f(x) = -x + \log_{0,5}x$ убывает на промежутке $(0; +)$.

86. Область определения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 4x - a \leq 0. \end{cases}$$

Квадратный трехчлен во втором неравенстве задает параболу с вершиной $x_в = 2$ и направленную ветвями вверх. Для того чтобы система имела единственное решение, достаточно, чтобы парабола пересекала ось OX в точке 3.

87. См. указание к решению задания 86.

4. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕСТВА С МОДУЛЕМ

54. Неравенство равносильно двойному неравенству: $-7 < |x| - 4 < 7$.

55. Уравнение равносильно совокупности уравнений: $|\cos x| - 3 = 2$ или $|\cos x| - 3 = -2$. Первое уравнение решений не имеет.

56. Уравнение равносильно совокупности уравнений: $|\log_2 x| - 2 = 3$ или $|\log_2 x| - 2 = -3$. Второе уравнение решений не имеет.

57. Уравнение равносильно совокупности уравнений: $|6^x - 1| - 3 = 2$ или $|6^x - 1| - 3 = -2$. Второе уравнение решений не имеет.

58. Уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left|\sqrt[4]{x}-1\right|-1=1$ или $\left|\sqrt[4]{x}-1\right|-1=-1$.

59. Рассмотрите выражение $0{,}5\log_3(4x-7)^2$. Упростите его $\left(0{,}5\log_3(4x-7)^2=\log_3|4x-7|\right)$, учитывая, что $1 - x > 0$.

60. Рассмотрите выражение $0{,}25\log_2(2-x)^4$. Упростите его, учитывая, что $4x - 11 > 0$.

61. Введите новую переменную, например $a = x^2$. Получите уравнение $|a-1|+|a-9|=7$. Рассмотрите различные случаи: 1) $a < 4$; 2) $4 \le a \le 9$; 3) $a > 9$. Решите, соответственно, три системы.

62. См. указание к решению предыдущего задания.

63. См. указание к решению задания 61.

64. Введите новую переменную, например $a=\sqrt{x}$. Получите уравнение $|2-a|+|a-4|=2$. Рассмотрите различные случаи: 1) $a < 2$; 2) $2 \le a \le 4$;3) $a > 4$. Решите, соответственно, три системы. Решением уравнения $|2-a|+|a-4|=2$ будет отрезок [2; 4].

65. Введите новую переменную, например $a=\log_3 x$. Решите уравнение $|a+2|+|a-1|=5$. Уравнение имеет два корня: 2 и (−3).

66. Упростите выражение $\sqrt{4^x-2\cdot 2^x+1}$, применяя формулу квадрата разности.

67. *1 способ.* Введите новую переменную, например $b = 4x$, и решите уравнение $|5-b|+|2+b|=7$. *2 способ.* Имеем: $|a|+|b|=a+b$ (*). Если $a = 0$, то $|b| = b$, т.е. $b \geq 0$. Если $b = 0$, то $|a| = a$, т.е. $a \geq 0$. Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то уравнение (*) равносильно системе $\begin{cases} a>0, \\ b>0. \end{cases}$ Обобщим результат:

$$|a|+|b|=a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$$

68. Используйте следующее свойство модулей:

$$|a|+|b|=a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$$

69. Используйте следующее свойство модулей:

$$|a|+|b|=-a+(-b) \Leftrightarrow \begin{cases} -a \geq 0, \\ -b \geq 0. \end{cases}$$

70. Определите знак выражения $8x - 32$. Это позволит раскрыть модули всех выражений.

71. Определите знак выражения $8x - 32$. Это позволит раскрыть модули всех выражений.

72. Упростите каждое слагаемое левой части неравенства и определите знак выражения $4x + 4$.

73. Используйте следующее свойство модулей:

$$|a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab \geq 0.$$

74. Так как $|a+b| \leq |a|+|b|$ при любых действительных значениях a и b, то для решения неравенства достаточно потребовать условия существования выражения $\log_3\left(x^2-16\right)$.

