ПОЛНЫЙ КОМПЛЕКТ
ПОСОБИЙ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПОЛНЫЙ СПРАВОЧНИК

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

А.Г. Мордкович, В.И. Глизбург,
Н.Ю. Лаврентьева

МАТЕМАТИКА

ПОЛНЫЙ СПРАВОЧНИК

АСТ • Астрель
Москва
ВКТ
Владимир

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М79

Оформление обложки —
дизайн-группа «*Дикобраз*»

Авторы:
А. Г. Мордкович, Н. Ю. Лаврентьева
(«Алгебра и начала анализа»)
В. И. Глизбург («Геометрия»)

Мордкович, А.Г.

М79 Математика: Полный справочник / А.Г. Мордкович, В.И. Глизбург, Н.Ю. Лаврентьева. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2010. – 351, [1] с.: ил.

ISBN 978-5-17-064063-8 (ООО «Издательство АСТ»)(Обл.)
ISBN 978-5-271-26276-0 (ООО «Издательство Астрель») (Обл.)
ISBN 978-5-226-02035-3 (ВКТ)
ISBN 978-5-17-064014-0 (ООО «Издательство АСТ»)(Пер.)
ISBN 978-5-271-26231-9 (ООО «Издательство Астрель») (Пер.)
ISBN 978-5-226-02036-0 (ВКТ)

Справочник включает все темы школьного курса и соответствует современным образовательным стандартам и программам. Книга состоит из двух частей: «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия».

Основной материал школьного курса математики изложен авторами сжато и системно: математические понятия, аксиомы, теоремы, свойства и т. д.

Книга будет незаменимым помощником при изучении и закреплении нового материала, повторении пройденных тем, а также при подготовке к выпускным экзаменам в форме ЕГЭ.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Подписано в печать 21.12.2009. Формат 84x108$^{1}/_{32}$.
Усл. печ. л. 18,48. (Обл.) тираж 7 000 экз. Заказ № 1707и.
(Пер.) тираж 5 000 экз. Заказ № 1707и.

ISBN 978-5-17-064063-8 (ООО «Издательство АСТ»)(Обл.)
ISBN 978-5-271-26276-0 (ООО «Издательство Астрель») (Обл.)
ISBN 978-5-226-02035-3 (ВКТ)
ISBN 978-5-17-064014-0 (ООО «Издательство АСТ»)(Пер.)
ISBN 978-5-271-26231-9 (ООО «Издательство Астрель») (Пер.)
ISBN 978-5-226-02036-0 (ВКТ)

СОДЕРЖАНИЕ

Глава VII. **Элементы математического анализа**

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемый читатель, вы держите в руках справочник, составленный нами с целью помочь вам быстро и качественно подготовиться к сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Несколько слов о том что вас ждет на экзамене. Начиная с 2010 года варианты работ состоят из двух частей: в первой собраны 12 заданий с кратким ответом (В1–В12), во второй – 6 более сложных заданий (С1–С6), при их выполнении вместе с ответом надо записать полное решение. Заданий с выбором ответа (так называемые задания А) на экзамене по математике **не будет**.

На едином государственном экзамене по математике проверяются знания выпускников по алгебре, началам математического анализа и геометрии. В части 1 есть два геометрических задания (одно планиметрическое, другое соответственно на проверку знаний по стереометрии), часть 2 тоже содержит одну планиметрическую и одну стереометрическую задачи. Остальные задания экзамена предназначены для проверки знаний по алгебре и началам анализа. Обращаем ваше внимание, что в 2010 году впервые на ЕГЭ появились задачи из курса математики девятилетней школы.

В нашем справочнике приведены только основные базовые определения, теоремы и формулы, в первую очередь необходимые вам для решения задач, входящих в состав каждого из вариантов ЕГЭ. Приведены также примеры, аналогичные заданиям ЕГЭ, которые отмечены специальным значком «•». Также приводятся и примеры, знание которых **необходимо** для успешной сдачи ЕГЭ, пусть даже точно таких заданий на экзамене нет. Мы их приводим для того, чтобы материала этого справочника вам было достаточно для подготовки.

Дело в том, что математику нельзя изучать с середины. Например, если вы не помните, как производить арифметические действия над обыкновенными дробями, и забыли, что означает аббревиатура НОД, то правила сложения, вычитания, умножения и деления для алгебраических дробей останутся для вас непонятными. Отметим, что для строгого определения некоторых математических понятий необходимы глубокие знания высшей математики, поэтому многие определения нами даны в упрощенной «школьной» трактовке.

И конечно, не забывайте, что для удачного написания ЕГЭ вам прежде всего надо научиться решать задачи. В справочнике приводятся подробно разобранные примеры решений задач разной степени сложности.

В книге весь материал, необходимый для подготовки к ЕГЭ, изложен по темам: справочник открывается параграфом «Натуральные числа» и закрывается параграфом «Векторы». В тексте некоторые понятия выделены курсивом. Это означает, что в справочнике приводятся их определение или формулировки и разъяснения. Для простоты использования справочника в нем также приводятся номера разделов параграфах, где подробно излагаются сведения, необходимые для решения той или иной задачи.

Желаем вам успешно подготовиться и сдать единый государственный экзамен по математике. Удачи!

Часть первая

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , использующиеся для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называют *натуральными*. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывают с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков, 7 — цифра единиц, т. е. $2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

Вообще, если a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков, d — цифра единиц, то имеем

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d.$$

Используется также сокращенная запись $\overline{abcd}$ (написать $abcd$ нельзя, так как такая запись в соответствии с принятым в математике соглашением означает произведение чисел a, b, c, d). Аналогично, запись $\overline{abcde}$ означает число

$$a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e,$$

причем $a \neq 0$.

Пример*. Нина задумала четырехзначное число, сумма цифр которого равна 14. Известно, что это число не изменится, если записать его теми же цифрами, но в обратном порядке, и что число, образованное первыми двумя его цифрами, на 27 больше числа, образованного двумя последними его цифрами. Какое число задумала Нина?

Решение. Поскольку число не меняется при записи в обратном порядке, то равны первая и последняя цифры, а также равны вторая и третья.

Пусть первая цифра x, вторая — y. Тогда можно составить систему уравнений (см. п. 126)

$$\begin{cases} 2x + 2y = 14, \\ 10x + y = 10y + x - 27 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x + y = 7, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Решения системы — числа $x = 2$ и $y = 5$. Следовательно, искомое число равно 2552.

Ответ: 2552.

2. Арифметические действия над натуральными числами. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если m, n — натуральные числа, то $p = m + n$ — тоже натуральное число, m и n — *слагаемые*, p — *сумма*; $p = mn$ — тоже натуральное число, m, n — *множители*, p — *произведение*.

Справедливы следующие свойства сложения и умножения натуральных чисел:

1°. $a + b = b + a$ (*переместительное* свойство сложения).

2°. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*сочетательное* свойство сложения).

3°. $ab = ba$ (*переместительное* свойство умножения).

4°. $(ab)c = a(bc)$ (*сочетательное* свойство умножения).

5°. $a(b + c) = ab + ac$ (*распределительное* свойство умножения относительно сложения).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число: например, $7 - 4 = 3$ — натуральное число, тогда как $4 - 7 = -3$ — не натуральное число; $21 : 7 = 3$ — натуральное число, тогда как $11 : 2 = 5{,}5$ — не натуральное число.

Если m, n, k — натуральные числа, то при $m - n = k$ говорят, что m — *уменьшаемое*, n — *вычитаемое*, k — *разность*; при $m : n = k$ говорят, что m — *делимое*, n — *делитель*, k — *частное*, число m называют также *кратным* числа n, а число n — *делителем* числа m. Если m — кратное числа n, то существует натуральное число k такое, что $m = kn$.

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляют *числовые выражения*. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называют *значением выражения*.

3. Деление с остатком. Если натуральное число m не делится на натуральное число n, т. е. не существует такого натурального числа k, что $m = nk$, то рассматривают деление с остатком. Например, при делении числа 43 на число 18 в частном получается 2 и в остатке 7, т. е. $43 = 18 \cdot 2 + 7$. В общем случае, *если m — делимое, n — делитель* ($m > n$), *p — частное, r — остаток*, то

$$m = np + r, \tag{1}$$

где $r < n$. Здесь m, n, p, r — натуральные числа (исключение составляет случай, когда m делится на n без остатка и $r = 0$). Например, если $n = 3$, а $r = 2$, то получаем

$$m = 3p + 2.$$

Это формула чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

Пример 1•. Баночка йогурта стоит 5 рублей 72 копейки. Какое наибольшее число таких баночек можно купить на 40 рублей?

Решение. Для удобства переведем цену в копейки: 40 рублей составляют 4000 копеек, одна баночка стоит 572 копейки.

Разделив с остатком 4000 на 572, получим неполное частное 6.

Ответ: 6.

Пример 2*. Теплоход рассчитан на 800 пассажиров и 55 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Решение. На теплоходе может находиться не больше 855 человек. Разделив это число с остатком на 60 (вместимость шлюпки), получим неполное частное 14 и остаток 15.

Значит, на борту должно быть не меньше, чем 15 шлюпок.

Ответ: 15.

4. Признаки делимости. В некоторых случаях, не производя деления натурального числа m на натуральное число n, можно ответить на вопрос: выполнимо деление m на n без остатка или нет? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью различных признаков делимости.

Теорема 1. Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число (*теорема о делимости суммы*).

Не следует, однако, думать, что если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма $37 + 19$ делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4. Заметим, однако, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

Теорема 2. Если в произведении хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число (*теорема о делимости произведения*).

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение $105 \cdot 48 \cdot 93 \cdot 54$ делится на 5, так как 105 делится на 5.

Теорема 3. Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2 (*признак делимости на* 2).

Теорема 4. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5 (*признак делимости на* 5).

Теорема 5. Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 (*признак делимости на* 10).

Теорема 6. Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа (*признак делимости на* 4).

Например, число 15 436 делится на 4, так как число 36 делится на 4. Число 372 506 не делится на 4, так как 06, т.е. 6 не делится на 4.

Теорема 7. Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (*признак делимости на* 3).

Например, число 2742 делится на 3, так как делится на 3 сумма цифр этого числа $2 + 7 + 4 + 2 = 15$.

Число 17 941 не делится на 3, так как сумма цифр этого числа равна 22, а 22 не делится на 3.

Теорема 8. Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (*признак делимости на* 9).

Пример 1•. Найдите стоимость одного карандаша, если известно, что среди трех следующих утверждений есть верное: 1) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 25 копеек; 2) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 26 копеек; 3) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 27 копеек.

Решение. Если верно первое утверждение, то три карандаша стоят 725 копеек, если верно второе, то три карандаша стоят 726 копеек, если же верно третье, то – 727 копеек.

Среди этих чисел только число 726 делится на 3 без остатка ($7 + 2 + 6 = 15$ делится на 3), причем частное равно 242.

Следовательно, верно второе утверждение, и один карандаш стоит 2 рубля 42 копейки.

Ответ: 2 рубля 42 копейки.

Пример 2•. Найдите стоимость одного фломастера, если известно, что среди трех следующих утверждений есть верное: 1) за три таких фломастера заплатили 11 рублей 33 копейки; 2) за пять таких фломастеров заплатили 15 рублей 68 копеек; 3) за семь таких фломастеров заплатили 21 рубль 56 копеек.

Решение. Переведем все суммы в копейки. Воспользовавшись признаками деления на 3 и на 5, установим, что:

1133 не делится на 3;

1568 не делится на 5;

2156 делится на 7, при этом $2156 : 7 = 308$.

Следовательно, верно третье утверждение, и один фломастер стоит 3 рубля 8 копеек.

Ответ: 3 рубля 8 копеек.

5. Разложение натурального числа на простые множители. Если число имеет только два делителя (само число и единица), то его называют *простым*; если число имеет более двух делителей, то его называют *составным*.

Так, число 19 простое, ибо оно имеет только два делителя: 1 и 19; число 35 составное, оно имеет четыре делителя: 1, 5, 7, 35. Простое число 19 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом, не учитывая порядок множителей: $19 = 1 \cdot 19$; составное число 35 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом: $35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$.

Заметим, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Пример•. Длины сторон прямоугольника (в сантиметрах) выражаются целыми числами. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 38 см^2, а периметр больше 50 сантиметров.

Решение. Поскольку длины сторон выражаются целыми числами, а площадь прямоугольника — это их произведение, то рассмотрим разложение числа 38 на простые множители.

Сделать это можно только так: $38 = 2 \cdot 19$.

Значит, длины сторон прямоугольника могут быть равны или 2 см и 19 см, или 1 см и 38 см.

Поскольку периметр прямоугольника больше 50 см, то подходит только вариант 1 и 38.

Ответ: 1 и 38.

Теорема 9 (*основная теорема арифметики*). Любое натуральное число, кроме 1, либо является простым, либо его можно разложить на простые множители, притом только одним способом.

6. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Выпишем все делители числа 96:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$$

Все эти числа называют *общими делителями* чисел 72 и 96, а наибольшее среди них — *наибольшим общим делителем*.

Для любых заданных натуральных чисел a и b можно найти наибольший общий делитель. Он обозначается $D(a, b)$ (читается: «D от a, b»). Например, $D(72, 96) = 24$. Если числа a и b таковы, что $D(a, b) = 1$, то числа a и b называют *взаимно простыми*.

Например, взаимно простыми будут числа 72 и 35 (хотя каждое из них — составное число).

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Например, найдем $D(48, 60, 72)$.

Для этого выполним разложение на простые множители каждого из данных чисел:

$$48 = 2^4 \cdot 3;\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5;\ 72 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Значит, $D(48, 60, 72) = 2^2 \cdot 3$.

Получили: $D(48, 60, 72) = 12$.

Пример . На свой день рождения Маша купила 15 конфет и 9 шоколадных медалей. Какое наибольшее количество гостей Маша может пригласить к себе, чтобы и конфеты и медали можно было разделить поровну между всеми, включая ее саму?

Решение. Чтобы узнать наибольшее количество желающих съесть конфеты, Маше нужно найти наибольший общий делитель чисел 15 и 9, который равен 3. Поэтому она может пригласить 2 гостей.

Ответ: 2.

7. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 12 и 18. Выпишем числа, кратные 12:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots .$$

Выпишем числа, кратные 18:

$$18, 36, 54, 72, \ldots .$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$36, 72, \ldots .$$

Все эти числа называют *общими кратными* чисел 12 и 18, а наименьшее из них — число 36 — называют *наименьшим общим кратным* чисел 12, 18.

Аналогично определяют наименьшее общее кратное произвольных натуральных чисел a и b, оно обозначается К (a, b) (читается: «К от a, b»). Любое общее кратное чисел a и b делится на К (a, b).

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

Например, найдем К (3780, 7056). Имеем: $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ (см. п. 6).

Тогда К (3780, 7056) = $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, т. е. взяты все простые множители, которые входят в разложение хотя бы одного из чисел 3780 и 7056.

Итак, К (3780, 7056) = 105 840.

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$\mathrm{D}(a, b) \cdot \mathrm{K}(a, b) = ab.$$

Если, в частности, числа a и b взаимно простые, т. е. D $(a, b) = 1$, то К $(a, b) = ab$. Это значит, что *наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел.*

Пример•. Люба пригласила гостей и хочет купить столько конфет, чтобы их можно было раздать поровну всем, включая ее саму. Но Люба не знает, сколько человек придет: 2, 3 или 6. Какое наименьшее количество конфет должно быть у Любы, чтобы она смогла осуществить свой план в любом случае?

Решение. Наименьшее возможное количество конфет для приема гостей Люба может узнать, найдя наименьшее общее кратное чисел 3, 4 и 7 (возможное число гостей плюс Люба).

Эти числа взаимно просты. Наименьшее общее кратное равно $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

Ответ: 84.

8. Употребление букв в алгебре. Переменные. В алгебре часто конкретные свойства чисел записывают с помощью букв. Например, переместительное свойство сложения (от перемены мест слагаемых сумма не меняется) записывают так: $a + b = b + a$, где вместо a и b можно подставить любые числа: $3 + 5 = 5 + 3$, $100 + 3501 = 3501 + 100$ и т. д. Число, подставляемое вместо буквы, называют *ее значением*.

В некоторых случаях (например, в уравнениях) вместо буквы можно подставить только определенные числа, чтобы написанное равенство было верным. Например, $7 + x = 10$ обращается в верное равенство лишь при $x = 3$. Употребляемые в алгебре буквы называют *переменными*; смысл такого названия состоит в том, что числовое значение буквы можно изменить: например, в равенстве $a + b = b + a$ можно положить, например, $a = 3$, $b = 5$ или $a = 7$, $b = 19$ и т. д. — во всех случаях равенство будет верно. В равенстве $7 + x = 10$ можно положить, например, $x = 3$ или $x = 5$; разница в том, что в первом случае числовое равенство будет верным, а во втором — неверным. Равенство $D(a, b) = 1$ (см. п. 6) верно при следующих значениях переменных a и b:

$a = 18$, $b = 25$; $a = 100$, $b = 99$; $a = 13$, $b = 1000$ и т. п.

Равенство $D(a, b) = 1$ неверно при следующих значениях переменных:

$a = 8$, $b = 6$; $a = 25$, $b = 150$; $a = 7$, $b = 777$ и т. п.

§ 2. Рациональные числа

9. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа. *Обыкновенная дробь* — это число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, например, $\frac{12}{17}$, $\frac{15}{8}$. Число m называют *числителем дроби*, n — *знаменателем*. В частности, может быть $n = 1$, в этом случае дробь имеет вид $\frac{m}{1}$, но чаще пишут просто m. Это означает, что *всякое на-*

туральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1. Запись $\frac{m}{n}$ — другой вариант записи $m : n$.

Среди обыкновенных дробей различают правильные и неправильные дроби. Дробь $\frac{m}{n}$ называют *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби (или в виде натурального числа, если дробь $\frac{m}{n}$ такова, что m кратно n; например, $\frac{16}{4} = 4$).

Принято сумму натурального числа и правильной дроби записывать без знака сложения, т. е. вместо $5 + \frac{3}{5}$ пишут $5\frac{3}{5}$, а вместо $3 + \frac{4}{13}$ пишут $3\frac{4}{13}$. Число, записанное в таком виде, называют *смешанным числом*. Оно состоит из двух частей: целой и дробной. Так, для числа $3\frac{4}{13}$ целая часть равна 3, а дробная — $\frac{4}{13}$. Всякую неправильную дробь можно записать в виде смешанного числа (или в виде натурального числа). Верно и обратное: всякое смешанное или натуральное число можно записать в виде неправильной дроби. Например, $4\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{12}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$; $3 = \frac{3}{1}$.

10. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считают *равными*, если $ad = bc$. Например, равными будут дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{9}{15}$ (так как $3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$), $\frac{12}{7}$ и $\frac{24}{14}$ (так как $12 \cdot 14 = 7 \cdot 24$).

Из определения равенства дробей следует, что равными будут дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$, так как $a(bm) = b(am)$, — здесь мы используем сочетательное и переместительное свойства умножения натуральных чисел (см. п. 2). Значит, $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, т. е. *если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной*. Это свойство называют *основным свойством дроби*.

Пользуясь основным свойством дроби, иногда можно заменить данную дробь другой, равной данной, но с меньшим числителем и меньшим знаменателем. Такую замену называют *сокращением дроби*. Например, $\frac{45}{60} = \frac{15}{20}$ (числитель и знаменатель мы разделили на одно и то же число 3); полученную дробь снова можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 5, т. е. $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

В общем случае сокращение дроби возможно, если числитель и знаменатель не взаимно простые числа (см. п. 5); если же числитель и знаменатель — взаимно простые числа, то дробь называют *несократимой*: например, $\frac{3}{4}$ — несократимая дробь. Основная цель сокращения дроби — замена данной дроби равной ей несократимой дробью.

11. Приведение дробей к общему знаменателю. Пусть даны две дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$. Они имеют разные знаменатели: 3 и 8. Воспользовавшись основным свойством дроби (см. п. 10), можно заменить эти дроби другими, равными им, причем такими, что у полученных дробей будут одинаковые знаменатели. Такое преобразование называют *приведением дробей к общему знаменателю.* Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{3}$ на 8, получим $\frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$; умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{8}$ на 3, получим $\frac{15 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{45}{24}$. Итак, дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$ приведены к общему знаменателю:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}; \quad \frac{15}{8} = \frac{45}{24}.$$

Заметим, что это не единственное решение поставленной задачи. Например, дроби можно было привести к общему знаменателю 48:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 16}{3 \cdot 16} = \frac{32}{48}; \quad \frac{15}{8} = \frac{15 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{90}{48},$$

и вообще к любому знаменателю, делящемуся одновременно на 3 и на 8.

Таким образом, привести дроби к общему знаменателю можно многими способами, но обычно стараются привести дроби к *наименьшему общему знаменателю,* который равен наименьшему общему кратному знаменателей данных дробей.

Например, приведем к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$.

Для этого найдем наименьшее общее кратное чисел 24 и 30; получим К (24, 30) = 120 (см. п. 7). Имеем 120 : 24 = 5, поэтому, чтобы привести дробь $\frac{7}{24}$ к знаменателю 120, надо ее числитель и знаменатель умножить на 5 (*дополнительный множитель*):

$$\frac{7}{24}=\frac{7\cdot 5}{24\cdot 5}=\frac{35}{120}.$$

Имеем далее 120 : 30 = 4, поэтому, чтобы привести дробь $\frac{11}{30}$ к знаменателю 120, надо ее числитель и знаменатель умножить на 4 (дополнительный множитель):

$$\frac{11}{30}=\frac{11\cdot 4}{30\cdot 4}=\frac{44}{120}.$$

Дроби приведены к общему знаменателю:

$$\frac{7}{24}=\frac{35}{120};\quad \frac{11}{30}=\frac{44}{120}.$$

На практике используют следующую запись:

$$\frac{7}{24}=\frac{7^{5}}{24}=\frac{35}{120};\quad \frac{11}{30}=\frac{11^{4}}{30}=\frac{44}{120}.$$

Итак, чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, нужно:

1) найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей;
2) вычислить дополнительные множители, разделив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель;
3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.

12. Арифметические действия над обыкновенными дробями.

Сложение обыкновенных дробей выполняют:

а) если знаменатели дробей одинаковы, то к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель, т. е.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b};$$

б) если знаменатели дробей различны, то дроби сначала приводят к общему знаменателю, предпочтительнее к наименьшему, а затем применяют правило а).

Пример 1. Сложить дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=\frac{7^{5)}}{24}+\frac{11^{4)}}{30}=\frac{35}{120}+\frac{44}{120}=\frac{35+44}{120}=\frac{79}{120}.$$

Вычитание обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

а) если знаменатели дробей одинаковы, то

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b};$$

б) если знаменатели различны, то сначала дроби приводят к общему знаменателю, а затем применяют правило а).

Умножение обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

т. е. перемножают отдельно числители, отдельно знаменатели.

Произведение числителей есть числитель произведения; произведение знаменателей есть знаменатель произведения.

Например, $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 11} = \frac{6}{77}$.

Деление обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

т. е. делимое $\frac{a}{b}$ умножают на дробь $\frac{d}{c}$.

Например, $\frac{2}{3} : \frac{7}{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$.

Пример 2. Найти значение числового выражения

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} + \frac{7}{8} : \frac{5}{6} - \frac{11}{30}.$$

Решение. 1) $\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4 \cdot 12}{9 \cdot 5}$. Сократив числитель и знаменатель на 3 (это полезно сделать до выполнения действий умножения в числителе и знаменателе), получим $\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5}$, т. е. $\frac{16}{15}$. Итак, $\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} = \frac{16}{15}$;

2) $\frac{7}{8} : \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 6}{8 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$;

3) при нахождении значения выражения $\frac{16}{15} + \frac{21}{20} - \frac{11}{30}$ действия сложения и вычитания можно выполнять одновременно. Наименьшим общим кратным чисел 15, 20, 30 является число 60. Приведем все три дроби к знаменателю 60, использовав

дополнительные множители: для первой дроби — 4, для второй — 3, для третьей — 2. Получим

$$\frac{16^{\backslash 4}}{15}+\frac{21^{\backslash 3}}{20}-\frac{11^{\backslash 2}}{30}=\frac{64}{60}+\frac{63}{60}-\frac{22}{60}=\frac{64+63-22}{60}=\frac{105}{60}=$$

$$=1\frac{3}{4}.$$

13. Взаимно обратные числа. Число b называют *обратным для числа a*, если $ab = 1$. Например, для числа 3 обратным является $\frac{1}{3}$, поскольку $3\cdot\frac{1}{3}=1$; для числа $\frac{2}{7}$ обратным является число $\frac{7}{2}$, поскольку $\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}=1$.

Правило деления обыкновенных дробей (см. п. 12) фактически означает умножение делимого на число, обратное делителю.

14. Десятичные дроби. В виде *десятичной дроби* можно записать правильную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и вообще 10^n. Например, $\frac{3}{10}=0{,}3$; $\frac{48}{100}=0{,}48$; $\frac{21}{1000}=0{,}021$. Таким же образом можно записать смешанное число или неправильную дробь с указанным выше знаменателем (превратив ее предварительно в смешанное число). Например, $2\frac{3}{10}=2{,}3$; $\frac{317}{100}=3\frac{17}{100}=3{,}17$. В этих случаях целую часть смешанного числа отделяют запятой от числителя дробной части. Таким образом, десятичная дробь — это, по существу, другая форма записи дроби со знаменателем 10^n.

В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10.

Другими словами, если в разложении знаменателя дроби на простые множители содержатся только двойки и пятерки, то эту дробь можно записать в виде десятичной;

если же дробь несократима и в разложение ее знаменателя на простые множители входят кроме двоек и пятерок другие простые множители, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной дроби.

Рассмотрим десятичную дробь 7,234. Имеем

$$7{,}234 = 7\frac{234}{1000} = 7 + \frac{200+30+4}{1000} = 7 + \frac{200}{1000} + \frac{30}{1000} +$$

$$+ \frac{4}{1000} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}.$$

Значит, в дроби 7,234 содержится 7 единиц, 2 десятых, 3 сотых и 4 тысячных. Вообще в десятичной дроби после запятой может быть сколько угодно разрядов: десятые, сотые, тысячные, десятитысячные и т. д.

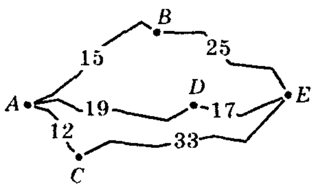


Рис. 1.1

Пример*. Велосипедист собирается проехать из пункта A в пункт E, в который ведут три маршрута: через B, через C и через D. Расстояния в километрах между соседними городами показаны на схеме. Известно, что если ехать через B, то средняя скорость будет равна 16 км/ч, если ехать через D, то средняя скорость будет равна 18 км/ч, а если ехать через C, то средняя скорость будет равна 20 км/ч.