75. Используйте следующее свойство модулей:

$$|a+b| \geq |a|+|b| \Leftrightarrow ab \geq 0.$$

IV. ОТВЕТЫ

Раздел I

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.1. Преобразования тригонометрических выражений

№	Ответ	№	Ответ
1	13	24	1
2	10	25	−2
3	1	26	0
4	0	27	19
5	0,29	28	0
6	−1,5	29	1
7	−0,6	30	0,8
8	−0,96	31	0,6
9	0,28	32	4
10	0,28	33	−3
11	0	34	0,5
12	−0,11	35	0,5
13	−0,24	36	−0,75
14	0,41	37	7
15	−0,59	38	0,5
16	0,16	39	−1
17	0,04	40	2
18	−8	41	0,25
19	4	42	12
20	0,17	43	39
21	0,64	44	−2,25
22	−1	45	2
23	2	46	1

1.2. Тригонометрические функции

№	Ответ	№	Ответ
1	1	22	1
2	−1,5	23	2
3	1,5	24	7
4	2	25	5
5	2,5	26	−17
6	2	27	−13
7	0,5	28	0,5
8	−1	29	−2
9	0,5	30	−2
10	0	31	3
11	1	32	−2
12	−2	33	2
13	0	34	4
14	3	35	4
15	1	36	1
16	4	37	1
17	8	38	3
18	−1	39	0
19	7	40	1,5
20	0	41	1
21	−1	42	6

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
43	1	**49**	0
44	0	**50**	cos2000°, sin2000°, tg2000°, ctg 2000°
45	$f(f(0)) > g(g(o))$	**51**	tg4, sin1, cos2, ctg3
46	1	**52**	[–2; 2]
47	0	**53**	[0; 2]
48	0		

1.3. Тригонометрические уравнения

№	Ответ	№	Ответ
1	–30	**13**	3
2	150	**14**	3
3	–120	**15**	2
4	30	**16**	0
5	15	**17**	1
6	–120	**18**	0
7	3	**19**	360
8	0	**20**	20
9	–30	**21**	8
10	120	**22**	7
11	120	**23**	210
12	210	**24**	300

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
25	1	41	2
26	0	42	3
27	1	43	0
28	2	44	0
29	1	45	−180
30	2,5	46	540
31	135	47	45
32	−360	48	225
33	30	49	−45
34	−120	50	−60
35	−60	51	−3
36	2	52	2
37	90	53	3
38	3	54	810
39	1	55	0
40	1	56	190

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
57	$\pm\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,$ $n \in Z$ $\frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$	64	$-\frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$
58	$(-1)^n \operatorname{arctg} 2 + \pi n,$ $n \in Z$ $\frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$	65	$-0{,}5$
59	$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$	66	0
60	$\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$	67	$[-2;\ 0]$
61	$\pi n,\ n \in Z$	68	6
62	$\pi + 2\pi n,\ n \in Z$ $-\frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$	69	$\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
63	$\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $2\pi m,\ m \in Z$		

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1		Вариант 2	
№	Ответ	№	Ответ
1	–0,96	1	–0,96
2	0,5	2	1
3	0,5	3	0,5
4	0	4	–1
5	–150	5	210
6	2	6	36
7	–5	7	5
8	3	8	1
9	2	9	–4
10	$\frac{2\pi}{3}$	10	2

2. АЛГЕБРА

2.1. Преобразования иррациональных и степенных выражений

№	Ответ	№	Ответ
1	0,3	6	–27
2	–0,3	7	6
3	6	8	1
4	–5	9	–40
5	17	10	4

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
11	−11	**32**	2
12	4	**33**	−4
13	10	**34**	−2
14	1,4	**35**	−1
15	48	**36**	0
16	30	**37**	0
17	3	**38**	12
18	1	**39**	2
19	1,25	**40**	3
20	1,8	**41**	25
21	1,2	**42**	−5,75
22	96	**43**	−8,1
23	2	**44**	0,6
24	−1	**45**	1,5
25	17	**46**	0,75
26	0	**47**	5
27	1	**48**	0,25
28	2	**49**	10
29	−12	**50**	1,5
30	8	**51**	1
31	6	**52**	0,8

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
53	−2	64	−1
54	−1,5	65	0
55	−90	66	1
56	4	67	3
57	2000	68	−13
58	200	69	−4
59	24	70	$-\frac{\sqrt{x+1}}{x+3}$
60	−2	71	2-е выражение больше 1-го
61	9	72	Да, (−2)
62	16	73	256
63	10		

2.2. Иррациональные уравнения

№	Ответ	№	Ответ
1	−112	6	−2
2	2	7	5
3	−27	8	−2
4	5	9	−1
5	2	10	9

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
11	–3	31	1
12	20	32	1
13	17	33	3
14	1	34	–1
15	4	35	4
16	–2	36	2
17	–6	37	1
18	1	38	6
19	1	39	1
20	2	40	4
21	1,5	41	1
22	–2,5	42	1
23	2	43	3
24	4	44	0
25	–3	45	2
26	4	46	0
27	1	47	0
28	16	48	2
29	1,5	49	2
30	–2	50	3

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
51	2	61	(5; 1)
52	8	62	(0; 1)
53	Решений нет	63	−15; 1
54	2	64	−2
55	−3	65	при $a < -2000$ $\left[\begin{array}{l} x=-2000, \\ x=a; \end{array}\right.$ при др. a $x = a$
56	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	66	при $a \geq 2000$ $x = a$, при др. a $x = 2000$
57	−5	67	$[-3; -1)$
58	−6	68	1; 3
59	$[13; +\infty)$	69	−5
60	1,5	70	−1

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1		Вариант 2	
№	Ответ	№	Ответ
1	8	1	30
2	256	2	324

Окончание табл.

Вариант 1		Вариант 2	
№	Ответ	№	Ответ
3	6	3	6
4	−0,5	4	−0,4
5	−10	5	−27
6	5	6	−1
7	2000	7	2000
8	−1,5	8	2,5
9	−1,25	9	−1,75
10	2	10	3

2.3. Преобразования логарифмических выражений

№	Ответ	№	Ответ
1	−2	10	5
2	−2	11	47
3	0,5	12	2
4	3	13	4
5	2	14	9
6	2	15	2
7	1	16	9
8	−1	17	−2
9	1	18	1

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
19	16	36	16
20	0	37	3
21	0	38	1
22	–3,5	39	1
23	10	40	0
24	2	41	4
25	3,5	42	0
26	8	43	1
27	–10	44	$\frac{5-8a}{6a+3}$
28	4	45	$\frac{8a-5}{6a+3}$
29	28,5	46	1
30	4	47	–2
31	0,6	48	$-2\log_4 3$
32	0,5	49	–2
33	1,5	50	$\log_3 4-\log_4 3$
34	2	51	$\log_2 3-\log_3 2$
35	1		

2.4. Логарифмические уравнения и неравенства

№	Ответ	№	Ответ
1	7	21	−4
2	27	22	−4
3	27	23	0
4	11	24	1
5	30	25	12
6	3,5	26	1
7	22	27	13
8	61,5	28	55
9	2,75	29	24
10	3,5	30	36
11	7	31	6
12	2	32	8
13	49	33	6
14	25	34	3
15	2,5	35	8
16	−1	36	2
17	5	37	4
18	−25	38	2
19	−32	39	2
20	4	40	6

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
41	24	59	−8
42	5	60	14
43	2	61	1
44	0	62	4
45	1	63	1
46	4	64	−2
47	2,25	65	32,25
48	1,75	66	1
49	4,2	67	1
50	7	68	−1
51	4	69	2
52	1	70	−3; 0,5
53	1	71	0
54	0,1	72	Решений нет
55	7	73	2
56	2	74	0,25
57	1	75	(1; 2)
58	2	76	$[-3; 2)\cup(1; 2)$