Исходя из этих данных, велосипедист выбрал маршрут так, чтобы доехать до E за наименьшее время. Сколько минут он планирует пробыть в пути?

Решение. Рассчитаем для каждого маршрута время, которое велосипедист потратит в пути. Для маршрута через пункт B это $\frac{15+25}{16} = 2{,}5$ (ч), для маршрута через пункт D это $\frac{19+17}{18} = 2$ (ч), а через C — $\frac{12+33}{20} = 2{,}25$ (ч). Поскольку велосипедист хочет доехать до E за наименьшее время, то ему понадобится $2 \cdot 60 = 120$ (минут) или 2 ч.

Ответ: 2.

15. Проценты. Среди десятичных дробей особенно часто на практике используется дробь 0,01, которую называют *процентом* и обозначают 1%. Так, 1% = 0,01, 2% = 0,02, 45% = 0,45, 350% = 3,5 и т. д. В хозяйственных и статистических расчетах, во многих отраслях науки части величин принято выражать в процентах. Чтобы найти, например, 23% от 60 кг, нужно 60 кг умножить на 0,23, т. е. $60 \cdot 0{,}23 = 13{,}8$. Значит, 23% от 60 кг составляют 13,8 кг.

Пример 1. Рабочий должен был изготовить за смену 80 деталей. По окончании рабочего дня оказалось, что он выполнил 150% сменного задания. Сколько деталей изготовил рабочий?

Решение. 1) 150% = 1,5.

2) $80 \cdot 1{,}5 = 120$.

Получили ответ: 120 деталей.

Пример 2. Рабочий должен за смену изготовить 80 деталей. К 12 часам он изготовил 55 деталей.

Сколько процентов задания выполнил рабочий к указанному времени?

Решение. К 12 часам дня выполнена часть задания, выражающаяся дробью $\frac{55}{80}$, которую переводим в проценты:

$$\frac{55}{80} = \frac{550}{800} = \frac{550}{8} \cdot \frac{1}{100} = \frac{275}{4}\% = 68{,}75\%.$$

Пример 3. Рабочий к 12 часам изготовил 55 деталей, что составило 68,75% сменного задания. Сколько деталей рабочий должен изготовить за смену?

Решение. Обозначим количество деталей, составляющих сменное задание, буквой x. Из условия задачи следует, что

$68{,}75\% \cdot x = 55$, т. е. что $\frac{68{,}75}{100} \cdot x = 55$, откуда $x = \frac{100 \cdot 55}{68{,}75} = 80$.

Рабочий должен изготовить 80 деталей.

Пример 4*. Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

Решение. После повышения цены на 20% один билет на автобус стал стоить $15 \cdot 1{,}2 = 18$ (рублей). Разделив 100 на 18 с остатком, узнаем максимальное число билетов: $100 : 18 = 5$ (остаток 10).

Ответ: 5.

Пример 5*. С двух участков ежегодно собиралось 500 т пшеницы. После проведения агротехнических мероприятий урожай на первом участке увеличился на 30%, а на втором — на 20%. Поэтому с двух участков собрали 630 т пшеницы. Сколько пшеницы собирали с первого участка первоначально?

Решение. Пусть с первого участка собирали x т пшеницы, тогда со второго – $(500 - x)$ т. После проведения агротехнических мероприятий с первого участка стали собирать $1{,}3x$ т пшеницы, а со второго – $1{,}2(500 - x)$ т. С двух участков стали собирать $(1{,}3x + 1{,}2(500 - x))$ т, что по условию задачи составляет 630 т.

Составим и решим уравнение.

$1{,}3x + 1{,}2(500 - x) = 630;$

$x = 300.$

Таким образом, с первого участка до проведения агротехнических мероприятий собирали 300 т пшеницы.

Ответ: 300.

Пример 6*. Банк ежегодно увеличивает на одно и то же число процентов сумму, имеющуюся на вкладе к моменту начисления процентов. На сколько процентов ежегодно увеличивается сумма, если за два года она возросла с 2000 до 2420 рублей?

Решение. Пусть ежегодно имеющаяся на счете сумма увеличивается на $x\%$. В первый раз за 100% мы должны принять сумму, имеющуюся на счете к началу первого года, т. е. 2000 рублей.

Тогда через год на счете окажется

$$\left(2000 + \frac{x}{100} \cdot 2000\right) \text{рублей,}$$

т. е. $(2000 + 20x)$ рублей.

Для расчета процентов за второй год мы должны принять за 100% уже сумму, имеющуюся на счете к началу второго года, т. е. $(2000 + 20x)$ рублей. Тогда по прошествии второго года на счете окажется

$$\left((2000 + 20x) + \frac{x}{100}(2000 + 20x)\right) \text{ рублей,}$$

т. е. $(0{,}2x^2 + 40x + 2000)$ рублей, что по условию задачи составляет 2420 рублей.

Составим и решим уравнение.

$0{,}2x^2 + 40x + 2000 = 2420;$

$0{,}2x^2 + 40x - 420 = 0;$

$x^2 + 200x - 2100 = 0;$

$x = -210$ или $x = 10$.

Так как по условию задачи значения x должны быть положительными, то $x = 10$. Итак, ежегодно сумма вклада увеличивалась на 10%.

Ответ: 10.

16. Множество рациональных чисел. Натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, ... называют также *положительными целыми числами*. Числа −1, −2, −3, −4, −5, ..., противоположные натуральным, называют *отрицательными целыми числами*. Число 0 также считают целым числом. Итак, *целые числа* — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

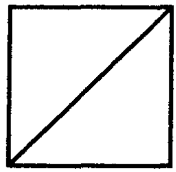
Целые числа и дроби (положительные и отрицательные) составляют вместе множество *рациональных чисел*.

Заметим, что любое рациональное число может быть представлено в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, причем одно и то же число можно записать в виде отношения многими способами. Например,

$$-2 = \frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} = \frac{-100}{50}; \quad 0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{300}{1000}.$$

Среди дробей, обозначающих данное рациональное число, имеется одна и только одна несократимая дробь. Для целых чисел — это дробь со знаменателем 1.

§ 3. Действительные числа



1

1

Рис. 1.2

17. Иррациональные числа. Для измерения используются не только рациональные числа, но и числа иной природы, т. е. не являющиеся целыми или дробными. Все такие числа называют *иррациональными*. Например, длина диагонали квадрата со стороной 1 (рис. 1.2) должна выражаться некоторым положительным числом r таким, что $r^2 = 1^2 + 1^2$ (по теореме Пифагора, см. «Геометрия», п. 14), т. е. таким, что $r^2 = 2$. Число r не может быть целым, так как $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$ и т. д. Число r не может быть и дробным; если $r = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где $n \neq 1$, то $r^2 = \frac{m^2}{n^2}$ тоже будет несократимой дробью, где $n^2 \neq 1$; значит, $\frac{m^2}{n^2}$ не является целым числом, а потому не может быть равно 2. Поэтому длина диагонали квадрата выражается иррациональным числом, оно обозначается $\sqrt{2}$ (читается: «квадратный корень из двух»).

Аналогично, не существует рационального числа, квадрат которого равен 5, 7, 10. Соответствующие иррациональные числа обозначаются $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$. Противоположные им числа также иррациональны, они обозначаются $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{10}$.

Следует подчеркнуть, что к иррациональным числам приводит не только задача отыскания числа, квадрат которого равен заданному положительному числу. Например, число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, нельзя представить в виде обыкновенной дроби — это иррациональное число.

18. Действительные числа. Числовая прямая. Рациональные и иррациональные числа составляют вместе множество *действительных чисел.*

Проведем прямую l, отметим на ней точку O, которую примем за начало отсчета, выберем направление и единичный отрезок $[0; 1]$ (рис. 1.3).

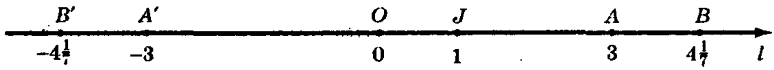


Рис. 1.3

В этом случае говорят, что задана *координатная прямая.* Каждому числу соответствует одна точка прямой l. Пусть, например, дано число 3. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок три раза, получим точку A — эта точка и соответствует числу 3.

Возьмем число $4\frac{1}{7}$. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок четыре раза, а затем еще $\frac{1}{7}$ часть отрезка, получим точку B — она и соответствует числу $4\frac{1}{7}$.

Если точка M прямой l соответствует некоторому числу r, то это число называют *координатой точки*, в таком случае пишут $M(r)$. Так, для точек J, A, B (рис. 1.3) можно указать их координаты $J(1)$,

$A(3)$, $B\left(4\frac{1}{7}\right)$. Координатой точки O считается число нуль.

Отложим теперь три раза единичный отрезок от точки O в направлении, противоположном заданному. Получим точку A', симметричную точке A относительно начала отсчета O. Координатой точки A является число 3, а координату точки A' записывают так: -3. Аналогично, координатой точки B', симметричной точке B, на рисунке 1.3 считается число $-4\frac{1}{7}$.

Точка O, соответствующая числу 0, отделяет на координатной прямой точки с положительными координатами от точек с отрицательными координатами.

Заданное направление на координатной прямой называют *положительным* (обычно оно идет вправо), а направление, противоположное заданному,— *отрицательным*.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой. Каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительному числу — достаточно найти расстояние от этой точки до начала отсчета и поставить перед найденным числом знак + или − в зависимости от того, справа или слева от начала отсчета находится заданная точка. Для краткости обычно вместо фразы «точка координатной прямой, соответствующая действительному числу a», пишут и говорят «точка a», а употребляя термин «число a», имеют в виду «действительное число a».

Множество действительных чисел называют также *числовой прямой*. Геометрической моделью числовой прямой служит координатная прямая.

19. Обозначения некоторых числовых множеств.

N — множество натуральных чисел.

Z — множество целых чисел.

Q — множество рациональных чисел.

R — множество действительных чисел.

Запись $n \in N$ (читается: «n принадлежит множеству N») обозначает, что n — натуральное число. Аналогичный смысл имеют следующие обозначения: $m \in Z$ (m — целое число), $r \in Q$ (r — рациональное число), $x \in R$ (x — действительное число).

20. Сравнение действительных чисел. Для любых неравных действительных чисел a и b можно сказать, какое больше, а какое меньше. Говорят, что число a *больше* числа b, и пишут $a > b$, если разность $a - b$ — *положительное* число; если же разность $a - b$ — *отрицательное* число, то говорят, что число a *меньше* числа b, и пишут $a < b$. Согласно этому определению, любое положительное число больше нуля, любое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа. Для любых заданных чисел a и b верно одно и только одно из отношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

С геометрической точки зрения неравенство $a < b$ ($a > b$) означает, что точка a расположена на координатной прямой левее (правее) точки b.

Знаки $<$, $>$ называют *знаками строгих неравенств*. Иногда используют знаки $\geqslant$, $\leqslant$ — *знаки нестрогих неравенств;* запись $a \leqslant b$ означает, что верно одно из двух: или число a меньше числа b, или число a равно числу b. Например, $3 \leqslant 5$, $5 \geqslant 5$ — верные неравенства. Неравенства $a > b$ и $c > d$ называют неравенствами одного знака; неравенства $a > b$ и

$c < d$ называют неравенствами противоположных знаков. Если числа a, b, c таковы, что $a < b$ и $b < c$, то используется запись $a < b < c$.

Например, чтобы сравнить числа $\frac{2}{3}$ и 0,67, нужно составить разность $\frac{2}{3} - 0{,}67$ и найти ее значение:

$$\frac{2}{3} - 0{,}67 = \frac{2}{3} - \frac{67}{100} = \frac{2 \cdot 100 - 67 \cdot 3}{300} = -\frac{1}{300}.$$

Разность отрицательна, поэтому $\frac{2}{3} < 0{,}67$.

21. Свойства числовых неравенств. Для любых действительных чисел a, b, c, d выполняются следующие свойства:

1°. ***Если $a > b$, то $b < a$.***

2°. ***Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$*** (*свойство транзитивности*).

3°. ***Если $a > b$, то $a + c > b + c$.***

4°. ***Если $a > b$ и c — положительное число ($c > 0$), то $ac > bc$.*** Это свойство имеет следующий смысл: *если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число и сохранить тот же знак неравенства, то получится верное неравенство.*

5°. ***Если $a > b$ и c — отрицательное число ($c < 0$), то $ac < bc$.*** Это свойство имеет следующий смысл: *если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.*

6°. ***Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$*** (*если почленно сложить два верных неравенства одного знака, то получится верное неравенство*).

7°. *Если a, b, c, d — положительные числа, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$ (если почленно перемножить верные неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, то получится верное неравенство).*

8°. *Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.*

9°. *Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.*

10°. *Если $a > b > 0$, то для любого натурального числа n выполняется неравенство $a^n > b^n$.*

22. Числовые промежутки. Возьмем два числа a и b такие, что $a < b$, и отметим на координатной прямой соответствующие им точки.

Произвольная точка x, лежащая между a и b, соответствует числу, которое удовлетворяет неравенствам $a < x < b$. Множество всех чисел x, удовлетворяющих этим неравенствам, обозначают $(a; b)$ и называют *интервалом*.

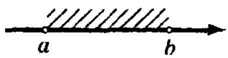
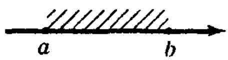
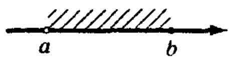
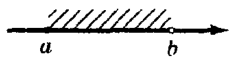
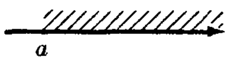
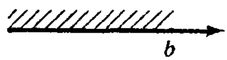
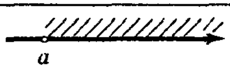
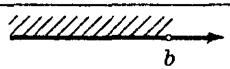
Множество всех чисел x, каждое из которых удовлетворяет неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, обозначают $[a; b]$ и называют *отрезком*.

Интервал и отрезок — это конечные числовые промежутки. Конечные числовые промежутки бывают еще двух видов: $[a; b)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$, и $(a; b]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$. Эти промежутки называют *полуинтервалами*.

Бывают и бесконечные числовые промежутки. Множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$, обозначают $[a; +\infty)$ и называют *лучом*, а множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$, обозначают $(a; +\infty)$ и называют *открытым лучом*. Знак «$+\infty$» читается: «плюс бесконечность».

Аналогично, может быть луч вида $(-\infty; b]$ (числа, удовлетворяющие неравенству $x \leqslant b$) и открытый луч вида $(-\infty; b)$ (числа, удовлетворяющие неравенству $x < b$). Знак «$-\infty$» читается: «минус бесконечность».

В приведенной ниже таблице для каждого вида числового промежутка даны его геометрическое изображение, обозначение и запись с помощью неравенств.

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leqslant b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leqslant x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geqslant a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leqslant b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

На практике не всегда используют термины «интервал», «отрезок», «полуинтервал», «луч», заменяя их общим названием *числовой промежуток*.

23. Модуль действительного числа. *Модулем* (*абсолютной величиной*) действительного числа a называют само это число, если $a \geqslant 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначают $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|\pi - 3| = \pi - 3$, так как $\pi - 3 > 0$ ($\pi = 3{,}14\ldots$);

$$|-3{,}7| = -(-3{,}7) = 3{,}7, \text{ так как } -3{,}7 < 0.$$

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой точки a от точки O (рис. 1.4).

Свойства модулей:

1°. $|a| > 0$.

2°. $|a| = |-a|$.

3°. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

4°. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

5°. $|a|^2 = a^2$.

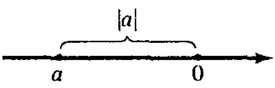


Рис. 1.4

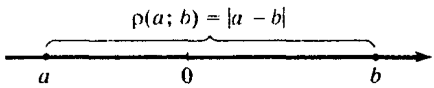


Рис. 1.5

24. Формула расстояния между двумя точками координатной прямой. Если a и b — две точки координатной прямой, то *расстояние* между ними $\rho(a; b)$ выражается формулой

$$\rho\,(a; b) = |a - b|$$

(рис. 1.5). Так, $\rho\,(-2; 5) = |-2 - 5| = |-7| = -(-7) = 7$.

П р и м е р. Найти все такие точки x, которые удовлетворяют: а) уравнению $|x - 1| = 3$; б) неравенству $|x + 1| \leqslant 2$.

Решение. а) Уравнению удовлетворяют такие точки x, расстояние которых от точки 1 равно 3. Это точки -2 и 4 (рис. 1.6). Значит, уравнение имеет два корня: -2; 4.

б) Неравенству удовлетворяют такие точки x, которые удалены от точки -1 на расстояние, меньшее или равное 2. Это точки из отрезка $[-3; 1]$ (рис. 1.7).

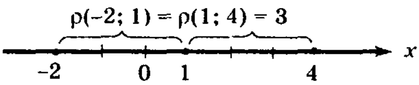


Рис. 1.6

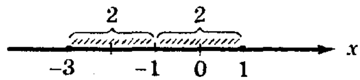


Рис. 1.7

25. Правила действий над положительными и отрицательными числами. Сумма двух чисел одного знака есть число того же знака; чтобы найти модуль такой суммы, надо сложить модули слагаемых. Например, $(+12) + (+8) = +20$; $(-12) + (-8) = -20$.

Сумма двух чисел с разными знаками есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с бóльшим модулем; чтобы найти модуль этой суммы, надо из большего модуля вычесть меньший. Например, $(+12) + (-8) = +(12 - 8) = 4$; $(-12) + (+8) = -(12 - 8) = -4$.

Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например, $12 - (-8) = 12 + 8 = 20$; $12 - (+8) = 12 + (-8) = 4$.

Произведение (частное) двух чисел одного знака есть число положительное, а произведение (частное) двух чисел разных знаков есть число отрицательное; чтобы найти модуль произведения (частного), надо перемножить (разделить) модули данных чисел. Например, $(-12) \cdot (-8) = +12 \cdot 8 = 96$; $(-24) : (+3) = -\frac{24}{3} = -8$.

26. Свойства арифметических действий над действительными числами.

1°. $a + b = b + a$.

2°. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3°. $a + 0 = a$.

4°. $a + (-a) = 0$.

5°. $ab = ba$.

6°. $(ab)c = a(bc)$.

7°. $a(b + c) = ab + ac$.

8°. $a \cdot 1 = a$.

9°. $a \cdot \frac{1}{a} = 1,\ a \neq 0$.

Эти свойства называют иногда основными законами алгебры, причем свойства 1° и 5° выражают *переместительный* закон соответственно сложения и умножения, свойства 2° и 6° — *сочетательный* закон, а свойство 7° — *распределительный* закон умножения относительно сложения.

Из этих свойств выводятся другие свойства. Например, $a \cdot 0 = 0$. В самом деле, имеем

$$a \cdot 0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b) = ab + (-ab) = 0.$$

27. Пропорции. Пусть a, b, c, d — действительные числа, отличные от 0, и пусть имеет место равенство $a : b = c : d$. Это равенство называют *пропорцией*, числа a и d — *крайними членами*, а числа b и c — *средними членами* пропорции.

Для пропорции можно использовать и запись $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Например, можно составить пропорцию из чисел 2,5; −4; −5 и 8:

$$\frac{2{,}5}{-4} = \frac{-5}{8}.$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 10. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.

Теорема 11. Крайние члены пропорции можно поменять местами, т. е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

Теорема 12. Средние члены пропорции можно поменять местами, т. е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

28. Степень с натуральным показателем. Пусть a — действительное число, а n — натуральное число, большее единицы. *n-й степенью числа a* называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Если $n = 1$, то полагают $a^1 = a$.

Число a — *основание степени*, n — *показатель степени*.

Например, $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$.

Справедливы следующие свойства степени с натуральным показателем:

1°. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

2°. $a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

3°. $(a^n)^k = a^{nk}$.

4°. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

5°. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

Например, $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$; $(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$.

29. Степень с нулевым показателем. Степень с отрицательным целым показателем. Полагают по определению: *если $a \neq 0$, то*

$$a^0 = 1.$$

Например, $(2,7)^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$. Нулевая степень числа 0 не имеет смысла.

Полагают по определению: если $a \neq 0$ и n — натуральное число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например, $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$.

Справедливо равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

30. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней. Если $a \geqslant 0$ и n — натуральное число, большее 1, то существует, и только одно, неотрицательное число x такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число x называют *арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного* числа a и обозначают $\sqrt[n]{a}$. Число a называют *подкоренным числом*, n — *показателем корня*. Если $n = 2$, то обычно пишут $\sqrt{a}$ (опуская показатель корня) и называют это выражение *квадратным корнем*. Часто вместо термина «корень» употребляют термин «радикал».

Итак, согласно определению, запись $\sqrt[n]{a} = x$, где $a \geqslant 0$, означает, во-первых, что $x \geqslant 0$ и, во-вторых, что $x^n = a$, т. е.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Например, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[10]{0} = 0$.

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то справедливы следующие свойства:

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

3°. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

4°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

5°. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Приведем примеры: а) $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}} = \sqrt[5]{\dfrac{243}{32}} = \dfrac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{3}{2}$;

б) $(\sqrt[5]{a^2})^3 = \sqrt[5]{(a^2)^3} = \sqrt[5]{a^6}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4 \cdot 3]{a} = \sqrt[12]{a}$;

г) $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 2).

Свойство 1° распространяется на произведение любого числа множителей. Например, $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

31. Корень нечетной степени из отрицательного числа. Пусть $a < 0$, а n — натуральное число, большее 1. Если n — нечетное число, то существует одно и только одно действительное число x такое, что $x^n = a$. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$ и называют *корнем нечетной степени n из отрицательного числа a.* Если же n — четное число, то равенство $x^n = a$ не выполняется ни при каком действительном значении x. Это значит, что на множестве действительных чисел нельзя определить корень четной степени из отрицательного числа.

Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$, так как $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[5]{-243} = -3$, так как $(-3)^5 = -243$. Запись $\sqrt[4]{-16}$ не имеет смысла.

В случае нечетных показателей корней свойства радикалов, справедливые для неотрицательных значений подкоренных выражений (п. 35), верны и для отрицательных значений подкоренных выражений.

Например, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ для любых a и b.

32. Степень с дробным показателем. Полагают по определению: если $a \geqslant 0$ и m, n — натуральные числа, $n \geqslant 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

если $a > 0$, то

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Нецелая степень отрицательного числа не имеет смысла.

Например, $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$;

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27;$$

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

33. Свойства степеней с рациональными показателями. Для любого числа a определена операция возведения в натуральную степень (см. п. 28); для любого числа $a \neq 0$ определена операция возведения в нулевую и целую отрицательную степень (см. п. 29); для любого $a \geqslant 0$ определена операция возведения в положительную дробную степень (см. п. 32), и, наконец, для любого $a > 0$ определена операция возведения в отрицательную дробную степень (см. п. 32).

Например, вычислим $(6{,}25)^{0{,}5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0{,}25} -$ $- (-4)^{-1} \cdot (0{,}343)^0$.

$$(6{,}25)^{0{,}5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}; \left(\frac{1}{16}\right)^{0{,}25} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}; (-4)^{-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}; (0{,}343)^0 = 1.$$

В итоге получаем

$$(6{,}25)^{0{,}5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0{,}25} - (-4)^{-1} \cdot (0{,}343)^0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} -$$

$$- \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 = 1{,}5.$$

Если $a > 0$, $b > 0$ и r, s — любые рациональные числа, то:

1°. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

2°. $a^r : a^s = a^{r-s}$.

3°. $(a^r)^s = a^{rs}$.

4°. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

5°. $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$.

34. Понятие о степени с иррациональным показателем. Пусть β — иррациональное число. Поясним, какой смысл вкладывается в запись a^β, где a — положительное число. Рассмотрим три случая: $a = 1$, $a > 1$, $0 < a < 1$.

1) Если $a = 1$, то полагают $1^\beta = 1$.

2) Пусть $a > 1$. Возьмем любое рациональное число $r_1 < \beta$ и любое рациональное число $r_2 > \beta$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$. В этом случае под a^β понимают такое число, которое заключено между a^{r_1} и a^{r_2} для любых рациональных чисел r_1 и r_2 таких, что $r_1 < \beta$, а $r_2 > \beta$. Такое число существует и единственно для любого $a > 1$ и любого иррационального β.

3) Пусть $0 < a < 1$. Возьмем любое рациональное число $r_1 < \beta$ и любое рациональное число $r_2 > \beta$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$. В этом случае под a^β понимают такое число, которое заключено между a^{r_2} и a^{r_1} для любых рациональных чисел r_1 и r_2, удовлетворяющих неравенству $r_1 < \beta < r_2$. Такое число существует и единственно для любого числа a из интервала $(0; 1)$ и любого иррационального β.

35. Свойства степеней с действительными показателями. Если $a > 0$, $b > 0$ и x, y — любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

1°. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

2°. $a^x : a^y = a^{x-y}$.

3°. $(a^x)^y = a^{xy}$.

4°. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.

5°. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

ГЛАВА II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 4. Основные понятия

36. Виды алгебраических выражений. Из чисел и переменных с помощью знаков сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень и извлечения корня и с помощью скобок составляют *алгебраические выражения*.

Примеры алгебраических выражений:

$$1)\ 2a^2b - 3ab^2(a+b);\ \ 2)\ a+b+\frac{c}{5};\ \ 3)\ \frac{3a^2+3a+1}{a-1};$$

$$4)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{3}\right)^3;\ \ 5)\ \sqrt{a+b};\ \ 6)\ (\sqrt[3]{2}-x)^4;\ \ 7)\ a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}.$$

Если алгебраическое выражение не содержит деления на переменные и извлечения корня из переменных (в частности, возведения в степень с дробным показателем), то его называют *целым выражением*. Из написанных выше целыми являются выражения 1), 2) и 6).

Если алгебраическое выражение составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления, причем используется деление на выражения с переменными, то его называют *дробным выражением*. Так, из написанных выше дробными являются выражения 3) и 4).

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями*. Так, из написанных выше рациональными являются выражения 1), 2), 3), 4) и 6).

Если в алгебраическом выражении используется извлечение корня из переменных (или возведение переменных в дробную степень), то его называют *иррациональным выражением*. Так, из написанных выше иррациональными являются выражения 5) и 7).

Итак, алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными. Рациональные выражения, в свою очередь, разделяются на целые и дробные.

37. Допустимые значения переменных. Область определения алгебраического выражения. Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*. Множество всех допустимых значений переменных называют *областью определения алгебраического выражения* (или областью допустимых значений переменных — ОДЗ).

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных. Так, при любых значениях переменных имеют смысл целые выражения 1), 2), 6) из п. 36.

Дробные выражения не имеют смысла при тех значениях переменных, которые обращают знаменатель в нуль. Так, дробное выражение 3) из п. 36 имеет смысл при всех a, кроме $a = 1$, а дробное выражение 4) имеет смысл при всех a, b, c, кроме значений $a = 0$, $b = 0$.

Иррациональное выражение не имеет смысла при тех значениях переменных, которые обращают в отрицательное число выражение, содержащееся под знаком корня четной степени или под знаком возведения в дробную степень. Так, иррациональное выражение 5) имеет смысл только при тех a, b, при которых $a + b \geqslant 0$, а иррациональное выражение 7) имеет смысл только при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ (см. п. 36).

Если в алгебраическом выражении переменным придать допустимые значения, то получится числовое выражение; его значение называют *значением алгебраического выражения* при выбранных значениях переменных.

Например, найдем значение выражения

$$\frac{\sqrt[3]{a^2+b}}{2a-b} \text{ при } a=5,\ b=2.$$

Имеем $\dfrac{\sqrt[3]{5^2+2}}{2\cdot 5-2} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{10-2} = \dfrac{3}{8}$.

38. Понятие тождественного преобразования выражения. Тождество. Рассмотрим два выражения

$$f(x)=x^2-2x \quad \text{и} \quad g(x)=4x-5.$$

При $x = 2$ имеем $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$; $g(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$. Числа 0 и 3 называют *соответственными значениями* выражений $x^2 - 2x$ и $4x - 5$ при $x = 2$. Найдем соответственные значения тех же выражений при $x = 1$:

$$f(1)=1^2-2\cdot 1=-1;\quad g(1)=4\cdot 1-5=-1;$$

при $x = 0$:

$$f(0)=0^2-2\cdot 0=0;\qquad g(0)=4\cdot 0-5=-5.$$

Соответственные значения двух выражений могут быть равными друг другу (так, в рассмотренном примере выполняется равенство $f(1) = g(1)$), а могут и отличаться друг от друга (так, в рассмотренном примере $f(2) \neq g(2)$; $f(0) \neq g(0)$).

Если соответственные значения двух выражений, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения называют *тождественно равными*.

Тождеством называют равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Так, тождественно равны выражения x^5 и $x^2 \cdot x^3$, $a + b + c$ и $c + b + a$, $(2ab)^2$ и $4a^2b^2$.

Примеры тождеств:

$$a + b = b + a,$$
$$a + 0 = a,$$
$$(a + b)\,c = ac + bc,$$
$$a \cdot 1 = a,$$
$$x^5 = x^2 \cdot x^3.$$

Пропорция (см. п. 27) $\frac{2a}{a-1} = \frac{10a}{5(a-1)}$ есть тождество при всех значениях a, кроме $a = 1$, поскольку при $a = 1$ знаменатели дробей обращаются в нуль, т. е. дроби не будут иметь смысла.

Замена выражения $\frac{ac}{bc}$ выражением $\frac{a}{b}$ (сократили на c) есть тождественное преобразование выражения $\frac{ac}{bc}$ при ограничениях $b \neq 0$, $c \neq 0$. Значит, $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ — тождество при всех значениях переменных, кроме $b = 0$, $c = 0$. Верные числовые равенства также называют тождествами.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют *тождественным преобразованием выражения*.

§ 5. Целые рациональные выражения

39. Одночлены и операции над ними. *Одночленом* называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения. Например, $3a \cdot (2{,}5a^3)$, $(5ab^2) \cdot (0{,}4c^3d)$, $x^2y \cdot (-2z) \cdot \frac{3}{4}$ — одночлены, тогда как выражения $a + b$, $\frac{ab}{c}$ не являются одночленами.

Любой одночлен можно привести *к стандартному виду*, т. е. представить в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена*. Сумму показателей степеней всех переменных называют *степенью одночлена*.

Если между двумя одночленами поставить знак умножения, то получится одночлен, называемый *произведением* исходных одночленов. При возведении одночлена в натуральную степень также получается одночлен. Результат обычно приводят к стандартному виду.

Приведение одночлена к стандартному виду, умножение одночленов — тождественные преобразования.

Пример 1. Привести к стандартному виду одночлен $3a \cdot (2{,}5a^3)$.

Решение. $3a \cdot (2{,}5a^3) = (3 \cdot 2{,}5) \cdot (a \cdot a^3) = 7{,}5a^4$.

Пример 2. Выполнить умножение одночленов $24ab^2cd^3$ и $\frac{1}{6}a^2b^3c$.

Решение. $(24ab^2cd^3) \cdot \left(\frac{1}{6}a^2b^3c\right) = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right) \times$
$\times (a \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b^3) \cdot (c \cdot c) \cdot d^3 = 4a^3b^5c^2d^3.$

Одночлены, приведенные к стандартному виду, называют *подобными*, если они отличаются только коэффициентом или совсем не отличаются. Подобные одночлены можно складывать и вычитать, в результате чего снова получается одночлен, подобный исходным (иногда получается 0). Сложение и вычитание подобных одночленов называют *приведением подобных членов*.

Пример 3. Выполнить сложение одночленов $18x^2yz^3$ и $-8x^2yz^3$.

Решение. $18x^2yz^3 + (-8x^2yz^3) = (18 + (-8)) \times$
$\times x^2yz^3 = 10x^2yz^3.$

40. Многочлены. Приведение многочленов к стандартному виду. *Многочленом* называют сумму одночленов. Если все члены многочлена записать в стандартном виде (см. п. 39) и выполнить приведение подобных членов, то получится *многочлен стандартного вида*.

Всякое целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида — в этом состоит цель преобразований (упрощений) целых выражений.

Пример 1. Привести многочлен $3a \cdot 5b + 3ab +$
$+ 2a \cdot (-4b) + b \cdot b$ к стандартному виду.

Решение. Сначала приведем к стандартному виду члены многочлена. Получим $15ab + 3ab -$
$- 8ab + b^2$. После приведения подобных членов получим многочлен стандартного вида $10ab + b^2$.

Пример 2. $(5a^2b + ab^2) - (3a^2b - 4ab^2)$.

Решение. Если перед скобками стоит знак минус, то скобки можно опустить, изменив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Воспользовавшись этим правилом раскрытия скобок, получим

$$5a^2b + ab^2 - 3a^2b + 4ab^2 =$$
$$= (5a^2b - 3a^2b) + (ab^2 + 4ab^2) = 2a^2b + 5ab^2.$$

Пример 3. $(a + b)(a - b)$.

Решение. Имеем $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

41. Формулы сокращенного умножения. В некоторых случаях приведение целого выражения к стандартному виду многочлена осуществляется с использованием тождеств:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \qquad (1)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (2)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (3)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, \qquad (4)$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3, \qquad (5)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (6)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (7)$$

Эти тождества называют *формулами сокращенного умножения.*

Рассмотрим примеры, в которых нужно преобразовать заданное выражение в многочлен стандартного вида.

Пример 1. $(3x^2 + 4y^3)(3x^2 - 4y^3)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (1), получим

$$(3x^2)^2 - (4y^3)^2 = 9x^4 - 16y^6.$$

Пример 2. $(a + b - c)(a + b + c)$.

Решение. $(a + b - c)(a + b + c) = ((a + b) - c) \times \times ((a + b) + c) = (a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

Пример 3. $(3a^2 - 5b^3)^2$.

Решение. Воспользовавшись формулой (3), получим

$$(3a^2)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 5b^3 + (5b^3)^2 = 9a^4 - 30a^2b^3 + 25b^6.$$

Пример 4. $(3a + 1)(9a^2 - 3a + 1)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (4), получим

$$(3a)^3 + 1 = 27a^3 + 1.$$

42. Разложение многочленов на множители. Иногда можно преобразовать многочлен в произведение нескольких множителей — многочленов или одночленов. Такое тождественное преобразование называют *разложением многочлена на множители*. В этом случае говорят, что многочлен делится на каждый из этих множителей.

Рассмотрим некоторые способы разложения многочленов на множители.

1. Вынесение общего множителя за скобки. Это преобразование является непосредственным следствием распределительного закона

$$ac + bc = c(a + b).$$

Пример 1. Разложить на множители многочлен $28x^3 - 35x^4$.

Решение. $28x^3 - 35x^4 = 7x^3 \cdot 4 - 7x^3 \cdot 5x = 7x^3 \cdot (4 - 5x)$.

Обычно при вынесении общего множителя за скобки каждую переменную, входящую во все члены многочлена, выносят с наименьшим показателем, который она имеет в данном многочлене. Если все коэффициенты многочлена — целые числа, то в качестве коэффициента общего множителя берут наибольший по модулю общий делитель всех коэффициентов многочлена.

2. *Использование формул сокращенного умножения.* Формулы (1) — (7) из п. 41, будучи прочитанными «справа налево», во многих случаях оказываются полезными для разложения многочленов на множители.

Пример 2. Разложить на множители $x^6 - 1$.

Решение. Имеем $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2$. Применив формулу (1) (разность квадратов), получим $(x^3 + 1) \times$ $\times (x^3 - 1)$. Применив теперь формулы (4) и (5) (сумма кубов, разность кубов), получим

$$(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Итак,

$$x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Пример 3. $4a^4b^3 + 16a^3b^4 + 16a^2b^5$.

Решение. Сначала вынесем за скобки общий множитель. Для этого найдем наибольший общий делитель коэффициентов 4, 16, 16 и наименьшие показатели степеней, с которыми переменные a или b входят в составляющие данный многочлен одночлены. Получим

$$4a^2b^3(a^2+4ab+4b^2).$$

Так как, далее, по формуле (2), $a^2 + 4ab + 4b^2 =$ $= (a + 2b)^2$, то окончательно получаем $4a^4b^3 +$ $+ 16a^3b^4 + 16a^2b^5 = 4a^2b^3 (a + 2b)^2$.

3. Способ группировки. Он основан на том, что переместительный и сочетательный законы сложения позволяют группировать члены многочлена различными способами. Иногда удается такая группировка, что после вынесения за скобки общих множителей в каждой группе в скобках остается один и тот же многочлен, который, в свою очередь, как общий множитель может быть вынесен за скобки.

Рассмотрим примеры разложения многочлена на множители способом группировки

Пример 4. $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$.

Решение. Произведем группировку следующим образом:

$$(x^3 - 3x^2) + (5x - 15).$$

В первой группе вынесем за скобки общий множитель x^2, во второй — общий множитель 5. Получим $x^2(x - 3) + 5(x - 3)$. Теперь многочлен $(x - 3)$ как общий множитель вынесем за скобки: $(x - 3) \times$ $\times (x^2 + 5)$. Таким образом, получаем

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x - 3)(x^2 + 5).$$

Пример 5. $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz$.

Решение. $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz = (20x^2 -$ $- 15xy) + (3yz - 4xz) = 5x(4x - 3y) - z(4x - 3y) =$ $= (4x - 3y)(5x - z)$.

Пример 6. $a^2 - 7ab + 12b^2$.

Решение. Здесь никакая группировка не приведет к появлению во всех группах одного и того же многочлена. В таких случаях иногда оказывается полезным представить какой-либо член многочлена в виде некоторой суммы, после чего снова попробовать применить способ группировки. В нашем примере целесообразно представить $-7ab$ в виде суммы $-3ab-4ab$. Получим

$$a^2-7ab+12b^2=a^2-3ab-4ab+12b^2=$$
$$=(a^2-3ab)-(4ab-12b^2)=a(a-3b)-4b(a-3b)=$$
$$=(a-3b)(a-4b).$$

Пример 7. x^4+4y^4.

Решение. Прибавим и отнимем одночлен $4x^2y^2$. Получим $x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=$

$$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy).$$

Здесь применен *метод выделения полного квадрата*.

43. Многочлены от одной переменной. Многочлен $ax+b$, где a, b — числа ($a\neq 0$), а x — переменная, называют *многочленом первой степени*; многочлен ax^2+bx+c, где a, b, c — числа ($a\neq 0$), а x — переменная, называют *многочленом второй степени* или *квадратным трехчленом*; многочлен ax^3+bx^2+cx+d, где a, b, c, d — числа ($a\neq 0$), а x — переменная, называют *многочленом третьей степени*.

Вообще если $a, b, c, \ldots, l, m$ — числа ($a\neq 0$), а x — переменная, то многочлен

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+lx+m$$

называют *многочленом n-й степени* (*относительно* x); ax^n, bx^{n-1}, … , lx, m — члены многочлена, $a, b, c, \ldots, l, m$ — коэффициенты, ax^n — *старший член* многочлена, a — коэффициент при старшем члене, m — *свободный член* многочлена. Обычно многочлен записывают по убывающим степеням переменной, т. е. степени переменной x постепенно уменьшаются, в частности на первом месте стоит старший член, на последнем — свободный член. *Степень многочлена* — это степень старшего члена.

Например, $5x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 1$ — многочлен пятой степени, в котором $5x^5$ — старший член, 1 — свободный член многочлена.

Если коэффициент при старшем члене равен 1, то многочлен называют *приведенным*, если указанный коэффициент отличен от 1, то *неприведенным*.

Корнем многочлена $P(x)$ называют такое значение x, при котором многочлен обращается в нуль. Например, число 2 является корнем многочлена $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$, так как $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 - 2 = 0$.

44. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (т. е. корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$), то

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

Эта формула применяется для *разложения квадратного трехчлена на множители*.

Пример. Разложить на множители $6x^2 - x - 2$.

Решение. Применив формулу корней квадратного уравнения (см. п. 104) к уравнению $6x^2 - x - 2 = 0$, находим $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Значит,

$$6x^2 - x - 2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 3\left(x - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= (2x + 1)(3x - 2).$$

45. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$. Известно, что

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a), \tag{1}$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2). \tag{2}$$

Если перемножить многочлены $x - a$ и $x^3 + x^2a + xa^2 + a^3$, то получим

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3). \tag{3}$$

Обобщением формул (1), (2), (3) является формула разложения на множители двучлена $x^n - a^n$:

$$\boldsymbol{x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).}$$

Если, в частности, $a = 1$, то получаем

$$\boldsymbol{x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1).}$$

Например, $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

§ 6. Дробные рациональные выражения

46. Рациональная дробь и ее основное свойство. Любое дробное выражение (см. п. 36) можно преобразовать к виду $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены. Такую дробь $\frac{P}{Q}$ называют *рациональной дробью.*

Примеры рациональных дробей:

$$\frac{x+1}{2x - \frac{1}{3}}, \quad \frac{(x+2)(x^2-3)}{a+2b+5c}.$$

Основное свойство дроби выражается тождеством $\frac{P}{Q} = \frac{PR}{QR}$, справедливым при условиях $R \neq 0$ и $Q \neq 0$; здесь R — целое рациональное выражение. Это значит, что числитель и знаменатель рациональной дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, одночлен или многочлен. Например,

$$\frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1}{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}} = \frac{12\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{4x^3 - 6x^2 + 12}{3x^2 + 2x + 6}.$$

Основное свойство дроби может быть использовано для перемены знаков у членов дроби. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{P}{Q}$ умножить на -1, получим $\frac{P}{Q} = \frac{-P}{-Q}$. Таким образом, значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки у числителя и знаменателя. Если же изменить знак только у числителя или только у знаменателя, то и дробь изменит свой знак: $\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{Q}$; $\frac{P}{-Q} = -\frac{P}{Q}$.

Значит, $\frac{P}{Q} = -\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{-Q}$.

Например, $\frac{3x-2}{3x+4} = -\frac{-(3x-2)}{3x+4} = -\frac{2-3x}{3x+4}$.

47. Сокращение рациональных дробей. Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на их общий множитель. Возможность такого сокращения обусловлена основным свойством дроби.

Для того чтобы сократить рациональную дробь, нужно числитель и знаменатель разложить на множители. Если окажется, что числитель и знаменатель имеют общие множители, то дробь можно сократить. Если общих множителей нет, то преобразование дроби посредством сокращения невозможно.

Пример. Сократить дробь $\frac{x^2 - 3xy}{9y^2 - x^2}$.

Решение. Имеем $x^2 - 3xy = x(x - 3y)$;

$$9y^2 - x^2 = -(x^2 - 9y^2) = -(x - 3y)(x + 3y).$$

Значит, $\frac{x^2 - 3xy}{9y^2 - x^2} = \frac{x(x - 3y)}{-(x - 3y)(x + 3y)} = -\frac{x}{x + 3y}$.

Сокращение дроби выполнено при условии $x - 3y \neq$ $\neq 0$.

48. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю. *Общим знаменателем* нескольких рациональных дробей называют целое рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой дроби.

Например, общим знаменателем дробей $\frac{x}{x+2}$ и $\frac{3x-1}{x-2}$ служит многочлен $(x + 2)(x - 2)$, так как он делится и на $x + 2$, и на $x - 2$. Общим знаменателем могут также служить и многочлен $3\,(x + 2)^2 \cdot (x - 2)$, и многочлен $x\,(x + 2)\,(x - 2)$, и многочлен $5x^2\,(x + 2) \times$ $\times (x - 2)^3$ и т. д. Обычно берут такой общий знаменатель, что любой другой общий знаменатель делится на выбранный. Такой простейший знаменатель называют *наименьшим общим знаменателем.*

В рассмотренном выше примере наименьший общий знаменатель равен $(x + 2)(x - 2)$. Имеем

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}; \quad \frac{3x-1}{x-2} = \frac{(3x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Приведение данных дробей к общему знаменателю достигнуто путем умножения числителя и знаменателя первой дроби на $x - 2$, а числителя и знаменателя второй дробей на $x + 2$. Многочлены $x - 2$ и $x + 2$ называют *дополнительными множителями* соответственно для первой и второй дроби. Дополнительный множитель для данной дроби равен частному от деления общего знаменателя на знаменатель данной дроби.

Чтобы несколько рациональных дробей привести к общему знаменателю, нужно:

1) разложить знаменатель каждой дроби на множители;

2) составить общий знаменатель, включив в произведение все множители полученных в п. 1) разложений; если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то он берется с показателем степени, равным наибольшему из имеющихся;

3) найти дополнительные множители для каждой из дробей (для этого общий знаменатель делят на знаменатель дроби);

4) домножив числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель, привести дроби к общему знаменателю.

Пример. Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{a}{12a^2-12b^2}; \quad \frac{b}{18a^3+18a^2b}; \quad \frac{a+b}{24a^2-24ab}.$$

Решение. Разложим знаменатели дробей на множители:

$$12a^2 - 12b^2 = 12(a - b)(a + b);$$

$$18a^3 + 18a^2b = 18a^2(a + b);$$

$$24a^2 - 24ab = 24a(a - b).$$

В общий знаменатель надо включить следующие множители: $(a - b)$, $(a + b)$, a^2, а также наименьшее общее кратное чисел 12, 18, 24, т. е. К (12, 18, 24) = = 72. Значит, общий знаменатель имеет вид $72a^2 \times$ $\times (a - b)(a + b)$.

Дополнительные множители: для первой дроби $6a^2$, для второй дроби $4(a - b)$, для третьей дроби $3a(a + b)$. Значит, получаем

$$\frac{\overbrace{a}^{6a^2}}{12a^2 - 12b^2} = \frac{6a^3}{72a^2(a - b)(a + b)};$$

$$\frac{\overbrace{b}^{4(a-b)}}{8a^3 + 18a^2b} = \frac{4b(a - b)}{72a^2(a - b)(a + b)};$$

$$\frac{\overbrace{a + b}^{3a(a+b)}}{24a^2 - 24ab} = \frac{3a(a + b)^2}{72a^2(a - b)(a + b)}.$$

49. Сложение и вычитание рациональных дробей. *Сумма* двух (и вообще любого конечного числа) рациональных дробей с одинаковыми знаменателями тождественно равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме числителей складываемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 + P_2}{Q}.$$

Аналогично обстоит дело в случае вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{P_1}{Q} - \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 - P_2}{Q}.$$

Пример 1. Упростить выражение $\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{x+y}$.

Решение. Выполним сложение данных дробей: $\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{x+y} = \frac{x^3+y^3}{x+y} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y} = x^2 - xy + y^2$.

Для сложения или вычитания рациональных дробей с разными знаменателями нужно прежде всего привести дроби к общему знаменателю, а затем выполнить операции над полученными дробями с одинаковыми знаменателями.

Пример 2. Упростить выражение $\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$.

Решение. Имеем:

$$2x^2 + 2x = 2x(x+1);$$
$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Значит,

$$\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x} = \frac{\overbrace{3}^{x-1}}{2x(x+1)} + \frac{\overbrace{2x-1}^{2x}}{(x-1)(x+1)} - \frac{\overbrace{2}^{2(x-1)(x+1)}}{x} = \frac{3(x-1)+2x(2x-1)-4(x-1)(x+1)}{2x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{x+1}{2x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2x(x-1)}.$$

50. Умножение и деление рациональных дробей. *Произведение* двух (и вообще любого конечного числа) рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}.$$

Частное от деления двух рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй дроби, а знаменатель — произведению знаменателя первой дроби на числитель второй дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot Q_2}{Q_1 \cdot P_2}.$$

Сформулированные правила умножения и деления распространяются и на случай умножения или деления на многочлен: достаточно записать этот многочлен в виде дроби со знаменателем 1.

Учитывая возможность сокращения рациональной дроби, полученной в результате умножения или деления рациональных дробей, обычно стремятся до выполнения этих операций разложить на множители числители и знаменатели исходных дробей.

Пример 1. Выполнить умножение $\frac{x^2+2x+1}{18x^3} \times$

$\times \frac{9x^4}{x^2-1}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3} = \frac{(x+1)^2}{18x^3}; \qquad \frac{9x^4}{x^2-1} = \frac{9x^4}{(x-1)(x+1)}.$$

Использовав правило умножения дробей, получим

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2\cdot 9x^4}{18x^3(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+1)}{2(x-1)}.$$

Пример 2. Выполнить деление

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}=\frac{a^2(a-2)}{3(a+1)};\ \frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{(a-2)(a+2)}{3(a+1)^2}.$$

Использовав правило деления дробей, получаем

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{a^2(a-2)\cdot 3(a+1)^2}{3(a+1)(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2(a+1)}{a+2}.$$

51. Возведение рациональной дроби в целую степень. Чтобы возвести рациональную дробь $\frac{P}{Q}$ в натуральную степень n, нужно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби; первое выражение — числитель, а второе выражение — знаменатель результата:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\frac{P^n}{Q^n}.$$

Пример 1. Преобразовать в дробь степень $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3$.

Решение. Применив правила возведения в степень дроби и одночлена, получим $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3 =$ $= \frac{(2x^2y^3)^3}{(3z^5)^3} = \frac{8x^6y^9}{27z^{15}}$.

При возведении дроби в целую отрицательную степень используется тождество $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-n} = \left(\frac{Q}{P}\right)^n$, справедливое для всех значений переменных, при которых $P \neq 0$ и $Q \neq 0$.

Пример 2. Преобразовать в дробь выражение

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5}.$$

Решение.

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5} = \left(\frac{(a+2b)^4}{(a+b)^2(a-b)^3}\right)^5 =$$

$$= \frac{(a+2b)^{20}}{(a+b)^{10}(a-b)^{15}}.$$

52. Преобразование рациональных выражений. Преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рациональных дробей, а также к возведению дроби в натуральную степень. Всякое рациональное выражение можно преобразовать в дробь, числитель и знаменатель которой — целые выражения; в этом, как правило, состоит цель тождественных преобразований рациональных выражений.

Пример. Упростить выражение

$$\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right) \cdot \left(\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a}\right)^{-1} + \frac{8a^2}{2a+b}.$$

Решение. Выполняя действия с рациональными дробями, получим:

$$1)\ \frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b}=\frac{\overbrace{2a}^{2a+b}}{2a+b}-\frac{4a^2}{(2a+b)^2}=$$

$$=\frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{2ab}{(2a+b)^2};$$

$$2)\ \frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}=\frac{2a}{(2a-b)(2a+b)}-\frac{\overbrace{1}^{2a+b}}{2a-b}=$$

$$=\frac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{-b}{(2a-b)(2a+b)};$$

$$3)\left(-\frac{b}{(2a-b)(2a+b)}\right)^{-1}=-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b};$$

$$4)\frac{2ab}{(2a+b)^2}\cdot\left(-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b}\right)=-\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{b(2a+b)^2}=$$

$$=-\frac{2a(2a-b)}{2a+b}=\frac{2ab-4a^2}{2a+b};$$

$$5)\ \frac{2ab-4a^2}{2a+b}+\frac{8a^2}{2a+b}=\frac{2ab+4a^2}{2a+b}=\frac{2a(2a+b)}{2a+b}=2a.$$

§ 7. Иррациональные выражения

53. Простейшие преобразования арифметических корней (радикалов). При преобразовании арифметических корней используются их свойства 1°—5° (см. п. 30).

Рассмотрим несколько примеров на применение свойств арифметических корней для простейших преобразований радикалов. При этом все переменные будем считать принимающими только неотрицательные значения.

Пример 1. Извлечь корень из произведения $\sqrt[3]{a^3b^9}$.

Решение. Применив свойство 1°, получим

$$\sqrt[3]{a^3b^9} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^9} = ab^3.$$

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня $\sqrt{45a^5}$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{45a^5} = \sqrt{9a^4 5a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{5a} = 3a^2 \sqrt{5a}.$$

Такое преобразование называют *вынесением множителя из-под знака корня*. Цель преобразования — упростить подкоренное выражение.

Пример 3. Упростить $(\sqrt[3]{a^2})^5$.

Решение. По свойству 3° имеем $(\sqrt[3]{a^2})^5 = \sqrt[3]{(a^2)^5} = \sqrt[3]{a^{10}}$.

Обычно стараются подкоренное выражение упростить, для чего выносят множители за знак корня: $\sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a} = a^3 \sqrt[3]{a}$.

Итак, $(\sqrt[3]{a^2})^5 = a^3 \sqrt[3]{a}$.

Пример 4. Упростить $\sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Преобразуем выражение $x^2 \sqrt[3]{x}$, внеся множитель под знак корня: $x^2 \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6 x} = \sqrt[3]{x^7}$. По свойству 4° имеем $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[12]{x^7}$.

Пример 5. Упростить $\sqrt[30]{2^9}$.

Решение. По свойству 5° мы имеем право показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделить на одно и то же натуральное число. Если в рассматриваемом примере разделить указанные показатели на 3, то получим $\sqrt[30]{2^9} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$.

Пример 6. Упростить выражения:

а) $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}$; б) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$; в) $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7}$.

Решение. а) По свойству 1° получаем, что для перемножения корней одной и той же степени достаточно перемножить подкоренные выражения и из полученного результата извлечь корень той же степени. Значит,

$$\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a \cdot a^2} = \sqrt[5]{a^3}.$$

б) Прежде всего мы должны привести радикалы к одному показателю. Согласно свойству 5° мы можем показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число. Поэтому $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$. Далее имеем $\sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a^3}$. А теперь в полученном результате разделим показатели корня и степени подкоренного выражения на 3: $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$.

Итак, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt{a}$.