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
77	$\left(2-\sqrt{2};\ 1\right]\cup\left[3;\ 2+\sqrt{2}\right)$	79	$\left(\frac{5}{3};\ 6{,}5\right]$
78	(10; 1)	80	$[-1;\ +\infty)$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1		Вариант 2	
№	**Ответ**	**№**	**Ответ**
1	2	1	1
2	0,04	2	0,1
3	0,25	3	0,04
4	10	4	6
5	24	5	15
6	2	6	4
7	2	7	−1
8	1	8	2
9	5	9	4
10	*При* $a > 0$ $x = -2.$ $x = 0$; *при* $-6 < a \le 0$ $x = -2$; *при* $a \le -6$ решений нет	10	*При* $a < 0$ $x = 0$, $x = 8$; *при* $0 \le a < 40$ $x = 8$; *при* $a \ge 40$ решений нет

2.5. Показательные уравнения и неравенства

№	Ответ	№	Ответ
1	5	19	3,5
2	–7	20	4,6
3	–1	21	4
4	2,5	22	2
5	–7	23	0
6	6	24	1
7	30	25	3
8	–0,6	26	4
9	8	27	1
10	0	28	2
11	1	29	0,5
12	6	30	0
13	0	31	–1
14	–1	32	1
15	1	33	1
16	2	34	0
17	2	35	2
18	3	36	0

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
37	-1	**46**	При $a < 0$ $x < \log_3(-a)$, при $a > 0$ $x < \log_3(a/9)$
38	-2	**47**	$(-\infty;\ \sqrt{3}) \cup (\log_3 4;\ \sqrt{3})$
39	-1	**48**	$(-\sqrt{5};\ \log_3 7) \cup (\sqrt{5};\ +\infty)$
40	-1	**49**	$(0,5;\ 0)$
41	1	**50**	$(1;\ -2)$
42	2	**51**	$(-\infty;\ -4)$
43	2	**52**	$2;\ -2$
44	$[0;\ 3] \cup \{-1;\ 4\}$	**53**	$(25;\ +\infty)$
45	$[0;\ 8] \cup \{-1;\ 9\}$	**54**	2

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1		Вариант 2	
№	**Ответ**	**№**	**Ответ**
1	2	**1**	3
2	3,5	**2**	2,5
3	-3	**3**	4

Окончание табл.

Вариант 1		Вариант 2	
№	**Ответ**	**№**	**Ответ**
4	6	**4**	4
5	1	**5**	1
6	0	**6**	2
7	2	**7**	3
8	1	**8**	2
9	1; –1	**9**	2; –2
10	$\left(0;\ \frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};\ +\infty\right)$	**10**	$(-\infty;\ 0]\cup\{1{,}5\}$

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Производная функции

№	Ответ	№	Ответ
1	7	**8**	8
2	5	**9**	2
3	–2	**10**	2
4	0	**11**	–2,5
5	–3	**12**	0
6	–3	**13**	–1
7	–2	**14**	0

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
15	2	**35**	0,125
16	−4	**36**	4
17	0,5	**37**	−4
18	7	**38**	−6
19	5	**39**	7
20	0	**40**	7
21	1	**41**	−3
22	−6	**42**	2
23	32	**43**	2
24	−0,5	**44**	1
25	1	**45**	4
26	1	**46**	4
27	9	**47**	1
28	135	**48**	1
29	−8	**49**	0
30	−6	**50**	2
31	−6	**51**	3
32	7,5	**52**	3
33	5	**53**	3
34	−1	**54**	18

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
55	−18	69	−5
56	−14	70	30
57	14	71	1
58	0	72	−6; 2
59	8	73	−5
60	6	74	$\left(0;\ \frac{4}{3}\right)$
61	−2	75	$(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$
62	4	76	12
63	1	77	32
64	3	78	6
65	1	79	$(-\infty;\ +\infty)$
66	2	80	$\left[2\sqrt{5};10\right]$
67	5	81	$[-9;\ -8]$
68	20	82	$\left[-3\sqrt{5};\ 2\right]$