в) Приведем радикалы к одному показателю. Для этого нужно найти наименьшее общее кратное чисел 8 и 12, т. е. К(8, 12) = 24. Далее показатели корня и степени подкоренного выражения для первого из перемножаемых радикалов следует умножить на 3, а для второго — на 2. Получим

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = \sqrt[24]{x^9} \cdot \sqrt[24]{x^{14}} = \sqrt[24]{x^9 \cdot x^{14}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

На практике при выполнении действий над радикалами довольно часто переходят к дробным показателям. Например,

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}} = x^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

54. Тождество $\sqrt{a^2} = |a|$. Упростим выражение $\sqrt{a^2}$. Здесь могут представиться два случая: $a \geqslant 0$ или $a < 0$. Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2} = a$; например, $\sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt{27^2} = 27$, $\sqrt{0^2} = 0$. Если же $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$; например, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2)$. Итак,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Но точно так же определяется модуль действительного числа (см. п. 23). Таким образом,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Например, $\sqrt{3^2} = |3| = 3$; $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5$.

Вообще, если n — четное число, т. е. $n = 2k$, то

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

Пример. Упростить выражение

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2 - x} + x - 3.$$

Решение. Имеем:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|.$$

Поскольку заданное выражение содержит слагаемое $\sqrt{2 - x}$, то $2 - x \geqslant 0$, откуда находим, что $x \leqslant 2$.

Значит, $x - 3 < 0$, а потому $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$. Итак, $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - x$, и мы получаем

$$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3=3-x+\sqrt{2-x}+x-3=$$
$$=\sqrt{2-x}.$$

55. Преобразование иррациональных выражений. Для преобразования иррациональных выражений используются свойства радикалов (см. п. 32) и свойства степени с рациональным показателем (см. п. 35).

Пример. Упростить выражение

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\left(x^0+\frac{2}{\sqrt{x}}+x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение.

1) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x^2}-1)}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}}=-\sqrt[4]{x}$;

2) $-\sqrt[4]{x}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{-\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$;

3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=\dfrac{1^2}{(\sqrt[4]{x})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $x^0+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+x^{-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x}=$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}$;

5) $\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}} =$

$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

6) $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Итак, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Обычно стараются записать ответ так, чтобы в знаменателе не содержалась иррациональность. Для избавления от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ умножим и числитель, и знаменатель на $\sqrt{x} - 1$ — это выражение называют *сопряженным* для выражения $\sqrt{x} + 1$. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x^2})-1^2} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 8. Определение и свойства функций

56. Определение функции. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что *задана функция $y = f(x)$ с областью определения X*; пишут:

$$y = f(x),\ x \in X.$$

При этом переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную y — *зависимой переменной*. Для области определения функции используют также обозначение $D(f)$. Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$, называют *областью значений функции* и обозначают $E(f)$.

57. Аналитическое задание функции. Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ — некоторое выражение с переменной x. В таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана аналитически.

Если функция задана аналитически, то допускается ее задание в виде $y = f(x)$ без условия $x \in X$ в случае, когда область определения выражения $f(x)$ совпадает с областью определения функции.

Пример 1.• $y = x^2 + 5x - 1$, где $x \geqslant 0$. Область определения этой функции — луч $[0; +\infty)$. Чтобы найти значение функции в любой точке $x \geqslant 0$, достаточно найти числовое значение выражения $x^2 + 5x - 1$ в выбранной точке. Функция задана аналитически.

Пример 2.• Найти область определения функции $y = \sqrt{x-1}$.

Решение. Выражение $\sqrt{x-1}$ определено при тех x, при которых $x - 1 \geqslant 0$, т. е. при $x \geqslant 1$. Значит, область определения функции — луч $[1; +\infty)$.

Иногда функция задается на различных промежутках различными формулами. Такую функцию называют *кусочной*.

Пример: $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x + 2, \text{ если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта функция определена на отрезке $[-1; 1]$. Для вычисления ее значений нужно точно определить, какой формулой следует воспользоваться для заданного конкретного значения аргумента. Например, если нужно вычислить $f(0,5)$, воспользуемся равенством $f(x) = x + 2$ (поскольку число $x = 0,5$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 1$) и получим $f(0,5) = 2,5$. Если же нужно вычислить $f(-0,5)$, то воспользуемся равенством $f(x) = 2x + 3$ (поскольку число $x = 0,5$ удовлетворяет условию $-1 \leqslant x < 0$) и получим $f(-0,5) = 2$.

58. Табличное задание функции. На практике часто используют *табличный* способ задания функции. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблица квадратов, таблица кубов, таблица квадратных корней.

Во многих случаях табличное задание функции оказывается удобным. Оно позволяет найти значения функции для значений аргумента, имеющихся в таблице, без всяких вычислений.

59. Числовая плоскость. Координатная плоскость, оси координат. Множество всех пар[1] действительных чисел называют *числовой плоскостью*.

Как для множества всех действительных чисел есть геометрическая модель — координатная прямая (см. п. 18), так и для множества всех пар действительных чисел есть геометрическая модель — координатная плоскость. *Координатная плоскость xy* определяется двумя взаимно перпендикулярными координатными прямыми с общим началом O и одинаковым масштабом (рис. 1.8). Точка O — *начало координат*. Горизонтальную прямую называют *осью абсцисс* или осью x, вертикальную — *осью ординат* или осью y.

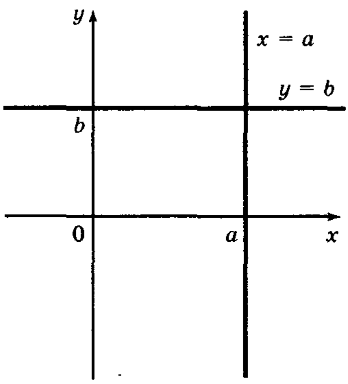


Рис. 1.8

Если отметить на координатной плоскости все точки с абсциссой $x = a$, то получится прямая, параллельная оси y (рис. 1.8); говорят, что $x = a$ — уравнение этой прямой. Если отметить на координатной плоскости все точки с ординатой $y = b$, то получится прямая, параллельная оси x (рис. 1.8); говорят, что $y = b$ — уравнение этой прямой.

[1] Под парой чисел понимают два числа, которые рассматриваются в определенном порядке.

60. График функции, заданной аналитически. Пусть функция задана аналитически формулой $y = f(x)$. Если на координатной плоскости отметить все точки, обладающие следующим свойством: абсцисса точки принадлежит области определения функции, а ордината равна соответствующему значению функции, то получится множество точек $(x; f(x))$ — *график функции*.

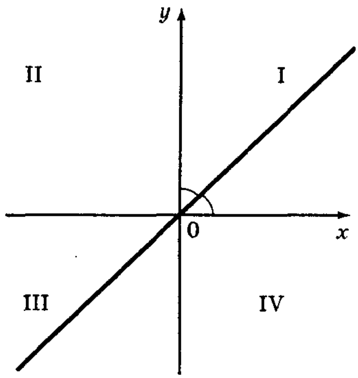


Рис. 1.9

Например, графиком функции $y = x$ является множество точек вида $(x; x)$, т. е. точек, имеющих одинаковые координаты. Это множество точек есть биссектриса координатных углов I и III (рис. 1.9).

На практике для построения графика функции составляют таблицу значений функции при некоторых значениях аргумента, наносят на плоскость соответствующие точки и соединяют полученные точки линией. При этом предполагают, что найденные точки достаточно точно показывают ход изменения функции.

Пример 1. Построить график функции $y = x^2$.

Решение. Составим таблицу некоторых значений функции:

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
y	9	4	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1	4	9

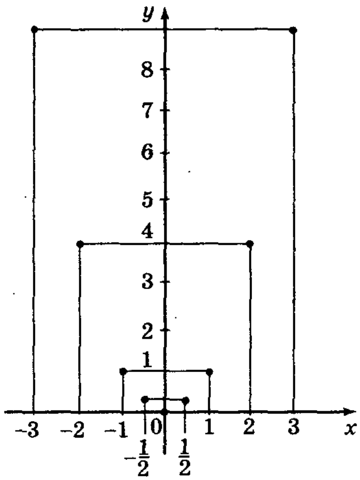


Рис. 1.10

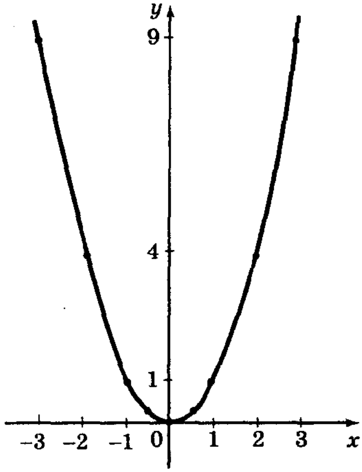


Рис. 1.11

Нанесем найденные точки (0; 0); (0,5; 0,25); (−0,5; 0,25); (1; 1); (−1; 1); (2; 4); (−2; 4); (3; 9); (−3; 9) на координатную плоскость (рис. 1.10). Соединив эти точки плавной линией, получим график (а точнее, эскиз графика) функции $y = x^2$ (рис. 1.11). Эту линию называют *параболой*. Вообще параболой является график любой функции вида $y = ax^2$, где $a \neq 0$ (см. п. 83).

Пример 2•. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат – значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.

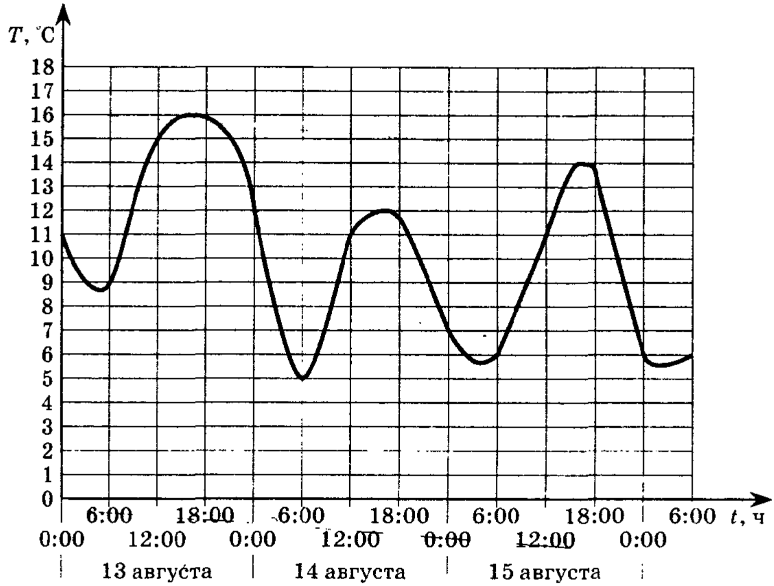


Рис. 1.12

Решение. Наибольшая температура воздуха 15 августа равна 14 градусам.

Ответ: 14.

61. Четные и нечетные функции. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *четной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *нечетной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — четные функции, а $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечетные функции.

Если функция $y = f(x)$ такова, что хотя бы для одной пары значений x и $-x$ оказалось, что $f(-x) \neq -f(x)$, и хотя бы для одной пары значений x и $-x$ оказалось, что $f(-x) \neq f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Из определения следует, что область определения X как четной, так и нечетной функции должна обладать следующим свойством: если $x \in X$, то и $-x \in X$ (т. е. X — симметричное относительно O множество).

Пример. Исследовать на четность функции: а) $y = x^{20}$; б) $y = x^{13}$; в) $y = \frac{x-4}{x^2-9}$.

Решение. а) Имеем $f(x) = x^{20}$, $f(-x) = (-x)^{20} = x^{20}$. Значит, $f(-x) = f(x)$ для всех x. Функция является четной.

б) Имеем $f(x) = x^{13}$, $f(-x) = (-x)^{13} = -x^{13}$. Значит, $f(-x) = -f(x)$ для всех x. Функция является нечетной.

в) Имеем $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$. Заметим, что $f(4) = 0$, а $f(-4) = -\frac{8}{7}$. Не выполняется ни равенство $f(4) = f(-4)$, ни равенство $f(-4) = -f(4)$. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

62. График четной функции. График нечетной функции. Графики четной и нечетной функций обладают следующими особенностями:

Если функция является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат.

Если функция является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.

Пример 1. Построить график функции $y = |x|$.

Решение. Имеем $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Значит, функция четна, а потому ее график симметричен относительно оси ординат.

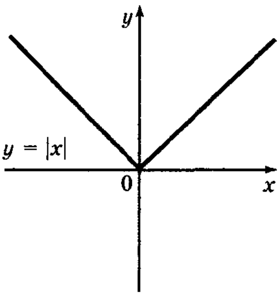


Рис. 1.13

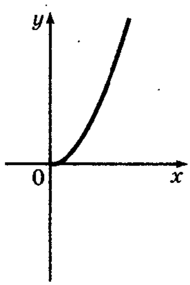


Рис. 1.14

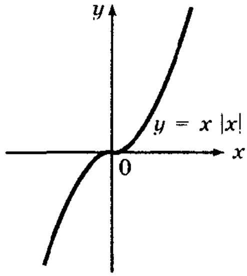


Рис. 1.15

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, т. е. при $x \geqslant 0$ имеем $y = x$. Графиком функции $y = x$ при $x \geqslant 0$ служит биссектриса первого координатного угла. Подвергнув ее преобразованию симметрии относительно оси y, получим график функции $y = |x|$ (рис. 1.13).

Пример 2. Построить график функции $y = x\,|x|$.

Решение. Имеем $f(-x) = (-x)\,|-x| = -x\,|x| = -f(x)$. Значит, функция нечетна, а потому график ее симметричен относительно начала координат.

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, а $f(x) = x \cdot |x| = x \cdot x = x^2$. Значит, при $x \geqslant 0$ имеем $y = x^2$. Графиком будет ветвь параболы. Она изображена на рисунке 1.14. Подвергнув ее преобразованию симметрии относительно начала координат, получим график функции $y = x\,|x|$ (рис. 1.15).

63. Периодические функции. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *периодической*, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Число T называют *периодом функции* $y = f(x)$.

Из этого определения сразу следует, что если T — период функции $y = f(x)$, то $2T$, $3T$, $4T$, $-T$, $-2T$, $-3T$, $-4T$ — также периоды функции. Значит, у периодической функции бесконечно много периодов. Если T — период функции, то и число вида kT, где k — любое целое число, также является периодом функции.

Чаще всего (но не всегда) среди множества положительных периодов функции можно найти наименьший. Его называют *основным периодом*.

Графики периодических функций обладают следующей особенностью. Если T — основной период функции $y = f(x)$, то для построения ее графика достаточно построить ветвь графика на одном из промежутков оси x длиной T, а затем осуществить параллельный перенос этой ветви по оси x на $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ... (рис. 1.16). Чаще всего в качестве такого промежутка длиной T выбирают промежуток с концами в точках $\left(-\frac{T}{2}; 0\right)$ и $\left(\frac{T}{2}; 0\right)$ или $(0; 0)$ и $(T; 0)$.

Примеры периодических функций с основным периодом:

$y = \sin x$, $T = 2\pi$ (см. п. 78);
$y = \cos x$, $T = 2\pi$ (см. п. 79);
$y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$ (см. п. 80);
$y = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$ (см. п. 81).

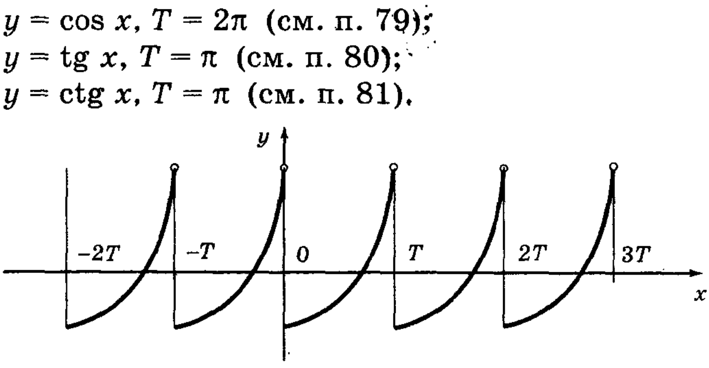


Рис. 1.16

64. Монотонные функции. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *возрастающей на промежутке* $X_1 \subset X$ ($\subset$ — знак включения одного множества в другое), если для любых x_1 и x_2 из X_1 таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (короче: } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *убывающей на промежутке* $X_1 \subset X$, если для любых x_1 и x_2 из X_1 таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ (короче: } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Иными словами, функция возрастает (убывает) на промежутке, если, какие бы два значения аргумента, принадлежащие этому промежутку, ни взять, окажется, что большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

При движении вдоль оси абсцисс слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается (рис. 1.17), а ордината графика убывающей функции уменьшается (рис. 1.18).

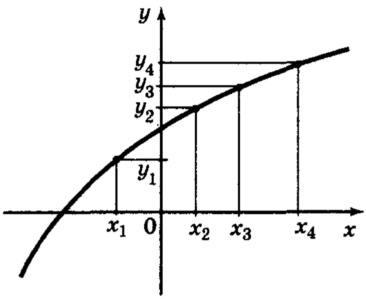


Рис. 1.17

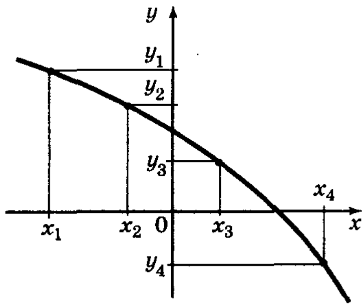


Рис. 1.18

Возрастающие и убывающие функции объединяют термином «*монотонные* функции».

Пример. Исследовать на монотонность функцию $y = 2x^3 + 3$.

Решение. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда по свойствам числовых неравенств (см. п. 21) имеем $x_1^3 < x_2^3$, $2x_1^3 < 2x_2^3$, $2x_1^3 + 3 < 2x_2^3 + 3$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что функция $y = 2x^3 + 3$ возрастает на всей числовой прямой.

§ 9. Виды функций

65. Линейная функция. *Линейной функцией* называют функцию, заданную формулой

$$y = kx + b,$$

где k и b — действительные числа. Если, в частности, $k = 0$, то получаем *постоянную функцию* $y = b$; если $b = 0$, то получаем *прямую пропорциональность* $y = kx$.

Перечислим свойства линейной функции $y = kx + b$ при $k \neq 0$, $b \neq 0$.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел.

2) Функция $y = kx + b$ ни четна, ни нечетна.

3) При $k > 0$ функция возрастает, а при $k < 0$ убывает на всей числовой прямой.

Теорема 1. Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая.

На рисунке 1.19 изображен график функции $y = kx + b$. Это прямая, параллельная прямой, служащей графиком функции $y = kx$, и проходящая через точку $(0; b)$ на оси ординат.

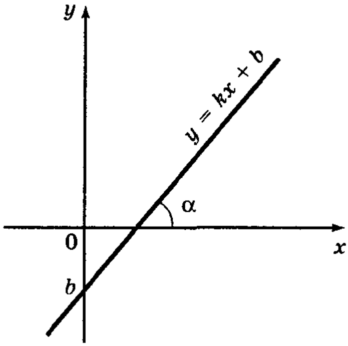


Рис. 1.19

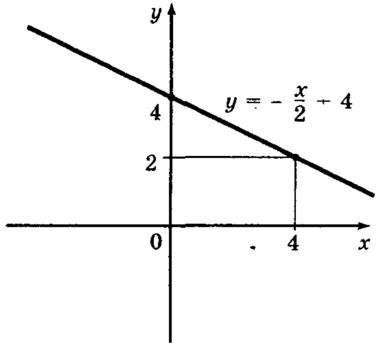


Рис. 1.20

Число k называют *угловым коэффициентом прямой*, оно равно тангенсу угла α между прямой и положительным лучом оси x, т. е. $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Пример. Построить график функции $y = -\frac{x}{2} + 4$.

Решение. Графиком линейной функции является прямая, а для построения прямой достаточно знать две точки графика. Заполним таблицу:

x	0	4
y	4	2

(аргументу x дали значения 0 и 4 и по формуле $y = -\frac{x}{2} + 4$ нашли соответствующие значения y). Отметим на координатной плоскости точки (0; 4) и (4; 2) и проведем через эти точки прямую (рис. 1.20).

66. Обратная пропорциональность. *Обратной пропорциональностью* называют функцию, заданную формулой

$$y = \frac{k}{x},$$

где $k \neq 0$. Число k называют *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Перечислим свойства функции $y = \frac{k}{x}$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел, кроме нуля.

2) $y = \frac{k}{x}$ — нечетная функция.

В самом деле, $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$.

3) Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$ и на промежутке $(-\infty; 0)$. Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$.

Построим график функции $y = \frac{1}{x}$. Сначала построим ветвь графика на промежутке $(0; +\infty)$. Составим таблицу значений функции:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 1.21). Это и будет ветвь графика функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Воспользовавшись нечетностью функции $y = \frac{1}{x}$, добавим к построенной ветви ветвь, симметричную ей относительно начала координат. Получим график функции $y = \frac{1}{x}$ (рис.1.22).

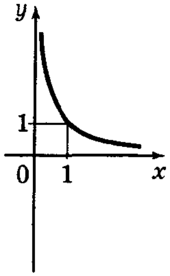


Рис. 1.21

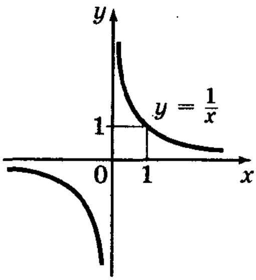


Рис. 1.22

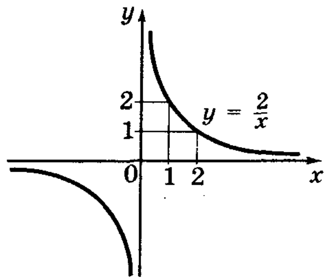


Рис. 1.23

Аналогичный вид имеет график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом положительном k. На рисунке 1.23 изображен график функции $y = \frac{2}{x}$.

Если $k < 0$, то ветви графика обратной пропорциональности расположены не в I и III координатных четвертях, как в случае, когда $k > 0$, а во II и IV. На рисунке 1.24 изображены графики функций

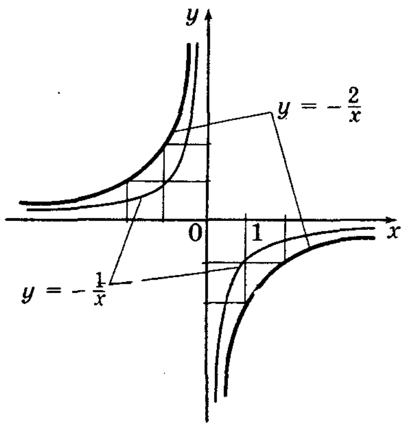


Рис. 1.24

$$y = -\frac{1}{x}, \quad y = -\frac{2}{x}.$$

График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ называют *гиперболой*.

67. Функция $y = x^2$. Перечислим свойства функции $y = x^2$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) $y = x^2$ — четная функция.

В самом деле, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

3) На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает.

В самом деле, если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $x_1^2 < x_2^2$, а это и означает возрастание функции (см. п. 64).

4) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.

В самом деле, если $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$, а потому $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, т. е. $x_1^2 > x_2^2$, а это и означает убывание функции (см. п. 64).

Графиком функции $y = x^2$ является *парабола* (см. п. 83). Этот график изображен на рисунке 1.11.

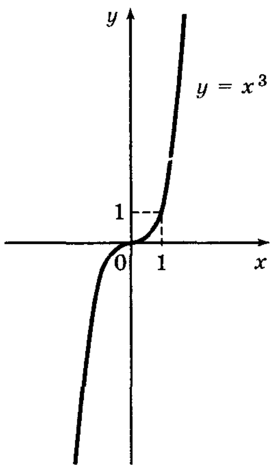


Рис. 1.25

68. Функция $y = x^3$. Перечислим свойства функции $y = x^3$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) $y = x^3$ — нечетная функция.

В самом деле, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

3) Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

График функции $y = x^3$ изображен на рисунке 1.25. Его называют *кубической параболой*.

69. Степенная функция с натуральным показателем. Функцию

$$y = x^n,$$

где n — натуральное число, называют *степенной функцией с натуральным показателем*. При $n = 1$

получаем функцию $y = x$, ее свойства рассмотрены в п. 65, а график (прямая) изображен на рисунке 1.9 (п. 60). При $n = 2$ получаем функцию $y = x^2$, ее свойства рассмотрены в п. 83, а график (парабола) изображен на рисунке 1.11 (п. 60). При $n = 3$ получаем функцию $y = x^3$, ее свойства рассмотрены в п. 68, а график (кубическая парабола) изображен на рисунке 1.25.

Пусть n — произвольное четное натуральное число, большее двух: $n = 4, 6, 8, \ldots$. В этом случае функция $y = x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^2$. График такой функции напоминает параболу $y = x^2$, только ветви графика при $|x| > 1$ тем круче идут вверх, чем больше n, а при $|x| < 1$ тем «теснее прижимаются» к оси x, чем больше n (рис. 1.26).

Пусть n — произвольное нечетное число, большее трех: $n = 5, 7, 9, \ldots$. В этом случае функция $y = x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу, только ветви графика тем круче идут вверх (при $x > 0$), вниз (при $x < 0$), чем больше n (рис. 1.27).

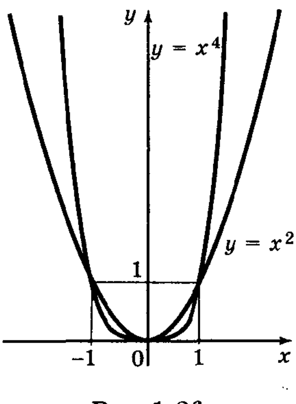


Рис. 1.26

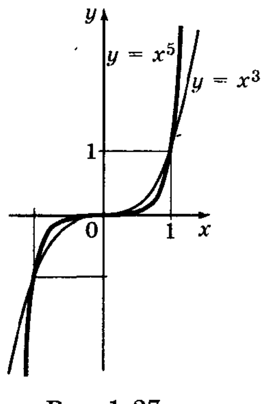


Рис. 1.27

Отметим также, что на промежутке (0; 1) график степенной функции $y = x^n$ тем медленнее отдаляется от оси x с ростом x, чем больше n.

70. Показательная функция. *Показательная функция* задается формулой $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Перечислим свойства функции $y = a^x$ при $a > 1$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) Область значений функции — промежуток $(0; +\infty)$.

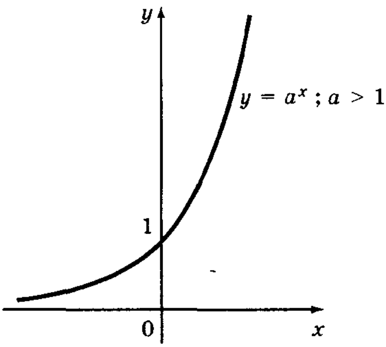


Рис. 1.28

3) Функция не является ни четной, ни нечетной. Это следует из того, что $a^{-x} \neq a^x$ и $a^{-x} \neq$ $\neq -a^x$.

4) Функция возрастает на всей числовой прямой.

График функции $y =$ $= a^x$ при $a > 1$ выглядит так, как показано на рисунке 1.28.

Пример 1. Построить график функции $y = 2^x$.

Решение. Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

С помощью найденных точек строим график функции $y = 2^x$ (рис. 1.29).

Свойства функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$:

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

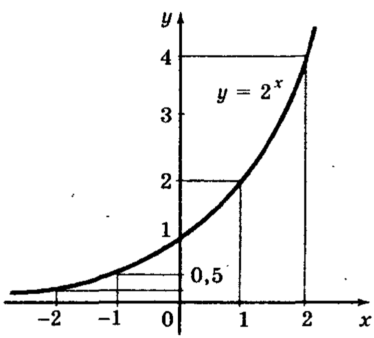


Рис. 1.29

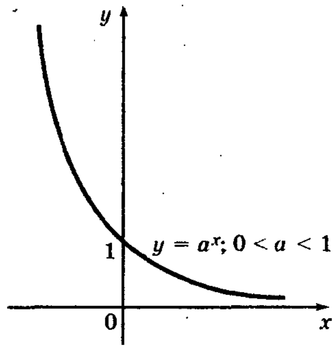


Рис. 1.30

2) Область значений — $(0; +\infty)$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Функция убывает на всей числовой прямой.

График функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ выглядит так, как показано на рисунке 1.30.

Пример 2. Построить график функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Решение. Составим таблицу:

x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

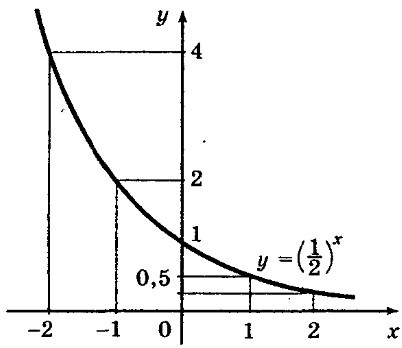


Рис. 1.31

С помощью найденных точек строим график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 1.31).

71. Обратная функция. График обратной функции. Сравним две функции: $y = f(x)$ и $y = g(x)$; их графики изображены на рисунках 1.32 и 1.33. Обе они определены на отрезке $[a; b]$ и имеют областью своих значений отрезок $[c; d]$. Первая функция обладает следующим свойством: для любого y_0 из отрезка $[c; d]$ есть только одно значение x_0 из отрезка $[a; b]$ такое, что $f(x_0) = y_0$.

Геометрически указанное выше свойство означает следующее: любая горизонтальная прямая, пересекающая ось y между точками c и d, пересекает график функции $y = f(x)$ только в одной точке. Вторая функция этим свойством не обладает: например, для значения y_1 прямая $y = y_1$ пересекает график функции $y = g(x)$ в трех точках. Значит, в первом случае при каждом фиксированном y_0 из отрезка $[c; d]$ уравнение $f(x) = y_0$ имеет только один корень x_0, а во втором случае при некоторых y, например при $y = y_1$, уравнение $g(x) = y_1$ имеет более одного корня.

Обратимся еще раз к рисункам 1.32 и 1.33. Сравнивая графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, замечаем, что $y = f(x)$ — возрастающая функция (и у нее есть обратная функция), тогда как функция $y = g(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей (и у нее нет обратной функции). Возрастание

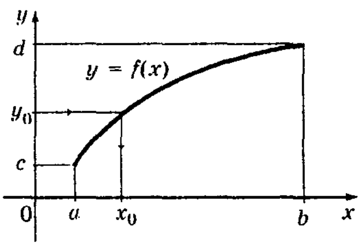


Рис. 1.32

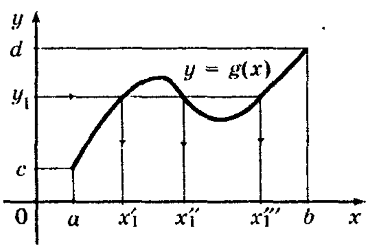


Рис. 1.33

или убывание функции обеспечивает существование обратной функции.

Пример. Доказать, что у функции $y = 2x - 1$ есть обратная, и найти ее.

Решение. Функция $y = 2x - 1$ возрастает на всей числовой прямой; значит, у нее есть обратная функция. Чтобы найти обратную функцию, надо из формулы $y = 2x - 1$ выразить x.

Получим $x = \frac{y+1}{2}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \frac{x+1}{2}$. Это и есть искомая обратная функция.

Если точка $(x; y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y; x)$ принадлежит графику обратной функции. Поэтому график обратной функции получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xy, переводящего точки $(y; x)$ в точки $(x; y)$. Этим преобразованием является преобразование осевой симметрии относительно прямой $y = x$ (ось симметрии).

Таким образом, *чтобы построить график функции, обратной к функции* $y = f(x)$, *надо график функции* $y = f(x)$ *подвергнуть преобразованию симметрии относительно прямой* $y = x$ (рис. 1.34).

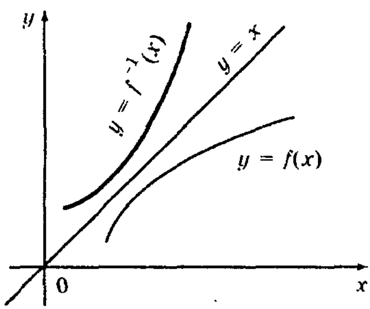


Рис. 1.34

Например, если $y = x^n$, где $x \geqslant 0$, n — натуральное, $n > 1$, то $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Графики двух взаимно обратных

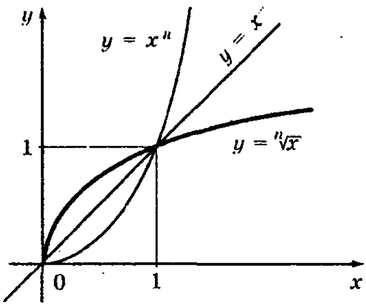


Рис. 1.35

функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 1.35).

72. Логарифмическая функция. Если функция $y = f(x)$ такова, что для любого ее значения y_0 уравнение $f(x) = y_0$ имеет относительно x единственный корень, то говорят, что функция $y = f(x)$ *обратима*.

Так, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 1.32, обратима, а функция $y = g(x)$, график которой изображен на рисунке 1.33, необратима.

Если функция $y = f(x)$ обратима, то, выразив x из формулы $y = f(x)$ и поменяв затем x и y местами, получим *обратную функцию*; ее обозначают $y = f^{-1}(x)$.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке X и областью ее значений является промежуток Y, то у нее существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает (убывает) на Y.

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, обладает всеми свойствами, которые гарантируют существование обратной функции (см. теорему 2):

1) область определения — $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений — $(0; +\infty)$;

3) функция $y = a^x$ монотонна (возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$).

Эти свойства обеспечивают существование функции, обратной к показательной, определенной на

(0; +∞) и имеющей областью своих значений множество (−∞; +∞).

Эта обратная функция обозначается так:

$$y = \log_a x$$

(читается: *«логарифм числа x по основанию a»*). Итак, *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, — это функция, обратная к показательной функции $y = a^x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами (они вытекают из теоремы 2):

1) область определения — (0; +∞);

2) область значений — (−∞; +∞);

3) функция возрастает на промежутке (0; +∞) при $a > 1$, убывает на (0; +∞) при $0 < a < 1$.

Отметим, что логарифмическая функция ни четная, ни нечетная.

График функции $y = \log_a x$ может быть получен из графика функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. На рисунке 1.36 построен график логарифмической функции для $a > 1$, а на рисунке 1.37 — для $0 < a < 1$.

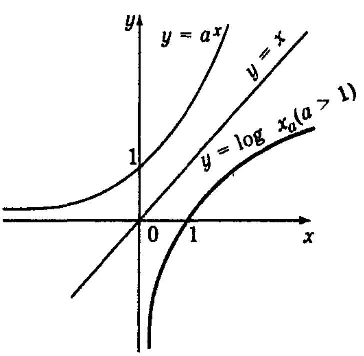


Рис. 1.36

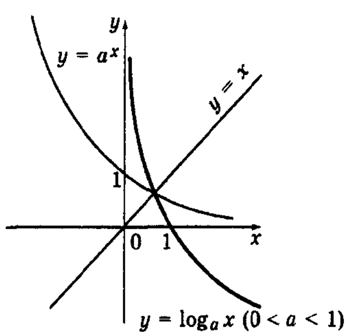


Рис. 1.37

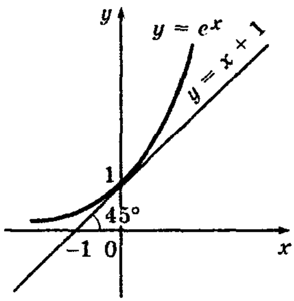


Рис. 1.38

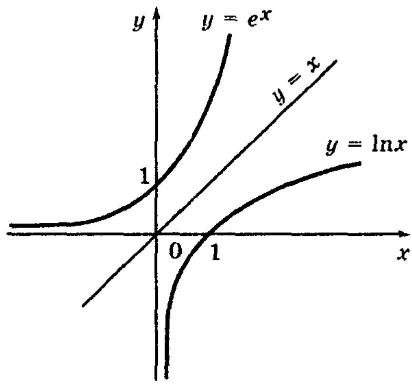


Рис. 1.39

73. Число *e*. Функция $y = e^x$. Функция $y = \ln x$. Среди показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, особый интерес для математики и ее приложений представляет функция, обладающая следующим свойством: касательная к графику функции (см. п. 151) в точке (0; 1) образует с осью x угол 45°(рис. 1.38). Основание a такой показательной функции принято обозначать буквой e. Подсчитано, что $e = 2{,}7182818284590...$, и установлено, что e — иррациональное число.

Логарифмическую функцию, обратную показательной функции $y = e^x$, т. е. функцию $y = \log_e x$, принято обозначать $y = \ln x$ (ln читается «*натуральный логарифм*»). Графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 1.39).

74. Числовая окружность. Пусть дана окружность радиуса 1. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

1) если $t = 0$, то ему соответствует точка A — правый конец горизонтального диаметра;

2) если $t > 0$, то, отправляясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь длины t; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$ (рис. 1.40);

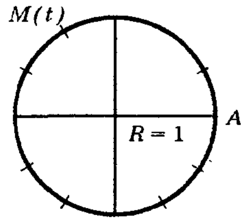


Рис. 1.40

3) если $t < 0$, то, отправляясь из точки A в направлении по часовой стрелке, опишем по окружности путь длины $|t|$; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности.

Единичную окружность с установленным соответствием называют *числовой окружностью*.

Если точка M соответствует числу t, то она соответствует любому числу вида $t + 2\pi k$, где 2π — длина единичной окружности, а k — целое число ($k \in \mathbb{Z}$), показывающее количество полных обходов окружности в положительном или отрицательном направлении.

На рисунках 1.41 и 1.42 представлены два основных макета числовой окружности.

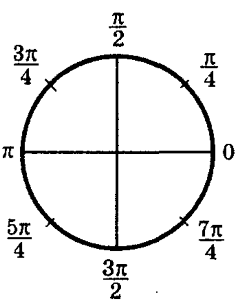


Рис. 1.41

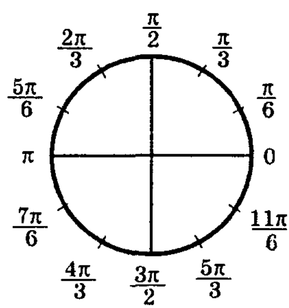


Рис. 1.42

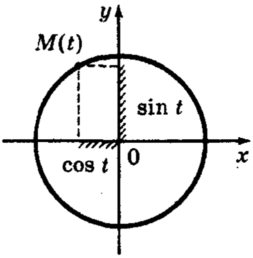


Рис. 1.43

75. Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Поместим единичную числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат так, чтобы центр окружности совпал с началом координат (рис. 1.43). Если $M(t)$ — точка числовой окружности, соответствующая числу t, то ординату точки M называют *синусом числа* t и обозначают $\sin t$; абсциссу точки M называют *косинусом числа* t и обозначают $\cos t$; отношение $\frac{\sin t}{\cos t}$, где $\cos t \neq 0$, называют *тангенсом числа* t и обозначают $\operatorname{tg} t$; отношение $\frac{\cos t}{\sin t}$, где $\sin t \neq 0$, называют *котангенсом числа* t и обозначают $\operatorname{ctg} t$.

Функции

$$u = \sin t,\; u = \cos t,\; u = \operatorname{tg} t,\; u = \operatorname{ctg} t$$

называют *тригонометрическими функциями*. На практике переходят к более привычным обозначениям $y = \sin x$, $y = \cos x$ и т. д.

Основные значения тригонометрических функций приведены в таблице 1.

Таблица 1

Функция	Аргумент						
	$0\ (0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	π $(180°)$	$\frac{3\pi}{2}$ $(270°)$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0

Функция	Аргумент						
	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)
tg t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
ctg t	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

76. Знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности. Знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности схематически представлены на рисунке 1.44.

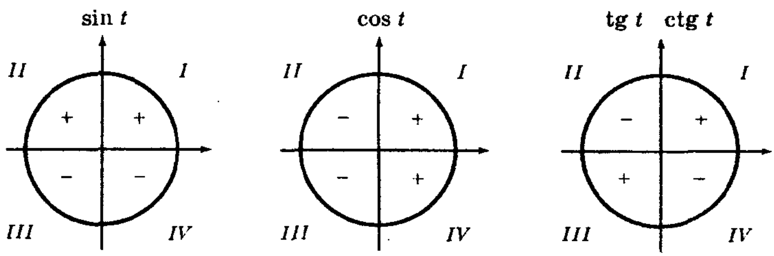


Рис. 1.44

77. Свойства тригонометрических функций.

1. Функции $\sin t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ — нечетные:

$$\sin(-t) = -\sin t;$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

2. Функция $\cos t$ — четная:

$$\cos(-t) = \cos t.$$

3. Функции $\sin t$, $\cos t$ — периодические, 2π — основной период:

$$\sin(t \pm 2\pi k) = \sin t;$$
$$\cos(t \pm 2\pi k) = \cos t,$$

где k — любое целое число.

4. Функции $y = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{ctg} t$ — периодические, π — основной период:

$$\operatorname{tg}(t \pm \pi k) = \operatorname{tg} t;$$
$$\operatorname{ctg}(t \pm \pi k) = \operatorname{ctg} t,$$

где k — любое целое число.

78. Свойства и график функции $y = \sin x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел.

2) Область значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Функция периодическая; основной период равен 2π.

4) Функция нечетная.

5) Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 1.45).

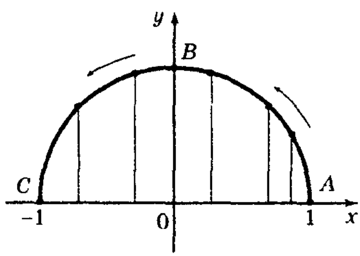


Рис. 1.45

Взяв контрольные точки $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $(\pi; 0)$, построим полуволну — график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 1.46). Так как функция $y = \sin x$ нечетная, то, выполнив симметрию построенного графика относительно начала коорди-

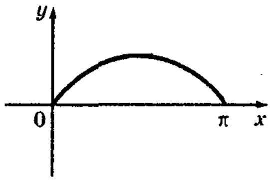


Рис. 1.46

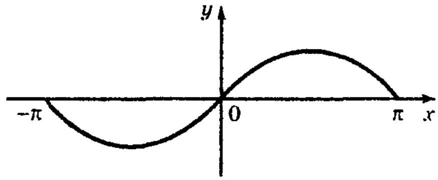


Рис. 1.47

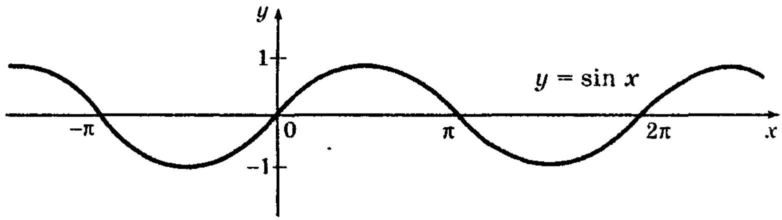


Рис. 1.48

нат, получим график функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 1.47). Наконец, воспользовавшись периодичностью функции $y = \sin x$, можно построить график на всей области определения (рис. 1.48).

79. Свойства и график функции $y = \cos x$.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел.

2) Область значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Функция периодическая с основным периодом 2π.

4) Функция четная.

5) Функция убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ и возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$.

График функции $y = \cos x$ изображен на рисунке 1.49.

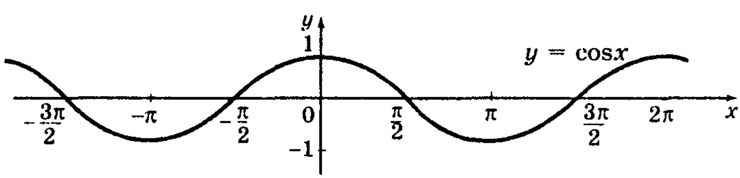


Рис. 1.49

80. Свойства в график функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
2) Область значений — вся числовая прямая.
3) Функция периодическая с основным периодом π.
4) Функция нечетная.
5) Функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

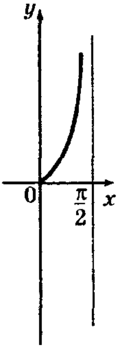


Рис. 1.50

Выбрав несколько контрольных точек: (0; 0), $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$ — построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 1.50). Воспользовавшись нечетностью функции $y = \operatorname{tg} x$, построим график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 1.51). Наконец, воспользовавшись периодичностью функции $y = \operatorname{tg} x$, построим график на всей области определения (рис. 1.52).

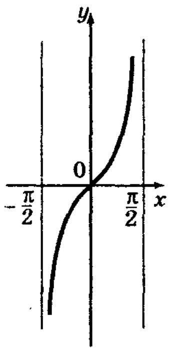


Рис. 1.51

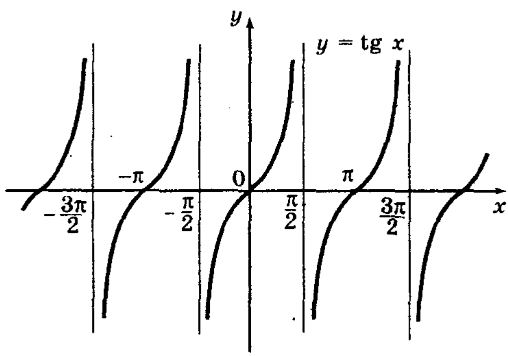


Рис. 1.52

81. Свойства и график функции $y = \text{ctg}\, x$.

1) Область определения функции: $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

2) Область значений функции — вся числовая прямая.

3) Функция периодическая с основным периодом π.

4) Функция нечетная.

5) Функция $y = \text{ctg}\, x$ убывает на промежутках $(\pi n; \pi + \pi n)$.

График функции $y = \text{ctg}\, x$ изображен на рисунке 1.53.

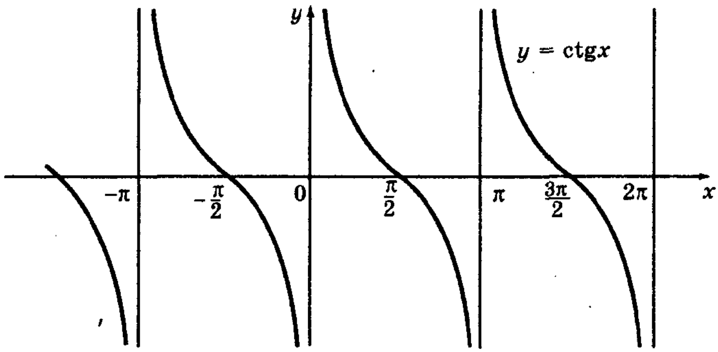


Рис. 1.53

§ 10. Преобразования графиков

82. Построение графика функции $y = mf(x)$.

З а д а ч а 1. Построить график функции $y = mf(x)$, где $m > 0$, $m \neq 1$, если задан график функции $y = f(x)$.

Р е ш е н и е. Ординаты точек графика функции $y = mf(x)$ получаются умножением на m соответствующих ординат точек графика функции $y = f(x)$. Такое преобразование графика функции $y = f(x)$ называют его *растяжением от оси x с коэффициентом m*, если $m > 1$, *и сжатием к оси x*, если $0 < m < 1$.

Задача 2. Построить график функции $y = -f(x)$, если задан график функции $y = f(x)$.

Решение. При одном и том же значении x ординаты точек графика функции $y = f(x)$ и графика функции $y = -f(x)$ отличаются только знаком. Значит, график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ преобразованием симметрии последнего относительно оси x (рис. 1.54).

На рисунке 1.55 изображены графики функций $y = 10^x$ и $y = -10^x$.

Задача 3. Построить график функции $y = mf(x)$, где $m < 0$, $m \neq -1$, если задан график функции $y = f(x)$.

Решение. Так как $mf(x) = -|m|\, f(x)$, то график функции $y = mf(x)$ может быть получен при помощи растяжения (сжатия) графика функции $y = f(x)$ от оси x с коэффициентом $|m|$ и последующим преобразованием симметрии относительно оси x (см. задачи 1 и 2).

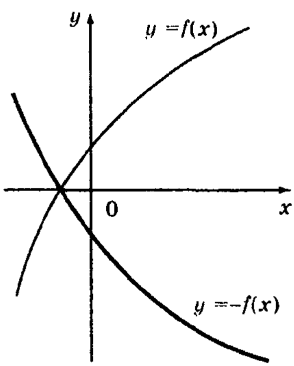


Рис. 1.54

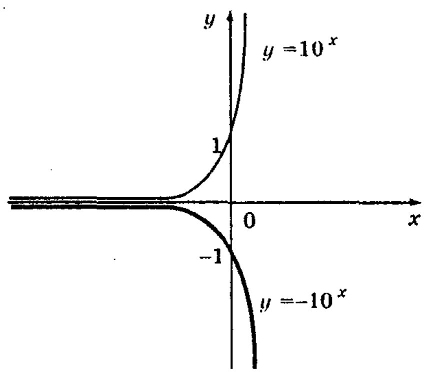


Рис. 1.55

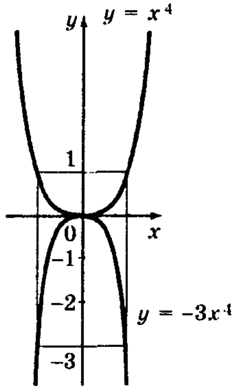


Рис. 1.56

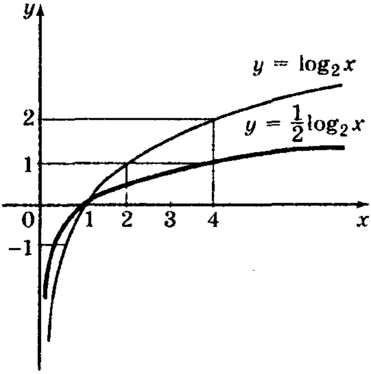


Рис. 1.57

На рисунке 1.56 изображены графики функций $y = x^4$ и $y = -3x^4$, а на рисунке 1.57 — графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \frac{1}{2}\log_2 x$.

83. Графики функций $y = ax^2$, $y = ax^3$. Графиком функции $y = x^2$ является парабола. Чтобы построить график функции $y = ax^2$, нужно осуществить растяжение (сжатие) параболы $y = x^2$ от оси x с коэффициентом $|a|$; при этом если $a < 0$, то график функции $y = |a|x^2$ нужно еще подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x (см. п. 82).

На рисунке 1.58 изображены графики функции $y = ax^2$ для a, равного 1; −1; 3; $-\frac{1}{2}$. Все эти графики называют *параболами*. При $a > 0$ ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2$, направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Аналогично, зная график функции $y = x^3$, можно построить график функции вида $y = ax^3$. На рисунке 1.59 изображены эти графики для случаев a, равного 1; −1; 3.

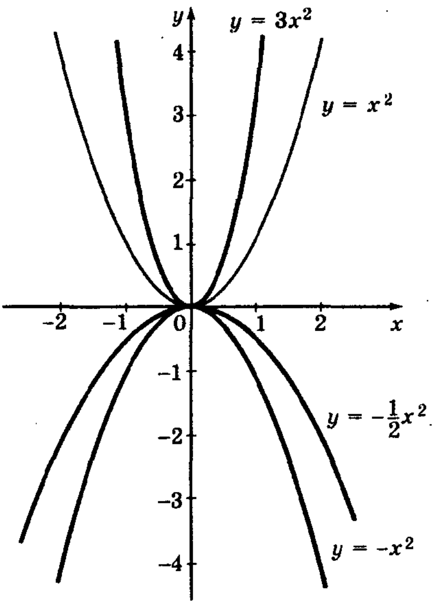


Рис. 1.58

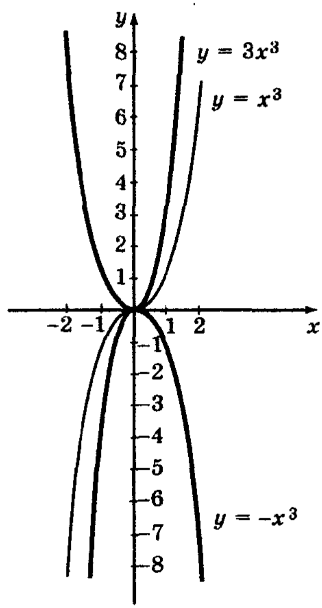


Рис. 1.59

84. Построение графика функции $y = f(x - m) + n$. Пусть известен график функции $y = f(x)$, а построить нужно график функции $y = f(x - m) + n$.

Чтобы его построить, нужно:

1) выполнить параллельный перенос плоскости, выбрав началом новой системы координат $x'y'$ точку O' $(m; n)$;

2) в плоскости $x'y'$ построить график функции $y' = f(x')$.

Пример. Построить график функции $y = \sqrt{x-2} + 4$.

Решение. 1) Выполним параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку O' $(2; 4)$.

2) В плоскости $x'y'$ построим график функции $y' = \sqrt{x'}$. Это и есть требуемый график (рис. 1.60).

На рисунке 1.61, а изображены графики функций $y = f(x)$, $y = f(x) - 2$, $y = f(x) + 3$, а на рисунке 1.62 — графики функций $y = f(x)$, $y = f(x - 2)$, $y = f(x + 3)$.