3.2. Первообразная функции

№	Ответ	№	Ответ
1	8	17	6
2	17	18	$14\frac{7}{24}$
3	1	19	$\frac{1}{24}$
4	0,25	20	$2\frac{2}{3}$
5	4	21	4
6	32	22	$10\frac{5}{12}$
7	4	23	4,5
8	3	24	16
9	0,2	25	2π
10	12	26	$\frac{7\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$
11	16	27	2π
12	32	28	π
13	10	29	$F(1) > F(2)$
14	9	30	$\frac{(x+3)^{32}}{34}-4\frac{(x+3)^{33}}{33}+C,\ C\in R$
15	4,5	31	$\frac{(x-7)^{2007}}{2007}+\frac{6(x-7)^{2006}}{1003}$
16	9		

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1		Вариант 2	
№	Ответ	№	Ответ
1	1	1	1
2	3	2	4
3	14	3	9
4	7	4	5
5	3	5	1
6	−7	6	9
7	2	7	2
8	−2	8	64
9	36	9	32
10	45	10	45

4. ГЕОМЕТРИЯ

4.1. Планиметрия

№	Ответ	№	Ответ
1	10	18	0
2	16	19	0,25
3	16	20	−4
4	25	21	42
5	3	22	8
6	13	23	32
7	168	24	0,75
8	80	25	0,5
9	9,6	26	2
10	1,5	27	3
11	16	28	14
12	19,2	29	14
13	5	30	−4
14	13,5	31	−9
15	4,8	32	4
16	5	33	7
17	1	34	12

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
35	8	52	12
36	−5	53	4
37	2	54	28
38	15	55	170
39	10	56	24
40	10,625	57	12
41	8,125	58	25
42	5	59	15
43	13	60	9
44	16	61	6,5
45	9	62	2,2
46	20	63	60
47	120	64	2
48	30	65	8
49	4	66	$\frac{3}{8}$
50	13	67	$\frac{4}{13}$
51	510		

4.2. Стереометрия

№	Ответ	№	Ответ
1	66	19	1,5
2	21	20	10
3	14300	21	90
4	52,8	22	4
5	7	23	16
6	210	24	64
7	45	25	16
8	60	26	16
9	4,8	27	32
10	10	28	75
11	6	29	1,5
12	4	30	41,25
13	45	31	1200
14	2	32	3
15	0,25	33	45
16	0,6	34	3
17	0,6	35	12
18	60	36	48

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
37	2	53	4
38	12	54	4
39	0,2	55	240
40	13	56	140
41	3	57	8
42	28	58	42
43	1000	59	3
44	16	60	10
45	216	61	16
46	16	62	4
47	1	63	4
48	10	64	1,5
49	204	65	$\frac{10}{7}$
50	4	66	2
51	6	67	$4\sqrt{66}$
52	45	68	$\frac{8\sqrt{2}}{3}$

Раздел II

1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

№	Ответ	№	Ответ
1	–3	19	17
2	16	20	–4
3	–1	21	4
4	5	22	4
5	4	23	2
6	–0,5	24	4
7	0	25	2
8	3	26	6
9	0	27	–4
10	–4	28	8
11	0,25	29	1,5
12	4	30	20
13	6	31	7
14	20	32	14
15	6	33	8
16	0	34	4
17	1	35	7
18	0,2	36	–1

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
37	0	54	3
38	1	55	2
39	5	56	3
40	−1	57	12
41	2	58	8
42	−0,5	59	6
43	−6	60	$[3;\ 1,5)$
44	2	61	$(-7;\ -1];\ \{2\}$
45	6	62	$[-6;\ -1],\ [1;\ 2)$
46	0	63	$(0,5;\ 1)$
47	0	64	$(-\infty;\ -1,5],\ \left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$
48	2	65	4
49	3	66	5
50	6	67	3
51	0	68	3
52	6	69	3
53	7	70	2

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ

№	Ответ	№	Ответ
1	6	19	0
2	0,5	20	4
3	−1	21	−3
4	−10	22	−2
5	−33	23	7
6	−32	24	5
7	−59	25	4
8	−58	26	7
9	25	27	6
10	26	28	−1
11	−1	29	−8
12	−2	30	−7
13	−33	31	11
14	25	32	1
15	25	33	7
16	0,04	34	3
17	24	35	1
18	3	36	4