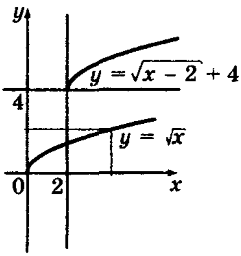


Рис. 1.60

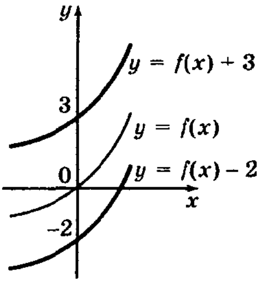


Рис. 1.61

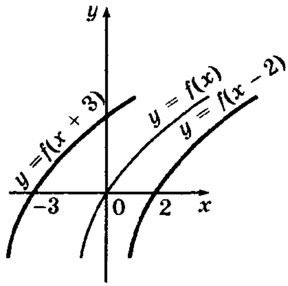


Рис. 1.62

85. График квадратичной функции. *Квадратичной функцией* называют функцию

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — любые действительные числа, причем $a \neq 0$. Для построения графика этой функции выполним следующие преобразования квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак, $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Для построения графика функции $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ нужно (см. п. 84) выполнить параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку $O'\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$, и в плоскости $x'y'$ построить параболу — график функции $y' = a\,(x')^2$. Прямая $x = -\dfrac{b}{2a}$ является *осью симметрии параболы*, служащей графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, а точка $O'\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ — точка пересечения параболы с ее осью симметрии — является *вершиной параболы*.

Если $a > 0$, то ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, направлены вверх (рис. 1.63); в этом случае функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 1.64); в этом случае функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

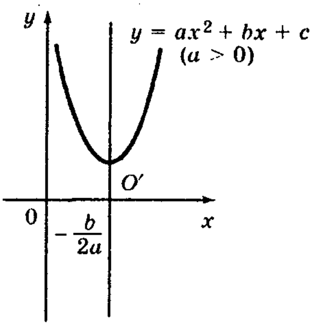


Рис. 1.63

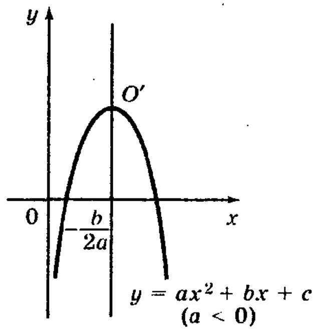


Рис. 1.64

Пример. Построить график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$.

Решение. Имеем: $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 = \frac{1}{2}(x^2 + 8x) + 5 = \frac{1}{2}((x^2 + 8x + 16) - 16) + 5 = \frac{1}{2}(x + 4)^2 - 3.$
Выполним параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку $O'(-4; -3)$, и построим в координатной плоскости $x'y'$ параболу — график функции $y' = \frac{1}{2}(x')^2$.

Это и есть график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$ (рис. 1.65).

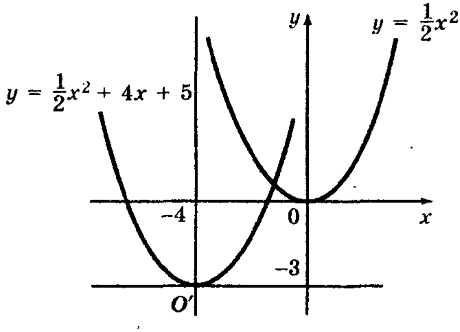


Рис. 1.65

86. Способы построения графика квадратичной функции. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является парабола (см. п. 85). Для ее построения на практике используют три способа.

Способ 1-й. *Отыскание координат вершины параболы по формулам:*

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Пример 1. Построить график функции

$$y = 2x^2 - 4x + 1.$$

Решение. Здесь $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$. Значит,

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 1, \; y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -1.$$

Итак, $(1; -1)$ — вершина параболы. Для построения графика функции $y = 2x^2 - 4x + 1$ надо знать координаты еще нескольких точек:

x	0	2	3
y	1	1	7

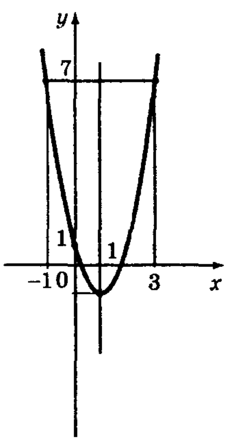


Рис. 1.66

Отметив вершину параболы, точки $(0; 1)$, $(2; 1)$, $(3; 7)$ и точку $(-1; 7)$, симметричную точке $(3; 7)$ относительно прямой $x = 1$ — оси параболы, строим требуемый график (рис. 1.66). Заметим, что запоминать формулы координат вершины параболы не следует. Достаточно воспользоваться тем, что если x_0 — абсцисса вершины параболы, то в этой точке $y'(x_0) = 0$ (см. п. 153). Из уравнения $(ax^2 + bx + c)' = 0$, т. е. $2ax + b = 0$, находим $x = -\dfrac{b}{2a}$ — это абсцисса вершины параболы.

Способ 2-й. *Построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$.

Пример 2. Построить график функции

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

Решение. Найдем точки графика, имеющие ординату, равную свободному члену квадратного трехчлена, т. е. равную пяти. Для этого решим уравнение $x^2 - 4x + 5 = 5$:

$$x^2 - 4x = 0,\ x(x - 4) = 0, \text{ откуда } x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Мы нашли две точки графика: $A(0; 5)$ и $B(4; 5)$. Отметим их на координатной плоскости (рис. 1.67). Мы знаем, что графиком является парабола. Точки A и B лежат на этой параболе и имеют одинаковую ординату. Значит, точки A и B симметричны относительно оси симметрии параболы, а потому ось симметрии параболы проходит перпендикулярно отрезку AB через его середину. Так как абсцисса точки A равна нулю, а абсцисса точки B равна четырем, то уравнение оси параболы $x = 2$. Подставив значение $x = 2$ в формулу $y = x^2 - 4x + 5$, получим $y = 4 - 8 + 5 = 1$. Значит, вершина C параболы, т. е. единственная точка параболы, лежащая на ее оси симметрии, имеет координаты $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Отметив на координатной плоскости точку $C(2; 1)$, построим параболу, проходящую через три точки: A, B, C. Это и будет график функции $y = x^2 - 4x + 5$ (рис. 1.67). Для более точного по-

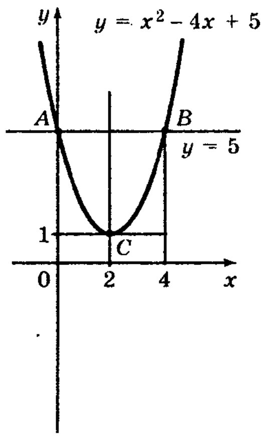


Рис. 1.67

строения можно найти координаты еще нескольких точек и построить их.

Способ 3-й. *Построение параболы по корням квадратного трехчлена.*

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (о решении уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ см. п. 104). Тогда парабола, служащая графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, пересекает ось абсцисс в точках $A(x_1; 0)$ и $B(x_2; 0)$, а ось симметрии параболы проходит перпендикулярно отрезку AB через его середину. Зная абсциссу x_0 вершины C параболы $\left(\text{точка } C \text{ лежит на оси симметрии параболы, поэтому } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, найдем по формуле $y = ax^2 + bx + c$ ее ординату, а затем построим параболу по трем точкам: A, B, C.

Пример 3. Построить график функции

$$y = -x^2 + 6x - 5.$$

Решение. Из уравнения $-x^2 + 6x - 5 = 0$ находим $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Значит, мы знаем две точки искомой параболы: $A(1; 0)$ и $B(5; 0)$. Уравнение оси симметрии параболы таково: $x = 3$. Подставив значение 3 вместо x в формулу $y = -x^2 + 6x - 5$, находим $y = 4$. Значит, вершиной параболы служит точка $C(3; 4)$. По трем точкам A, B и C строим параболу — график функции $y = -x^2 + 6x - 5$ (рис. 1.68).

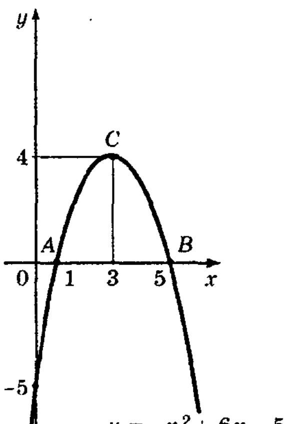


Рис. 1.68

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 11. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком логарифма

87. Понятие трансцендентного выражения. *Трансцендентным выражением* называют выражение, содержащее переменные под знаком трансцендентной функции, т. е. под знаком показательной, логарифмической, тригонометрических или обратных тригонометрических функций. Примеры трансцендентных выражений:

$$\log_2 a + \log_2 b; \quad \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma; \quad \arcsin(x^2 - x).$$

88. Определение логарифма положительного числа. Натуральные логарифмы. *Логарифмом* положительного числа x по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число x:

$$a^{\log_a x} = x.$$

Равенство $\log_a x = y$ означает, что $a^y = x$.

Например, $\log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$; $\log_{10} 0{,}001 = -3$, так как $10^{-3} = 0{,}001$; $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

В записи $\log_a x$ число a — *основание логарифма*, x — *логарифмируемое число*.

Из определения логарифма вытекают следующие важные равенства:

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1.$$

Первое следует из того, что $a^0 = 1$, а второе — из того, что $a^1 = a$.

Вообще имеет место равенство

$$\log_a a^r = r.$$

Если основание логарифма равно числу e (см. п. 73), то логарифм называют *натуральным*. Вместо записи $\log_e x$ принята запись $\ln x$.

Справедливы равенства:

$$\ln 1 = 0;$$

$$\ln e = 1;$$

$$e^{\ln x} = x \quad (\text{для } x > 0).$$

Пример*. Вычислите значение выражения

$$10 + 2\log_5 \frac{1}{25}.$$

Решение. $10 + 2\log_5 \frac{1}{25} = 10 + 2 \cdot (-2) = 6.$

89. Свойства логарифмов.

1°. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

(*логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей*).

Например, $\log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$.

2°. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

(*логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя*).

Например, $\log_2 1{,}25 = \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 5 - 2$.

Если $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, то написать

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

нельзя, так как правая часть такого «равенства» не имеет смысла (логарифм отрицательного числа не существует). Здесь можно рассуждать так: x_1 и x_2 — отрицательные числа, следовательно, $x_1 x_2 > 0$. Но тогда $x_1 x_2 = |x_1 x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$. Значит, $\log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| \cdot |x_2|$.

Так как $|x_1| > 0$ и $|x_2| > 0$, то, применив свойство 1°, получим

$$\log_a |x_1| \cdot |x_2| = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|.$$

Итак, если $x_1 x_2 > 0$, то

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$$

и, аналогично

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|.$$

3°. Если $x > 0$, то

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

(*логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени*).

Например, $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4\log_5 3$;

$$\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_3 2.$$

Пример. Вычислить $\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, если $\log_2 3 = a$.

Решение.

$$\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \log_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(\log_2 3 - \log_2 4) = \frac{1}{3}(a-2).$$

Справедливо следующее утверждение: *если k — четное число, то $\log_a x^k = k\log_a |x|$ для любого $x \neq 0$.*

Например, $\log_2 x^4 = 4\log_2 |x|$; $\log_3 x^2 = 2\log_3 |x|$.

90. Переход к новому основанию логарифма. Справедливы следующие два свойства, позволяющие перейти к новому основанию логарифма:

1°. Если $x > 0$, то

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(*формула перехода к новому основанию*).

Например, $\log_2 3 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}$; $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$; $\log_5 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln 5}$.

2°. Если $x > 0$, то

$$\log_a x = \log_{a^k} x^k.$$

Например, $\log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$.

Пример 1. Вычислить $\log_5 6$, если $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = b$.

Решение. Перейдем в $\log_5 6$ к основанию 2:

$$\log_5 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 5} = \frac{\log_2(2\cdot 3)}{\log_2 \frac{10}{2}} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 10 - \log_2 2} = \frac{1+a}{b-1}.$$

Пример 2. Вычислить $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[6]{32}$.

Решение. Согласно свойству 2° основание логарифма и логарифмируемое число можно возвести в одну и ту же степень, при этом числовое значение выражения не изменится:

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[6]{32} = \log_{(\sqrt[3]{2})^3} (\sqrt[6]{32})^3 = \log_2 \sqrt{32} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}.$$

91. Логарифмирование и потенцирование. Если некоторое выражение A составлено из положительных чисел с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы входящих в выражение A чисел. Такое преобразование называют *логарифмированием*.

Пример 1. Прологарифмировать по основанию 5 выражение $\frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}$, где a, b, c — положительные числа.

Решение. Используя свойства логарифмов (см. п. 89), получим

$$\log_5 \frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}} = \log_5 (125a^3b^2) - \log_5 \sqrt{c} =$$

$$= \log_5 125 + \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3 + 3\log_5 a + 2\log_5 b - \frac{1}{2}\log_5 c.$$

Часто приходится решать обратную задачу: находить выражение по его логарифму. Такое преобразование называют *потенцированием*.

Пример 2. Найти x, если

$$\log_3 x = 2\log_3 5 + \frac{1}{2}\log_3 8 - 3\log_3 10.$$

Решение.

$$\log_3 x = \log_3 25 + \log_3 8^{\frac{1}{2}} - \log_3 10^3 = \log_3 \frac{25 \cdot 2\sqrt{2}}{1000} =$$

$$= \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}.$$

Из равенства $\log_3 x = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}$ находим, что $x = \frac{\sqrt{2}}{20}$.

92. Десятичный логарифм. Если основание логарифма равно 10, то логарифм называют *десятичным*. Вместо записи $\log_{10} x$ принята запись $\lg x$.

§ 12. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

93. Тригонометрические выражения. Выражение, в котором переменная содержится под знаками тригонометрических функций, называют *тригонометрическим*. Для преобразования тригонометрических выражений используют свойства тригонометрических функций, отмеченные в п. 76—81, и формулы тригонометрии, указанные ниже в п. 93—100.

94. Формулы сложения и вычитания аргументов.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \quad (4)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}, \quad (5)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}. \quad (6)$$

Формулы (1)—(4) справедливы для любых α, β.

Формула (5) верна при α, β, $\alpha + \beta$, отличных от $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Формула (6) верна при α, β, $\alpha - \beta$, отличных от $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$.

Решение. Имеем $\sin 75° = \sin(30° + 45°)$. Воспользовавшись формулой (3) при $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, получим

$$\sin(30° + 45°) = \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°.$$

Известно, что $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. п. 99). Значит, $\sin(30° + 45°) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Итак, $\sin 75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$.

Пример 2. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

Решение. Воспользуемся формулой (5) и учтем, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7.$$

95. Формулы приведения. Под *формулами приведения* понимают обычно формулы, сводящие значение тригонометрической функции аргумента вида $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha$, $n\in \boldsymbol{Z}$, к функции аргумента α.

Пусть, например, нужно вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=1\cdot\cos\alpha+$$
$$+0\cdot\sin\alpha=\cos\alpha.$$

Подобным же образом выводятся и остальные формулы приведения. Эти формулы даны в следующей таблице:

Функция	**Аргумент t**						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

96. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Если в формуле (2) из п. 125 положить $\alpha = \beta = t$, то получим

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \qquad (1)$$

откуда, в свою очередь, находим, что

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \qquad (2)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}. \qquad (3)$$

Тождество (2) справедливо при $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, а тождество (3) — при $t \neq \pi n$, $n \in Z$.

Равенства (1), (2), (3) связывают между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента. Известны еще два равенства, связывающие между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \ \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Перемножая эти равенства, получаем равенство

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \qquad (4)$$

справедливое при $t \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

П р и м е р 1. Известно, что $\sin t = -\frac{3}{5}$, причем $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Р е ш е н и е. Из формулы (1) получаем $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$. Подставив вместо $\sin t$ его значение, получим

$$\cos^2 t = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Итак, $\cos^2 t = \frac{16}{25}$; значит, либо $\cos t = \frac{4}{5}$, либо $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, т. е. аргумент t принадлежит III четверти. Но в III четверти косинус отрицателен; значит, из двух указанных выше возможностей выбираем одну: $\cos t = -\frac{4}{5}$.

Зная $\sin t$ и $\cos t$, находим $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}.$$

Итак, $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 2•. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Согласно основному тригонометрическому тождеству $1 - \cos^2 x = \sin^2 x = \frac{16}{25}$, следовательно, $5(1 - \cos^2 x) = \sin^2 x = \frac{16}{5} = 3{,}2$.

97. Формулы двойного аргумента. Если в формулах (3), (1), (5) из п. 94 положить $\alpha = t$, $\beta = t$, то получим следующие тождества:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \tag{1}$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}. \tag{3}$$

С помощью формул (1), (2) и (3) можно выразить синус, косинус, тангенс любого (допустимого) аргумента через тригонометрические функции вдвое меньшего аргумента. Например, справедливы следующие равенства:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$\cos 8t = \cos^2 4t - \sin^2 4t.$$

В ряде случаев полезным оказывается использование полученных формул «справа налево», т. е. замена выражения $2\sin t\cos t$ выражением $\sin 2t$ $\left(\text{или выражения } \sin t\cos t \text{ — выражением } \frac{\sin 2t}{2}\right)$, выражения $\cos^2 t - \sin^2 t$ — выражением $\cos 2t$ и, наконец, выражения $\frac{2\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}^2 t}$ — выражением $\operatorname{tg} 2t$.

Пример. Упростить выражение $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t$.

Решение. $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin t\cos t} = -\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\frac{1}{2}\sin 2t} = -2\frac{\cos 2t}{\sin 2t} = -2\operatorname{ctg} 2t$.

98. Формулы понижения степени. Зная, что $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (см. п. 96), а $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ (см. п. 128), находим, что

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}; \qquad (1)$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) называют *формулами понижения степени.*

99. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

100. Преобразование произведений тригонометрических функций в сумму.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}, \quad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}, \quad (2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}. \quad (3)$$

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 13. Уравнения с одной переменной

101. Определение уравнения. Корни уравнения. Равенство с переменной $f(x) = g(x)$ называют *уравнением с одной переменной* x, если поставлена задача найти все те же значения x, при которых равенство с переменной обращается в верное числовое равенство. Всякое значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называют *корнем уравнения.*

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Пример 1. Уравнение $3 + x = 7$ имеет единственный корень 4, так как при этом и только при этом значении переменной равенство $3 + x = 7$ является верным.

Пример 2. Уравнение $(x - 1)(x - 2) = 0$ имеет два корня: 1 и 2.

Пример 3. Уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

102. Равносильность уравнений. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют *равносильными.* Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, уравнения $x + 2 = 5$ и $x + 5 = 8$ равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень — число 3. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $2x^2 + 5 = 0$ — ни одно из них не имеет корней.

Уравнения $x - 5 = 1$ и $x^2 = 36$ неравносильны, так как первое имеет только один корень 6, тогда как второе имеет два корня: 6 и -6.

В процессе решения уравнения его стараются заменить более простым, но равносильным данному. Поэтому важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в равносильное ему уравнение.

Теорема 1. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $x^2 + 2 = 3x$ равносильно уравнению $x^2 + 2 - 3x = 0$.

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $\frac{x^2 - 1}{3} = 2x$ равносильно уравнению $x^2 - 1 = 6x$ (обе части первого уравнения мы умножили на 3).

103. Линейные уравнения. *Линейным уравнением с одной переменной* x называют уравнение вида

$$ax = b,$$

где a и b — действительные числа; a называют *коэффициентом при переменной*, b — *свободным членом*.

Для линейного уравнения $ax = b$ могут представиться три случая:

1) $a \neq 0$; в этом случае корень уравнения равен $\frac{b}{a}$;

2) $a = 0$, $b = 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x, т. е. корнем уравнения служит любое действительное число;

3) $a = 0$, $b \neq 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$, оно не имеет корней.

Многие уравнения в результате преобразований сводятся к линейным.

104. Квадратные уравнения. Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$, называют *квадратным уравнением*. Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют *приведенным*, если $a \neq 1$, то *неприведенным*. Коэффициенты a, b, c имеют следующие названия: a — *первый коэффициент*, b — *второй коэффициент*, c — *свободный член*. Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения (1). Если $D < 0$, то *уравнение* (1) *не имеет действительных корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня.*

В случае, когда $D = 0$, иногда говорят, что квадратное уравнение имеет два одинаковых корня.

Используя обозначение $D = b^2 - 4ac$, можно переписать формулу (2) в виде $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если $b = 2k$, то формулу (2) можно упростить:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Итак,

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ где } k = \frac{b}{2}. \qquad (3)$$

Формула (3) особенно удобна, если $\frac{b}{2}$ — целое число, т. е. коэффициент b — четное число.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$. Имеем:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9.$$

Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня, которые найдем по формуле (2):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

Итак, $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$, $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$, т. е. $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ — корни заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Решение. Здесь $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$. По формуле (3) находим $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 9 \cdot 1}}{1} = \frac{3 \pm 0}{1} = 3$, т. е. $x = 3$ — единственный корень уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$; $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31$. Так как $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

105. Неполные квадратные уравнения. Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение называют *неполным*. Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения — проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 5x = 0$.

Решение. Имеем: $x(2x - 5) = 0$. Значит, либо $x = 0$, либо $2x - 5 = 0$, т. е. $x = 2{,}5$.

Итак, уравнение имеет два корня: 0 и 2,5.

Пример 2. Решить уравнение $2x^2 + 5 = 0$.

Решение. Так как $2x^2 + 5 > 0$ при любых x, то уравнение $2x^2 + 5 = 0$ не имеет корней.

106. Теорема Виета.

Теорема 3. Если приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, т. е.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p, \\ x_1 x_2 &= q \end{aligned} \qquad (1)$$

(*сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену*).

Теорема 4. Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Эта теорема позволяет в ряде случаев находить корни квадратного уравнения без использования формулы корней.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0$.

Решение. Попробуем найти два числа x_1 и x_2 такие, что

$$x_1 + x_2 = 9,$$
$$x_1 x_2 = 14.$$

Такими числами являются 2 и 7. По теореме 4, они и служат корнями заданного квадратного уравнения.

107. Системы и совокупности уравнений. Рассмотрим уравнение

$$(x^2 - 1)^2 + ((x - 1)(x - 2))^2 = 0.$$

Ясно, что $(x^2 - 1)^2 \geqslant 0$ и $((x - 1)(x - 2))^2 \geqslant 0$, а сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Поэтому сначала надо решить уравнения $(x^2 - 1)^2 = 0$ и $((x - 1)(x - 2))^2 = 0$, а затем найти их общие корни. Корнями уравнения $(x^2 - 1)^2 = 0$ служат числа 1 и -1, а корнями уравнения $((x - 1)(x - 2))^2 = 0$ — числа 1 и 2. Общим является число 1 — это корень исходного уравнения.

В том случае, когда нужно найти значения переменной, удовлетворяющие обоим заданным уравнениям, говорят, что задана *система уравнений*. Для обозначения системы используют фигурную скобку:

$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ ((x - 1)(x - 2))^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь уравнение $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$. Произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел равно нулю. Поэтому сначала надо решить уравнения $x^2 - 1 = 0$ и $x^2 - 4 = 0$, а затем объединить их корни. Корнями первого уравнения являются числа 1 и -1, а корнями второго — числа 2 и -2. Значит, $1, -1, 2, -2$ — корни исходного уравнения.

Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность уравнений*, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является корнем хотя бы одного из данных уравнений. Для обозначения совокупности иногда используют квадратную скобку:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 - 4 = 0. \end{array}\right.$$

108. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

Пример 1. Решить уравнение $|3x - 5| = 2$.

Решение. Если $|a| = 2$, то либо $a = 2$, либо $-a = 2$. Это значит, что заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $3x - 5 = 2$; $-(3x - 5) = 2$. Из уравнения $3x - 5 = 2$ находим $x_1 = \frac{7}{3}$; из уравнения $-(3x - 5) = 2$ находим $x_2 = 1$.

Итак, уравнение имеет два корня. $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 1$.

Пример 2. Решить уравнение $|2x - 8| = 3x + 1$.

Решение. Способ 1-й. Если $2x - 8 \geqslant 0$, то $|2x - 8| = 2x - 8$ и данное уравнение примет вид $2x - 8 = 3x + 1$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} 2x - 8 \geqslant 0, \\ 2x - 8 = 3x + 1. \end{cases}$$

Из уравнения $2x - 8 = 3x + 1$ находим $x = -9$. Однако при этом значении переменной неравенство $2x - 8 \geqslant 0$ не выполняется; значит, найденное значение не может быть корнем данного уравнения.

Если $2x - 8 < 0$, то $|2x - 8| = -(2x - 8)$ и данное уравнение примет вид $8 - 2x = 3x + 1$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} 2x - 8 < 0, \\ 8 - 2x = 3x + 1. \end{cases}$$

Из уравнения $8 - 2x = 3x + 1$ находим $x = \frac{7}{5}$. Неравенство $2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right) - 8 < 0$ верно; значит, $x = \frac{7}{5}$ — корень данного уравнения.

Способ 2-й. Так как $3x + 1 = |2x - 8|$, должно выполняться условие $3x + 1 \geqslant 0$. Так как уравнение $|f(x)| = a$, где $a > 0$, сводится к совокупности уравнений $f(x) = a$; $f(x) = -a$, то получаем

$$2x - 8 = 3x + 1; \quad 2x - 8 = -(3x + 1).$$

Из первого уравнения находим $x = -9$, из второго $x = \frac{7}{5}$. Из найденных двух значений неравенству $3x + 1 \geqslant 0$ удовлетворяет второе значение и не удовлетворяет первое. Значит, $x = \frac{7}{5}$ — единственный корень уравнения.

Уравнение вида $|x - a| = b$ можно решать геометрически (см. п. 23).

109. Понятие следствия уравнения. Посторонние корни.

Пусть даны два уравнения:

$$f_1(x) = g_1(x), \tag{1}$$

$$f_2(x) = g_2(x). \tag{2}$$

Если каждый корень уравнения (1) является одновременно и корнем уравнения (2), то уравнение (2) называют *следствием уравнения* (1). Равносильность уравнений означает, что каждое из уравнений является следствием другого.

В процессе решения уравнения часто приходится применять такие преобразования, которые приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но кроме них уравнение-следствие может иметь и такие решения, которые не являются корнями исходного уравнения; это так называемые *посторонние* корни. Чтобы выявить и отсеять посторонние корни, обычно поступают так: все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение.

Если при решении уравнения мы заменили его уравнением-следствием, то указанная выше проверка является неотъемлемой частью решения уравнения. Поэтому важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в уравнение-следствие.

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = g(x) \tag{3}$$

и умножим обе его части на одно и то же выражение $h(x)$, имеющее смысл при всех значениях x. Получим уравнение

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x), \tag{4}$$

корнями которого служат как корни уравнения (3), так и корни уравнения $h(x) = 0$. Значит, уравнение (4) есть следствие уравнения (3). Ясно, что уравнения (3) и (4) равносильны, если «постороннее» уравнение $h(x) = 0$ не имеет корней.