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
37	7	55	8
38	7	56	2
39	11	57	3
40	3	58	2
41	1	59	7
42	17.5	60	2
43	8.75	61	5
44	3	62	6
45	−4	63	2
46	2	64	−1
47	−2	65	2
48	2.5	66	3
49	−0.5	67	1
50	4	68	−8
51	−4	69	72
52	9	70	8.4
53	8	71	4.4
54	5	72	0

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
73	0	**81**	$(-\infty;\ 1]$
74	5	**82**	$\left[\frac{1}{64};\ \frac{1}{8}\right]$
75	3	**83**	$[1;\ 3]$
76	5	**84**	$(3;\ +\infty)$
77	3	**85**	$(0;\ 2]$
78	$[-3;\ 0)\cup(0;\ \pi)\cup(\pi;\ 3{,}2]$	**86**	$a = -3$
79	$\left[-4;\ \frac{-\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\ 1{,}6\right]$	**87**	$a = -8$
80	$\left[\log_{0,5} 6;\ -2\right]$		

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

№	Ответ	№	Ответ
1а	35	**1е**	6
1б	2	**2**	80
1в	300	**3**	96
1г	7	**4**	15
1д	5	**5**	16

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
6	19	22	2
7	168	23	720
8	15 000	24	54
9	25	25	60,9
10	10 100	26	5000
11	2600	27	200
12	100	28	660
13	2,5	29	16
14	82	30	32
15	15	31	9,2
16	6	32	600
17	15	33	12
18	6	34	306,04
19	36	35	12 500
20	12	36	10,25
21	100		

4. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

№	Ответ	№	Ответ
1	7	18	10
2	6	19	12
3	2	20	4
4	−2	21	441
5	4,5	22	5
6	270	23	6
7	−360	24	2
8	9	25	−0,25
9	256	26	4
10	208	27	16
11	7	28	0,5
12	7	29	−1
13	1	30	0,25
14	5	31	0
15	100	32	90
16	16	33	−270
17	55	34	*1,75*

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
35	5	**56**	2
36	5	**57**	99
37	25	**58**	−11
38	−9	**59**	−121
39	4	**60**	(−11; 11)
40	2,5	**61**	$\pi n,\ n \in Z$
41	2	**62**	$32;\ \frac{1}{32}$
42	3	**57**	$1;\ \log_6 2$
43	−4	**58**	1; 81
44	−4	**59**	0,75
45	2	**60**	3
46	101	**61**	$+\sqrt{3};\ \pm\sqrt{10}$
47	7,25	**62**	$[-3;\ -2] \cup [2;\ 3]$
48	3	**63**	Решений нет
49	4	**64**	[4; 16]

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
65	$9;\ \frac{1}{27}$	**71**	$(8;\ +\infty)$
66	Решений нет	**72**	$[5;\ +\infty)$
67	$[-0{,}5;\ 1{,}25]$	**73**	$\left[-\sqrt{17};\ -4\right)\cup\left(4;\ \sqrt{17}\right]\cup[5;\ +\infty)$
68	$\left[-\frac{1}{7};\ 5\right]$	**74**	$(-\infty;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$
69	$[5;\ +\infty)$	**75**	$\left[-\sqrt{17};\ -4\right)\cup\left(4;\ \sqrt{17}\right]\cup[5;\ +\infty)$
70	$(6{,}8;\ +\infty)$		

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЕГЭ. СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Кочагин Вадим Витальевич
Кочагина Мария Николаевна

ЕГЭ 2010

МАТЕМАТИКА

Сборник заданий

Директор редакции *И. Федосова*
Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Брынчик*
Технический редактор *Н. Тростянская*
Верстка *А. Попов*
Корректор *Л. Перовская*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Подписано в печать 21.10.2009. Формат 60x90 1/16. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Бум. тип. Усл. печ. л. 13,0. Доп. тираж 20 000 экз. Заказ № 913.

Отпечатано в ГП ПО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.

ISBN 978-5-699-36144-1

9 785699 361441 >