Итак, *если обе части уравнения умножить на выражение $h(x)$, имеющее смысл при любых значениях x, то получится уравнение, являющееся следствием исходного*. Полученное уравнение будет равносильно исходному, если уравнение $h(x) = 0$ не имеет корней. Заметим, что обратное преобразование, т. е. переход от уравнения (4) к уравнению (3) путем деления обеих частей уравнения (4) на выражение $h(x)$, как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере корней (в этом случае могут «потеряться» корни уравнения $h(x) = 0$). Например, уравнение $(x - 2)(x - 3) = 2(x - 3)$ имеет два корня: 3 и 4. Деление же обеих частей уравнения на $x - 3$ приводит к уравнению $x - 2 = 2$, имеющему только один корень 4; произошла потеря корня.

Снова возьмем уравнение (3) и возведем обе его части в квадрат. Получим уравнение

$$(f(x))^2 = (g(x))^2, \qquad (5)$$

корнями которого служат как корни уравнения (3), так и корни «постороннего» уравнения $f(x) = -g(x)$; уравнение (5) — следствие уравнения (3).

Например, уравнение $x - 1 = 3$ имеет корень 4. Если обе части уравнения $x - 1 = 3$ возвести в квадрат, то получится уравнение $(x - 1)^2 = 9$, имеющее два корня: 4 и -2. Значит, уравнение $(x - 1)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 1 = 3$. При переходе от уравнения $x - 1 = 3$ к уравнению $(x - 1)^2 = 9$ появился посторонний корень $x = -2$.

Итак, *при возведении обеих частей уравнения в квадрат* (*и вообще в любую четную степень*) *получается уравнение, являющееся следствием* *исходного.* Значит, при указанном преобразовании возможно появление посторонних корней. Заметим, что возведение обеих частей уравнения в одну и ту же нечетную степень приводит к уравнению, равносильному данному.

110. Уравнения с переменной в знаменателе. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) основано на следующем утверждении: *дробь* $\frac{m}{n}$ *равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля* (на 0 делить нельзя!). Записывают это так:

$$\begin{cases} m = 0, \\ n \neq 0. \end{cases}$$

В соответствии со сказанным, решение уравнения $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ проводится в два этапа: сначала нужно решить уравнение $p(x) = 0$, а затем для каждого его корня выяснить, обращается ли при найденном значении переменной x знаменатель $q(x)$ в нуль. Если $q(x) \neq 0$, то найденный корень уравнения $p(x) = 0$ является и корнем уравнения (1); если $q(x) = 0$, то полученный корень уравнения $p(x) = 0$ не является корнем уравнения (1).

Таким образом, уравнение $p(x) = 0$ является следствием (см. п. 109) уравнения $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$. При переходе от уравнения $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ к уравнению $p(x) = 0$ (*освобожде-*

ние от знаменателя) могут появиться посторонние корни. Отсеять их можно с помощью условия $q(x) \neq 0$ (или с помощью непосредственной подстановки каждого корня уравнения $p(x) = 0$ в уравнение (1)).

Пример. Решить уравнение $\frac{3x-6}{x^2-x-2} = 0.$

Решение. Из уравнения $3x - 6 = 0$ находим $x = 2$. Так как при $x = 2$ знаменатель $x^2 - x - 2$ обращается в нуль, $x = 2$ — посторонний корень, а потому заданное уравнение не имеет корней.

111. Область определения уравнения (ОДЗ). *Областью определения уравнения* $f(x) = g(x)$ называют множество всех тех значений переменной x, при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл (одновременно).

Пример 1. Найти область определения уравнения:

а) $x^2 - 5x = 1 + 2x$;

б) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 3$;

в) $\log_3(x - 3) = \log_3(5 - x)$.

Решение. а) Выражения $x^2 - 5x$ и $1 + 2x$ определены при всех x. Значит, область определения уравнения — вся числовая прямая.

б) Выражение $\frac{x}{x-1}$ не определено при $x = 1$, а выражение $\frac{1}{x-2}$ не определено при $x = 2$. Значит, область определения уравнения можно задать условиями $x \neq 1$, $x \neq 2$.

в) Логарифм имеет смысл лишь при положительных значениях логарифмируемого выражения. Значит, должны одновременно выполняться два неравенства: $x - 3 > 0$, откуда $x > 3$, и $5 - x > 0$, откуда $x < 5$. Итак, $(3; 5)$ — область определения уравнения.

Вместо термина «область определения уравнения» часто используют термин «область допустимых значений переменной» (ОДЗ).

Ясно, что корни уравнения $f(x) = g(x)$ должны принадлежать его области определения (его ОДЗ). Но иногда бывает так, что в процессе преобразований уравнения его область определения меняется (чаще всего она расширяется) и из найденных значений переменной одни принадлежат области определения уравнения $f(x) = g(x)$, а другие не принадлежат. Тогда первые являются корнями уравнения, а вторые — нет (это посторонние корни).

Так, при решении уравнения $\frac{3x - 6}{x^2 - x - 2} = 0$ (см. п. 110), область определения которого задается условием $x^2 - x - 2 \neq 0$, мы перешли к уравнению $3x - 6 = 0$, областью определения которого является вся числовая прямая (область определения расширилась). Уравнение $3x - 6 = 0$ имеет корень $x = 2$, который не принадлежит области определения исходного уравнения и, следовательно, является посторонним корнем.

Общий вывод таков: *если в процессе преобразований уравнения его область определения расширилась, то могут появиться посторонние корни*. Поэтому все найденные значения переменной надо проверить подстановкой в исходное уравнение или с помощью области определения (ОДЗ) исходного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\lg(x-5)=\lg(2x-9). \qquad (1)$$

Решение. Если $\lg a = \lg b$, то, в силу монотонности логарифмической функции, $a = b$ (если $a \neq b$, например, $a < b$, то и $\lg a \neq \lg b$, а именно $\lg a < \lg b$). Значит, от заданного уравнения можно перейти к уравнению

$$x-5=2x-9, \qquad (2)$$

откуда находим $x = 4$. Но при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область определения расширилась: в уравнении (1) она задается неравенством $x > 5$, тогда как для уравнения (2) областью определения служит вся числовая прямая. Поэтому найденное значение $x = 4$, являющееся корнем уравнения (2), может оказаться посторонним корнем для уравнения (1). В данном случае именно это и происходит, поскольку $x = 4$ не принадлежит области определения уравнения (1) (не удовлетворяет неравенству $x > 5$). Итак, $x = 4$ — посторонний корень, т. е. заданное уравнение не имеет корней.

112. Рациональные уравнения. Уравнение $f(x) = g(x)$ называют *рациональным*, если $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения. При этом если $f(x)$ и $g(x)$ — целые выражения, то уравнение называют *целым*; если же хотя бы одно из выражений $f(x)$, $g(x)$ является дробным, то рациональное уравнение $f(x) = g(x)$ называют *дробным*.

Например, целыми являются линейные (см. п. 103), квадратные (см. п. 104) уравнения.

Чтобы решить рациональное уравнение, нужно:

1) найти общий знаменатель всех имеющихся дробей;

2) заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;

3) решить полученное целое уравнение;

4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}.$$

Решение. Общим знаменателем имеющихся дробей является $2x(2-x)$. Найдя дополнительные множители для каждой дроби, освободимся от знаменателей. Имеем:

$$\frac{\overset{2x}{2}}{2-x}+\frac{\overset{x(2-x)}{1}}{2}=\frac{\overset{2}{4}}{x(2-x)};$$

$$4x+x(2-x)=8;$$

$$x^2-6x+8=0.$$

Из уравнения $x^2-6x+8=0$ находим $x_1=2$, $x_2=4$ (см. п. 104). Осталось проверить, обращают ли найденные корни выражение $2x(2-x)$ в нуль, т. е. проверить выполнение условия $2x(2-x)\neq 0$. Замечаем, что 2 не удовлетворяет этому условию, а 4 удовлетворяет. Значит, $x=4$ — единственный корень уравнения.

113. Решение уравнений методом введения новой переменной. Суть этого метода поясним на примере.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0.$$

Решение. Положив $x^2-3x=y$, получим уравнение

$$y^2+3y-28=0,$$

откуда находим $y_1 = -7$, $y_2 = 4$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$x^2 - 3x = -7; \quad x^2 - 3x = 4, \text{ т. е.}$$
$$x^2 - 3x + 7 = 0; \quad x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Первое квадратное уравнение не имеет действительных корней, так как его дискриминант отрицателен.

Из второго квадратного уравнения находим $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Это корни заданного уравнения.

114. Решение задач с помощью составления уравнений. С помощью уравнений решаются многочисленные задачи, к которым приводят самые разнообразные вопросы физики, механики, экономики и т. д. Прежде всего напомним общий порядок решения задач с помощью уравнений.

1) Вводят переменные, т. е. буквами x, y, z обозначают неизвестные величины, которые либо требуется найти в задаче, либо они необходимы для отыскания искомых величин.

2) С помощью введенных переменных и данных в задаче чисел и их соотношений составляют систему уравнений (или одно уравнение).

3) Решают составленную систему уравнений (или уравнение) и из полученных решений отбирают те, которые подходят по смыслу задачи.

4) Если буквами x, y, z обозначили не искомые величины, то с помощью полученных решений находят ответ на вопрос задачи.

З а д а ч а 1*. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое затребовали некоторое количество машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно потребовались 4 машины. Какое количество машин было затребовано первоначально?

Решение. Обозначим через x количество машин, затребованных первоначально. Тогда на самом деле было вызвано $(x + 4)$ машин. Так как надо было перевезти 60 т груза, то предполагалось, что на одну машину будут грузить $\frac{60}{x}$ т груза, а на самом деле грузили $\frac{60}{x+4}$ т груза, что на 0,5 т меньше, чем предполагалось. В результате мы приходим к уравнению

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+4} = 0{,}5.$$

Это уравнение имеет два корня: $x = -24$, $x = 20$. Ясно, что по смыслу задачи значение $x = -24$ не подходит. Таким образом, первоначально было затребовано 20 машин.

Ответ: 20.

Задача 2•. Моторная лодка, движущаяся со скоростью 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно без остановок за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами равно 60 км. Найти скорость течения реки.

Решение. Пусть x км/ч — скорость течения реки. Тогда лодка, собственная скорость которой 20 км/ч, идет по течению со скоростью $(20 + x)$ км/ч, а против течения — со скоростью $(20 - x)$ км/ч. Время, за которое лодка пройдет путь между пунктами по течению, составит $\frac{60}{20+x}$ ч, а время, за которое лодка пройдет обратный путь, составит $\frac{60}{20-x}$ ч. Так как путь туда и обратно лодка проходит за 6 ч 15 мин, т. е. $\frac{25}{4}$ ч, приходим к уравнению

$$\frac{60}{20+x}+\frac{60}{20-x}=\frac{25}{4},$$

решив которое, находим два корня: $x = 4$, $x = -4$. Ясно, что значение $x = -4$ не подходит по смыслу задачи. Итак, скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 4.

Задача 3•. Найти двузначное число, зная, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Решение. Напомним, что любое двузначное число может быть записано в виде $10x + y$, где x — цифра десятков, а y — цифра единиц. Согласно условию, если x — цифра десятков, то цифра единиц равна $x + 2$ и мы получаем

$$(10x+(x+2))(x+(x+2))=144.$$

Решив это уравнение, найдем $x_1 = 2$, $x_2 = -3\frac{2}{11}$. Второй корень не подходит по смыслу задачи.

Итак, цифра десятков равна 2, цифра единиц равна 4; значит, искомое число равно 24.

Ответ: 24.

Задача 4•. Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч скорее, чем второй рабочий, если последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу? (Ответ записать через запятую.)

Решение. Производительность труда, т. е. часть работы, выполняемая в единицу времени (обозначим ее через A), и время, необходимое для выполнения всей работы (обозначим его через t), — взаимно обратные величины, т. е. $At = 1$. Поэтому если обозначить через x ч время, необходимое для выполнения всей работы первому рабочему, а через $(x + 5)$ ч — второму, то часть работы, выполняемая первым рабочим за 1 ч, равна $\frac{1}{x}$, а часть работы, выполняемая вторым рабочим за 1 ч, равна $\frac{1}{x+5}$. Согласно условию, они, работая вместе, выполнили всю работу за 6 ч. Доля работы, выполненная за 6 ч первым рабочим, есть $\frac{6}{x}$, а доля работы, выполненная за 6 ч вторым рабочим, есть $\frac{6}{x+5}$. Так как вместе они выполнили всю работу, т. е. доля выполненной работы равна 1, получаем уравнение

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1,$$

решив которое, найдем $x = 10$.

Итак, первый рабочий может выполнить всю работу за 10 ч, а второй — за 15 ч.

Ответ: 10, 15.

Задача 5. Из сосуда емкостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой, потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

Решение. Пусть в первый раз было вылито x л кислоты. Тогда в сосуде осталось $(54 - x)$ л кислоты. Долив сосуд водой, получили 54 л смеси, в которой растворилось $(54 - x)$ л кислоты. Значит, в 1 л смеси содержится $\frac{54-x}{54}$ л кислоты (концентрация раствора). Во второй раз из сосуда вылили x л смеси, в этом количестве смеси содержалось $\frac{54-x}{54} \cdot x$ л кислоты. Таким образом, в первый раз было вылито x л кислоты, во второй $\frac{54-x}{54} \cdot x$ л кислоты, а всего за два раза вылито $54 - 24 = 30$ л кислоты. В результате приходим к уравнению

$$x + \frac{54-x}{54} \cdot x = 30.$$

Решив это уравнение, найдем два корня: $x_1 = 90$ и $x_2 = 18$. Ясно, что значение 90 не удовлетворяет условию задачи.

Итак, в первый раз было вылито 18 л кислоты.

Ответ: 18 л.

Задача 6. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Решение. Пусть масса добавленного олова составляет x кг. Тогда получится сплав массой $(12 + x)$ кг, содержащий 40% меди. Значит, в новом сплаве имеется $0{,}4(12 + x)$ кг меди. Исходный сплав массой 12 кг содержал 45% меди, т. е. меди в нем было $0{,}45 \cdot 12$ кг. Так как масса меди и в имевшемся, и в новом сплаве одна и та же, приходим к уравнению

$$0{,}4\,(12 + x) = 0{,}45 \cdot 12.$$

Решив это уравнение, получим $x = 1{,}5$. Таким образом, к исходному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

Ответ: 1,5 кг.

Задача 7. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали того и другого сорта надо взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Решение. Пусть масса стали первого сорта равна x т, тогда стали второго сорта надо взять $(140 - x)$ т. Содержание никеля в стали первого сорта составляет 5%; значит, в x т стали первого сорта содержится $0{,}05x$ т никеля. Содержание никеля в стали второго сорта составляет 40%; значит, в $(140 - x)$ т стали второго сорта содержится $0{,}4\,(140 - x)$ т никеля. По условию после соединения взятых двух сортов должно получиться 140 т стали с 30%-ным содержанием никеля, т. е. после переплавки в полученной стали должно быть $0{,}3 \cdot 140$ т никеля. Но это количество никеля складывается из $0{,}05x$ т, содержащихся в стали первого сорта, и из $0{,}4\,(140 - x)$ т, содержащихся в стали второго сорта. Таким образом, приходим к уравнению

$$0{,}05x + 0{,}4\,(140 - x) = 0{,}3 \cdot 140,$$

из которого находим $x = 40$. Следовательно, надо взять 40 т стали с 5%-ным и 100 т стали с 40%-ным содержанием никеля.

115. Иррациональные уравнения. *Иррациональным* называют уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Например, иррациональными являются уравнения $\sqrt{x-2} = 2x - 1$, $x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0$.

Используются два основных метода решения иррациональных уравнений:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) метод введения новых переменных (см. п. 113).

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень состоит в следующем:

а) преобразуют заданное иррациональное уравнение к виду

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)};$$

б) возводят обе части полученного уравнения в n-ю степень:

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = \left(\sqrt[n]{g(x)}\right)^n;$$

в) учитывая, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, получают уравнение

$$f(x) = g(x);$$

г) решают уравнение и, в случае четного n, делают проверку, так как возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень может привести к появлению посторонних корней (см. п. 109). Эта проверка чаще всего осуществляется с помощью подстановки найденных значений переменной в исходное уравнение.

Пример 1*. Решить уравнение $\sqrt[6]{x-3} = 2$.

Решение. Возведем обе части уравнения в шестую степень; получим $x - 3 = 64$, откуда $x = 67$.

Проверка. Подставив 67 вместо x в данное уравнение, получим $\sqrt[6]{67-3} = 2$, т. е. $2 = 2$ — верное равенство.

Ответ: 67.

Пример 2*. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{2x+6} = 6 - \sqrt{x-1}$$

и возведем обе части его в квадрат. Получим

$$(\sqrt{2x+6})^2 = (6 - \sqrt{x-1})^2;$$

далее,

$$2x + 6 = 36 - 12\sqrt{x-1} + x - 1,$$

$$12\sqrt{x-1} = 29 - x.$$

Еще раз возведем обе части уравнения в квадрат:

$$144(x-1) = (29-x)^2, \text{ т. е. } x^2 - 202x + 985 = 0,$$

откуда $x_1 = 5$, $x_2 = 197$.

Проверка. 1) При $x = 5$ имеем

$$\sqrt{5-1} + \sqrt{2 \cdot 5 + 6} = 6 \text{ — верное равенство.}$$

Таким образом, $x = 5$ является корнем заданного уравнения.

2) При $x = 197$ имеем $\sqrt{197-1} + \sqrt{2 \cdot 197 + 6} \neq 6$. Таким образом, $x = 197$ — посторонний корень.

Ответ: 5.

Пример 3. Решить уравнение

$$(x-2)^{\frac{2}{5}} - (x-2)^{\frac{1}{5}} = 2.$$

Решение. Применим метод введения новой переменной.

Положим $y = (x-2)^{\frac{1}{5}}$. Тогда $(x-2)^{\frac{2}{5}} = y^2$, и мы получаем уравнение $y^2 - y - 2 = 0$, откуда находим $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Теперь задача свелась к решению совокупности уравнений

$$(x-2)^{\frac{1}{5}} = 2; \quad (x-2)^{\frac{1}{5}} = -1.$$

Возведя обе части уравнения $(x-2)^{\frac{1}{5}} = 2$ в пятую степень, получим $x - 2 = 32$, откуда $x = 34$.

Уравнение $(x-2)^{\frac{1}{5}} = -1$ не имеет корней, поскольку под знаком возведения в дробную степень может содержаться только неотрицательное число, а любая степень неотрицательного числа неотрицательна.

Ответ: 34.

116. Показательные уравнения. *Показательное* уравнение вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Имеются два основных метода решения показательных уравнений:

1) метод уравнивания показателей, т. е. преобразование заданного уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, а затем к виду $f(x) = g(x)$;

2) метод введения новой переменной.

Пример 1•. Найдите корень уравнения $3^{x-2} = 27$.

Решение. $3^{x-2} = 27$; $3^{x-2} = 3^3$; $x - 2 = 3$; $x = 5$.

Ответ: 5.

Пример 2•. Решить уравнение $2^{3x^2+3} = 2^{10x}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $3x^2 + 3 = 10x$, откуда находим $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Ответ: 3; $\frac{1}{3}$.

Пример 3*. Решить уравнение

$$\frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-1}.$$

Решение. Приведем все степени к одному основанию $\frac{1}{5}$. Получим уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right)^{x-1}$, которое преобразуем к виду $\left(\frac{1}{5}\right)^{x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3}$. Уравнение равносильно уравнению $x = 2x - 3$, откуда находим $x = 3$.

Ответ: 3.

Пример 4. Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение. Применим метод введения новой переменной. Так как $4^x = (2^x)^2$, $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Введем новую переменную, положив $2^x = y$. Получим квадратное уравнение $y^2 + 2y - 24 = 0$ с корнями $y_1 = 4$, $y_2 = -6$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений $2^x = 4$, $2^x = -6$.

Из первого уравнения находим $x = 2$. Второе уравнение не имеет корней, так как $2^x > 0$ при любых значениях x.

Ответ: 2.

117. Логарифмические уравнения. Чтобы решить *логарифмическое уравнение* вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \qquad (1)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, нужно:

1) решить уравнение $f(x) = g(x)$;

2) из найденных корней отобрать те, которые удовлетворяют неравенствам $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$; ос-

тальные корни уравнения $f(x) = g(x)$ являются посторонними для уравнения (1).

Имеются два основных метода решения логарифмических уравнений:

1) метод, заключающийся в преобразовании уравнения к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, затем к виду $f(x) = g(x)$;

2) метод введения новой переменной.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Решение. Перейдем от заданного уравнения к уравнению $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$ и решим его. Имеем $x^2 - x - 12 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Проверку найденных значений x выполним с помощью неравенств $x^2 - 3x - 5 > 0$ и $7 - 2x > 0$. Число -3 этим неравенствам удовлетворяет, а число 4 — нет. Значит, 4 — посторонний корень.

Ответ: -3.

Пример 2. Решить уравнение

$$\lg (x + 4) + \lg (2x + 3) = \lg (1 - 2x).$$

Решение. Воспользовавшись тем, что сумма логарифмов равна логарифму произведения (см. п. 89), преобразуем уравнение к виду

$$\lg (x + 4)(2x + 3) = \lg (1 - 2x)$$

и далее

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x.$$

Из последнего уравнения находим $x_1 = -1$, $x_2 = -5{,}5$.

Осталось сделать проверку. Ее можно выполнить с помощью системы неравенств

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$$

Подставив поочередно найденные значения -1 и $-5{,}5$ в эти неравенства, убеждаемся, что -1 удовлетворяет всем неравенствам, а $-5{,}5$ — нет, например, при этом значении не выполняется первое неравенство. Значит, $-5{,}5$ — посторонний корень.

Ответ: -1.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2^2 x + \log_2 x + 1 = \frac{7}{\log_2 0{,}5x}.$$

Решение. Так как $\log_2 0{,}5x = \log_2 x + \log_2 0{,}5 = \log_2 x - 1$, заданное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\log_2^2 x + \log_2 x + 1 = \frac{7}{\log_2 x - 1}.$$

Введем новую переменную, положив $\log_2 x = y$. Получим

$$y^2 + y + 1 = \frac{7}{y - 1}$$

и далее

$$(y-1)(y^2 + y + 1) = 7;\ y^3 - 1 = 7;\ y^3 = 8;\ y = 2.$$

Но $y = \log_2 x$; из уравнения $\log_2 x = 2$ находим $x = 4$.

Ответ: 4.

118. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

Арксинусом числа m ($\arcsin m$) называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен m:

$$\sin(\arcsin x) = x; \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Пример. Вычислить: а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решение. а) По определению, $y = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ — это такое число, что $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $y = \frac{\pi}{3}$. Таким образом,

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

б) Рассуждая аналогично, получаем $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Но по свойству нечетности имеем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2}$; следовательно, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Арккосинусом числа m ($\arccos m$) называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен m:

$$\cos(\arccos x) = x;\ 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Имеет место тождество:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Пример. Вычислить: а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. а) По определению, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ — это такое число y, что $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Отсюда следует, что $y = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

б) По формуле (1) имеем $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Арктангенсом числа m ($\operatorname{arctg} m$) называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тангенс которого равен m:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Пример. Вычислить: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

Решение. а) По определению, $y = \operatorname{arctg} 1$ — это такое число, что $\operatorname{tg} y = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $y = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) Рассуждая аналогично, получаем $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Но $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. Значит, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

Арккотангенсом числа m ($\operatorname{arcctg} m$) называется такое число из отрезка $(0; \pi)$, котангенс которого равен m:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x; \ 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Имеет место тождество:

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

119. Простейшие тригонометрические уравнения. Уравнение $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, имеет бесконечно много корней. Например, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$

удовлетворяют следующие значения: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, $x_4 = \frac{\pi}{6} - 2\pi$, $x_5 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$, $x_6 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi$ и т. д. Общая формула, по которой находят все корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, такова:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n. \tag{1}$$

Здесь n может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения; в этой формуле (равно как и в других формулах, по которым решаются простейшие тригонометрические уравнения) n называют *параметром*. Записывают обычно $n \in Z$, подчеркивая тем самым, что параметр n может принимать любые целые значения.

Решения уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, находят по формуле

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z. \tag{2}$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ решается по формуле

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z, \tag{3}$$

а уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ — по формуле

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z. \tag{4}$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. По формуле (1) имеем

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Так как $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ (см. п. 106), то $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Воспользовавшись формулой (2), получим

$$3x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (см. п. 118), то получаем

$$3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$.

Решение. Воспользовавшись формулой (3), получим

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,$$

откуда находим

$$x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Заметим, что в некоторых случаях удобнее пользоваться частными формулами:

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$.

2) $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

3) $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

4) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

5) $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$.

6) $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$.

7) $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi n$.

8) $\operatorname{ctg} x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Во всех формулах n — любое целое число.

120. Методы решения тригонометрических уравнений.

Имеются два основных метода решения тригонометрических уравнений:

1) метод разложения на множители;

2) метод введения новой переменной.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1.$$

Решение. Перенесем 1 в левую часть и, выполнив преобразования левой части, разложим ее на множители.

Применим к $\sin 5x + \sin x$ формулу для суммы синусов (см. п. 99) и воспользуемся тем, что $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ (см. п. 98). Тогда уравнение примет вид $2 \sin 3x \cos 2x + (1 - \cos 2x) - 1 = 0$ и далее $\cos 2x \times (2 \sin 3x - 1) = 0$. Теперь задача свелась к решению совокупности уравнений $\cos 2x = 0$; $2 \sin 3x - 1 = 0$.

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, т. е.

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Из уравнения $2 \sin 3x - 1 = 0$ находим $\sin 3x = \frac{1}{2}$ и далее

$$3x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k,$$

$$3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$$

Таким образом, решения заданного уравнения таковы:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 14\cos x = 3\sin^2 x.$$

Решение. Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, уравнение можно переписать следующим образом:

$$2\cos^2 x + 14\cos x - 3(1 - \cos^2 x) = 0$$

и далее $5\cos^2 x + 14\cos x - 3 = 0$.

Положив $\cos x = y$, получим квадратное уравнение $5y^2 + 14y - 3 = 0$. Решив это уравнение, получим $y_1 = \frac{1}{5}$, $y_2 = -3$. Значит, либо $\cos x = \frac{1}{5}$, откуда находим $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$, либо $\cos x = -3$ — это уравнение не имеет решений, так как $|\cos x| \leqslant 1$.

Откуда $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

121. Однородные тригонометрические уравнения. *Однородными тригонометрическими уравнениями* называют уравнения вида

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

(однородное уравнение 1-й степени),

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

(однородное уравнение 2-й степени).

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Разделим обе части первого уравнения на $\cos x$, а обе части второго уравнения на $\cos^2 x$. В результате получим следующие уравнения, алгебраические относительно $\operatorname{tg} x$, а потому решаемые подстановкой $\operatorname{tg} x = y$:

$$a \operatorname{tg} x + b = 0,$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

При $a \neq 0$ однородному уравнению не удовлетворяют те значения x, при которых $\cos x = 0$. Поэтому деление на $\cos x$ (или $\cos^2 x$) обеих частей однородного уравнения в случае $a \neq 0$ не приводит к потере корней.

Пример 1. Решить уравнение

$$8 \sin x - 7 \cos x = 0.$$

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим $8 \operatorname{tg} x - 7 = 0$. Далее имеем $\operatorname{tg} x = \frac{7}{8}$, откуда

$$x = \operatorname{arctg} \frac{7}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Решение. Разделив обе части этого однородного уравнения второй степени на $\cos^2 x$, получим $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Далее положим $u = \operatorname{tg} x$, тогда приходим к квадратному уравнению

$$u^2 + 2u - 3 = 0, \text{ откуда } \quad u_1 = -3,\ u_2 = 1.$$

Решив совокупность уравнений $\operatorname{tg} x = -3$, $\operatorname{tg} x = 1$, получим

$$x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ k \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

122. Графическое решение уравнений. На практике довольно часто оказывается полезным *графический метод* решения уравнений. Он заключается в следующем: для решения уравнения $f(x) = 0$ строят график функции $y = f(x)$ и находят абсциссы точек пересечения графика с осью x; эти абсциссы и являются корнями уравнения. Так, для решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ достаточно построить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и найти абсциссы точек пересечения этого графика с осью x.

Часто уравнение $f(x) = 0$ заменяют равносильным уравнением $g(x) = h(x)$, затем строят графики функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$ (если это проще, чем построение графика функции $y = f(x)$) и находят абсциссы точек пересечения построенных графиков.

Так, для решения уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ можно преобразовать уравнение к виду $x^3 = 3x - 1$, затем построить графики функций $y = x^3$ и $y = 3x - 1$ и найти абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$. График функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рисунке 1.69. Чтобы построить график функции $y = |x - 2|$, рассмотрим два случая: если $x \geqslant 2$, то $x - 2 \geqslant 0$ и потому $|x - 2| = x - 2$; если же $x < 2$, то $x - 2 < 0$ и потому $|x - 2| = 2 - x$. Таким образом, запись $y = |x - 2|$ эквивалентна записи

$$y = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x \geqslant 2, \\ 2 - x, \text{ если } x < 2. \end{cases}$$

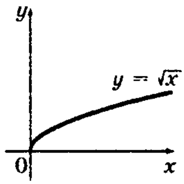


Рис. 1.69

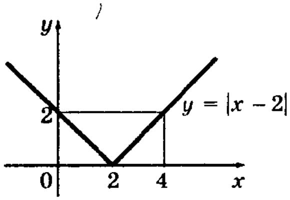


Рис. 1.70

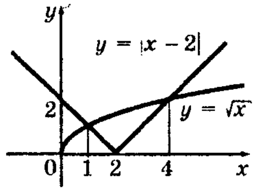


Рис. 1.71

График этой функции изображен на рисунке 1.70. На рисунке 1.71 оба графика изображены в одной системе координат. Они пересекаются в двух точках с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Это два корня данного уравнения.

С графическим методом решения уравнения $f(x) = g(x)$ связан *функциональный метод* решения уравнения, основанный на том, что если одна из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней (рис. 1.72), либо имеет единственный корень (рис. 1.73).

Пример 2. Решить уравнение $2^x = 6 - x$.

Решение. Легко заметить, что $x = 2$ — корень уравнения. Так как функция $y = 2^x$ возрастает, а функция $y = 6 - x$ убывает, то других корней это уравнение не имеет (рис. 1.74).

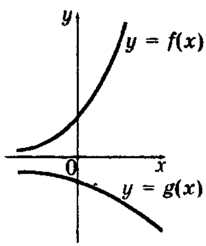


Рис. 1.72

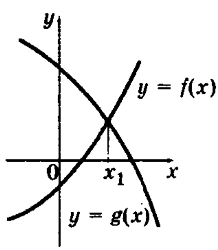


Рис. 1.73

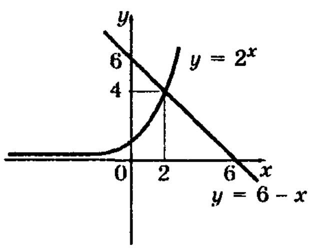


Рис. 1.74

123. Уравнения с параметром. Пусть дано равенство с переменными x, a:

$$f(x; a) = 0.$$

Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение $f(x; a) = 0$ называют уравнением с переменной x и *параметром* a.

Решить уравнение с параметром a, значит, для каждого значения a найти значения x, удовлетворяющие этому уравнению.

Пример 1. Решить уравнение

$$2a(a-2)x = a-2.$$

Решение. Рассмотрим прежде всего те значения параметра, которые обращают в нуль коэффициент при x (при этих значениях параметра невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x, а при остальных значениях параметра такое деление возможно). Такими значениями являются $a = 0$, $a = 2$. При $a = 0$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение не имеет корней. При $a = 2$ данное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, корнем его служит любое действительное число. При $a \neq 0$ и $a \neq 2$ уравнение можно преобразовать к виду $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$, откуда находим $x = \frac{1}{2a}$.

Таким образом, если $a = 0$, то уравнение не имеет корней; если $a = 2$, то корнем служит любое действительное число; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 = 0.$$

Решение. Выделим особо значение параметра $a = 1$. Дело в том, что при $a = 1$ данное уравнение не является квадратным, а при $a \neq 1$ оно квадратное. Решать уравнение в каждом из этих случаев надо по-своему. При $a = 1$ уравнение принимает вид $6x + 7 = 0$, откуда находим $x = -\frac{7}{6}$. В случае $a \neq 1$ для квадратного уравнения выделим те значения параметра, при которых дискриминант уравнения обращается в нуль. Имеем $\frac{D}{4} = 5a + 4$. Значит, $a = -\frac{4}{5}$ — значение параметра, на которое нам надо обратить внимание.

Если $a < -\frac{4}{5}$, то $D < 0$ и, следовательно, уравнение не имеет действительных корней; если $a > -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$, то $D > 0$ и мы получаем

$$x = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1};$$

если $a = -\frac{4}{5}$, то $D = 0$ и мы получаем $x = -\frac{2a+1}{a-1}$, т. е. $\left(\text{поскольку } a = -\frac{4}{5}\right)$ $x = -\frac{1}{3}$.

Итак, если $a < -\frac{4}{5}$, то действительных корней нет; если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$; если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$; если $a > -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$, то

$$x = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Пример 3•. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$$

имеет два различных отрицательных корня?

Решение. Так как уравнение должно иметь два различных действительных корня x_1 и x_2, его дискриминант должен быть положительным. Имеем:

$$D = 4(a+1)^2 - 4(9a-5) = 4a^2 - 28a + 24 = \\ = 4(a-1)(a-6).$$

Значит, должно выполняться неравенство $4(a-1)\times$ $\times(a-6) > 0$.

По теореме Виета для заданного уравнения имеем:

$$x_1 + x_2 = -2(a+1),$$
$$x_1 x_2 = 9a - 5.$$

Так как, по условию, $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, то $-2(a+1) < 0$ и $9a - 5 > 0$.

В итоге мы приходим к системе неравенств (см. п. 135):

$$\begin{cases} 4(a-1)(a-6) > 0, \\ -2(a+1) < 0, \\ 9a - 5 > 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим (см. п. 137, 139) $a < 1$; $a > 6$; из второго $a > -1$; из третьего $a > \frac{5}{9}$. С помощью координатной прямой (рис. 1.75) находим, что либо $\frac{5}{9} < a < 1$, либо $a > 6$.

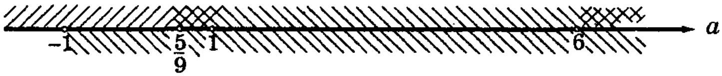


Рис. 1.75

§ 14. Уравнения с двумя переменными

124. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения с двумя переменными. Рассмотрим *уравнение с двумя переменными* $f(x; y) = 0$. Пару значений переменных, обращающую уравнение с двумя переменными в верное равенство, называют *решением уравнения*. Если дано уравнение с двумя переменными x и y, то принято в записи его решения на первое место ставить значение переменной x, а на второе — значение y.

Так, пары (10; 0), (16; 2), (−2; −4) являются решениями уравнения $x - 3y = 10$. В то же время пара (1; 5) решением уравнения не является.

Это уравнение имеет и другие решения. Для их отыскания удобно выразить одну переменную через другую, например x через y, получив уравнение $x = 10 + 3y$. Выбрав произвольное значение y, можно вычислить соответствующее значение x. Например, если $y = 7$, то $x = 10 + 3 \cdot 7 = 31$; значит, пара (31; 7) является решением уравнения; если $y = -2$, то $x = 10 + 3\,(-2) = 4$; значит, пара (4; −2) также является решением заданного уравнения.

Уравнения с двумя переменными называют *равносильными*, если они имеют одни и те же решения (или оба не имеют решений).

Для уравнений с двумя переменными справедливы теоремы 1 и 2 (см. п. 102) о равносильных преобразованиях уравнения.

Пусть дано уравнение с двумя переменными $f(x; y) = 0$. Если все его решения изобразить точками на координатной плоскости, то получится некоторое множество точек плоскости. Это множество называют *графиком уравнения* $f(x; y) = 0$.

Например, графиком уравнения $y - x^2 = 0$ является парабола $y = x^2$ (см. рис. 1.11); графиком уравнения $y - x = 0$ является прямая (биссектриса первого и третьего координатных углов, см. рис. 1.9); графиком уравнения $y - 3 = 0$ является прямая, параллельная оси x (рис. 1.76), а графиком уравнения $x + 2 = 0$ — прямая, параллельная оси y (рис. 1.77). Графиком уравнения $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = 0$ является одна точка (1; 2), так как координаты только этой точки удовлетворяют уравнению.

125. Линейное уравнение с двумя переменными и его график. Уравнение вида $ax + by = c$, где x, y — переменные, а a, b, c — числа, называют *линейным*; числа a и b называют *коэффициентами при переменных*, c — *свободным членом*.

Графиком любого линейного уравнения $ax + by = c$, у которого хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, является прямая; если $b = 0$, то эта прямая параллельна оси y, если $a = 0$, то эта прямая параллельна оси x.

Пример. Построить график уравнения

$$2x - 3y = -6.$$

Решение. Графиком этого линейного уравнения является прямая. Для построения прямой

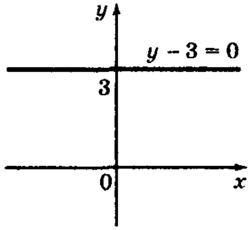


Рис. 1.76

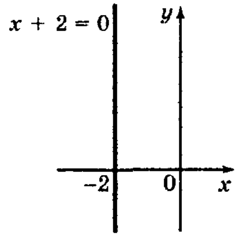


Рис. 1.77

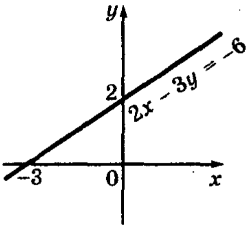


Рис. 1.78

достаточно знать две ее точки. Подставив в уравнение $2x - 3y = -6$ вместо x значение 0, получим $-3y = -6$, откуда $y = 2$. Подставив в уравнение $2x - 3y = -6$ вместо y значение 0, получим $2x = -6$, откуда $x = -3$.

Итак, мы нашли две точки графика: (0; 2) и (−3; 0). Проведя через них прямую, получим график уравнения $2x - 3y = -6$ (рис. 1.78).

Если линейное уравнение имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$, то могут представиться два случая:

1) $c = 0$; в этом случае уравнению удовлетворяет любая пара $(x;\ y)$, а потому графиком уравнения является вся координатная плоскость;

2) $c \neq 0$; в этом случае уравнение не имеет решения; значит, его график не содержит ни одной точки.

§ 15. Системы уравнений

126. Системы двух уравнений с двумя переменными. Равносильные системы. Пусть даны два уравнения с двумя переменными: $f(x;\ y) = 0$ и $g(x;\ y) = 0$. Если ставится задача найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, то говорят, что надо решить *систему уравнений.* Пару значений переменных, обращающую в верное равенство каждое уравнение системы, называют *решением системы* уравнений. Решить систему, значит, найти все ее решения или доказать, что их нет.

Уравнения, образующие систему, объединяются фигурной скобкой. Например, запись

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

означает, что уравнения $x - 3y = 10$ и $3x - 2y = 2$ образуют систему.

Две системы уравнений называют *равносильными*, если эти системы имеют одни и те же решения. Если, в частности, обе системы не имеют решений, то они также считаются равносильными. При решении системы уравнений обычно заменяют данную систему другой, более простой или по каким-либо причинам более «удобной», но равносильной первоначальной. Возможность такой замены обусловлена следующими двумя теоремами.

Теорема 5. Если одно уравнение системы двух уравнений с двумя переменными оставить без изменения, а другое уравнение системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной.

Так, системы

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3y + 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

равносильны.

Следствие. Если каждое уравнение системы заменить равносильным уравнением, то получится система, равносильная данной.

Так, равносильными будут следующие системы:

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3y + 10, \\ x = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Теорема 6. Если одно уравнение системы двух уравнений с двумя переменными оставить без изменения, а другое уравнение заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, то полученная система будет равносильна заданной.

Так, системы

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x - 3y) + (3x - 2y) = 10 + 2, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

равносильны: мы заменили уравнение $x - 3y = 10$ суммой двух уравнений заданной системы, а уравнение $3x - 2y = 2$ оставили неизменным.

127. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом подстановки. *Метод подстановки* заключается в следующем.

1) Одно из уравнений системы преобразуют к виду, в котором y выражен через x (или x через y).

2) Полученное выражение подставляют вместо y (или вместо x) во второе уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной.

3) Находят корни этого уравнения.

4) Воспользовавшись выражением y через x (или x через y), находят соответствующие значения y (или x).

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ x^2 - 24y = 100. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим $x = 3y + 10$. Подставим выражение $3y + 10$ вместо x

во второе уравнение системы. Получим $(3y + 10)^2 - 24y = 100$, откуда находим $y_1 = 0$, $y_2 = -4$. Соответствующие значения x найдем из уравнения $x = 3y + 10$. Если $y = 0$, то $x = 10$; если $y = -4$, то $x = -2$. Итак, система имеет два решения: $(-2; -4)$ и $(10; 0)$.

128. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом сложения. *Метод сложения* основан на теоремах 5 и 6 (см. п. 126). Суть его поясним на примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 16. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Умножив обе части второго уравнения системы на 3, получим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 9x - 3y = 48, \end{cases} \quad (2)$$

равносильную данной по теореме 5.

Сложим уравнения полученной системы. По теореме 6, система

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ (2x + 3y) + (9x - 3y) = 7 + 48 \end{cases} \quad (3)$$

равносильна системе (2). Система (3), в свою очередь, преобразуется к виду

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 11x = 55. \end{cases}$$

Из уравнения $11x = 55$ находим $x = 5$. Подставив это значение в уравнение $2x + 3y = 7$, находим $y = -1$.

Итак, $(5; -1)$ — решение системы (3), а значит, и решение равносильной ей системы (1).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Если обе части первого уравнения системы умножить на 2 и вычесть полученное уравнение из второго уравнения системы, то взаимно уничтожатся члены, содержащие переменные во второй степени:

$$(2x^2 + 2y^2 + x - 3y - 5) - (2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y) = 0,$$

$$5x - 5y - 5 = 0,$$

$$x - y - 1 = 0.$$

Мы приходим к более простой системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$$

которую нетрудно решить методом подстановки. Имеем: $y = x - 1$, значит,

$$x^2 + (x - 1)^2 - 2x + (x - 1) = 0,$$

$$2x^2 - 3x = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1{,}5.$$

Если $x = 0$, то $y = x - 1 = 0 - 1 = -1$; если $x = 1{,}5$, то $y = x - 1 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$

Ответ: $(0; -1)$ и $(1{,}5; 0{,}5)$.

129. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом введения новых переменных. *Метод введения новых переменных* применяется при решении систем двух уравнений с двумя переменными одним из следующих способов: 1) вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы; 2) вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Положим $\frac{x}{y} = z$, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$ и первое уравнение системы примет вид $z + \frac{1}{z} = \frac{13}{6}$. Решим полученное уравнение относительно новой переменной z:

$$6z^2 - 13z + 6 = 0, \text{ откуда } z_1 = \frac{2}{3}, z_2 = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, либо $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, т. е. $y = \frac{3x}{2}$, либо $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, т. е. $y = \frac{2x}{3}$.

Итак, первое уравнение заданной системы распалось на два уравнения: $y = \frac{3x}{2}$; $y = \frac{2x}{3}$. В соответствии с этим нам предстоит теперь решить совокупность двух систем:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x}{2}, \\ x + y = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{2x}{3}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x = 2$, $y = 3$, из второй $x = 3$, $y = 2$.

Ответ: (2; 3); (3; 2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32, \\ xy + 2(x + y) = 26. \end{cases}$$

Решение. Положим $x + y = u$, $xy = v$.

Тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$ и система примет вид

$$\begin{cases} u^2 - 2v + u = 32, \\ v + 2u = 26. \end{cases} \qquad (1)$$

Полученную систему можно решить методом подстановки. Выразив из второго уравнения v через u, получим $v = 26 - 2u$. Подставим этот результат в первое уравнение системы (1):

$$u^2 - 2(26 - 2u) + u = 32,$$

$$u^2 + 5u - 84 = 0,$$

$$u_1 = -12, u_2 = 7.$$

Соответственно находим $v_1 = 50$, $v_2 = 12$.

Итак, нашли два решения системы (1):

$$\begin{cases} u_1 = -12, \\ v_1 = 50; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 7, \\ v_2 = 12. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим совокупность двух систем

$$\begin{cases} x + y = -12, \\ xy = 50; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12, \end{cases}$$

каждую из которых нетрудно решить методом подстановки (выразив, например, y через x из первого уравнения). Первая система не имеет действительных решений, а вторая имеет два решения: (3; 4) и (4; 3). Они и будут решениями исходной системы.

130. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными. Для того чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя переменными, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

Пример 1. Решить графически систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$$

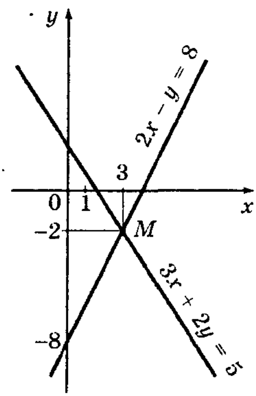


Рис. 1.79

Решение. Построим прямую — график уравнения $3x + 2y = 5$ — по двум точкам, например (1; 1) и (3; −2) (рис. 1.79).

Построим прямую — график уравнения $2x - y = 8$ — по точкам (0; −8) и (4; 0) (рис. 1.79).

Полученные прямые не параллельны, их пересечением служит точка $M(3; -2)$. Значит, (3; −2) — решение заданной системы.

Пример 2. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Решение. Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5. Графиком уравнения $xy = 12$ является гипербола $y = \frac{12}{x}$ (см. п. 66). Построив гра-

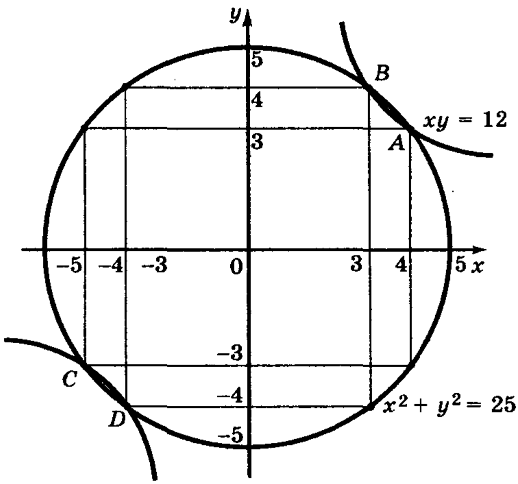


Рис. 1.80

фики в одной системе координат (рис. 1.80), найдем координаты точек A, B, C, D пересечения окружности и гиперболы: $A(4;\ 3)$, $B(3;\ 4)$, $C(-4;\ -3)$, $D\ (-3;\ -4)$. Значит, решения заданной системы таковы:

$$(4;\ 3), (3;\ 4), (-4;\ -3), (-3;\ -4).$$

131. Решение задач с помощью составления систем уравнений.

З а д а ч а 1. Два пешехода идут навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то встреча произойдет через 2,5 ч после выхода второго. Если же второй пешеход выйдет на 2 ч раньше первого, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первого. С какой скоростью идет каждый пешеход?

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч — скорость первого пешехода, а y км/ч — скорость второго пешехода.

Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то, согласно условию, он будет идти до встречи 4,5 ч, тогда как второй — 2,5 ч. За 4,5 ч первый пройдет путь $4{,}5x$ км, а за 2,5 ч второй пройдет путь $2{,}5y$ км. Их встреча означает, что суммарно они прошли путь 30 км, т. е.

$$4{,}5x + 2{,}5y = 30 \text{ — первое уравнение.}$$

Если второй выйдет на 2 ч раньше первого, то, согласно условию, он будет идти до встречи 5 ч, тогда как первый — 3 ч. Рассуждая, как и выше, придем ко второму уравнению:

$$3x + 5y = 30.$$

В итоге получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4{,}5x + 2{,}5y = 30, \\ 3x + 5y = 30, \end{cases}$$

откуда находим $x = 5$, $y = 3$.

Ответ: первый пешеход идет со скоростью 5 км/ч, а второй — 3 км/ч.

Задача 2. У старшего брата было вдвое больше денег, чем у младшего. Они положили свои деньги на год на счета в разные банки, причем младший брат нашел банк, который дает на 5% годовых больше, чем банк старшего брата. Сняв свои деньги со счетов через год, старший брат получил 4600 руб., а младший — 2400 руб. Сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли свои банки?

Решение. Пусть x руб. — сумма денег, которую положил в банк младший брат, тогда $2x$ руб. — сумма денег, которую положил в банк старший брат.

Пусть, далее, банк старшего брата дает y% годовых, тогда банк младшего брата дает $(y + 5)$% годовых.

Значит, через год на счету старшего брата будет $\left(2x + \frac{2xy}{100}\right)$ руб., а на счету младшего брата будет $\left(x + \frac{x(y+5)}{100}\right)$ руб.

В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{2xy}{100} = 4600, \\ x + \dfrac{x(y+5)}{100} = 2400. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 2000$, $y = 15$.

Осталось получить ответ на вопрос задачи: сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли свои банки? В этом случае младший брат положил бы свои 2000 руб. в банк под 15% годовых, а старший — 4000 руб. в банк под 20% годовых. Младший брат в конце года получил бы 2300 руб., а старший — 4800 руб. Всего у них стало бы 7100 руб.

О т в е т: 7100 руб.

ГЛАВА VI

НЕРАВЕНСТВА

§ 16. Решение неравенств

132. Основные понятия, связанные с решением неравенств с одной переменной. Пусть дано неравенство $f(x) > g(x)$. Всякое значение переменной x, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство, называют *решением неравенства. Решить неравенство с переменной,* значит, найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства с одной переменной называют *равносильными,* если решения этих неравенств совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений.

При решении неравенств обычно заменяют данное неравенство другим, более простым, но равносильным данному; полученное неравенство снова заменяют более простым, равносильным данному неравенством и т. д. Такие замены осуществляются на основе следующих утверждений.

Теорема 1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Например, неравенства $x^2 + 5x < 6$ и $x^2 + 5x - 6 < 0$ равносильны по теореме 1. Неравенства $3x^2 + 6x < 9$ и $x^2 + 2x < 3$ равносильны по теореме 2 (обе части неравенства $3x^2 + 6x < 9$ разделили на положительное число 3, оставив без изменения знак $<$ исходного неравенства). Неравенства $-6x < 12$ и $x > -2$ равносильны по теореме 3 (обе части неравенства $-6x < 12$ разделили на отрицательное число -6, изменив при этом знак $<$ исходного неравенства на знак $>$).

На практике иногда полезны теоремы, являющиеся обобщениями теорем 2 и 3.

Теорема 4. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех значениях переменной положительные значения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех значениях переменной отрицательные значения, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

133. Графическое решение неравенств с одной переменной. Для *графического* решения неравенства $f(x) > g(x)$ нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и выбрать те участки оси абсцисс, на которых график функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = g(x)$.

Пример. Решить графически неравенство

$$\log_2 x > \frac{2}{x}.$$

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \frac{2}{x}$ (рис. 1.81). Из рисунка видно, что график функции $y = \log_2 x$ расположен выше графика функции $y = \frac{2}{x}$ при $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

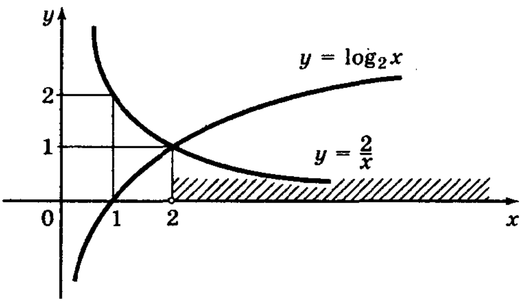


Рис. 1.81

134. Линейные неравенства с одной переменной. *Линейным* называют неравенство вида $ax > b$ (или соответственно $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$). Если $a > 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x > \frac{b}{a}$ (см. теорему 2); значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$. Если $a < 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$ (см. теорему 3); значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$. Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > b$; оно не имеет решений, если $b \geqslant 0$, и верно при любых x, если $b < 0$.

Многие неравенства в процессе преобразований сводятся к линейным.

135. Системы неравенств с одной переменной. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют *систему неравенств*, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называют *решением системы неравенств*.

Неравенства, образующие систему, объединяют фигурной скобкой. Например, запись

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 < 11 \end{cases}$$

означает, что неравенства $2x - 1 > 3$ и $3x - 2 < 11$ образуют систему.

Иногда используют запись в виде двойного неравенства.

Например, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x + 1 > 1, \\ 2x + 1 < 5 \end{cases}$$

можно записать в виде двойного неравенства

$$1 < 2x + 1 < 5.$$

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x + 2 > 3x - 1, \\ 3x + 1 > 7x - 4. \end{cases}$$

Решение. Первое неравенство системы преобразуется в равносильное ему неравенство $x > -\frac{3}{2}$, а второе — в неравенство $x < \frac{5}{4}$. Таким образом, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x < \frac{5}{4}. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 1.82) находим, что множество решений системы есть интервал $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{4}\right)$ (пересечение заштрихованных на рис. 1.82 промежутков).

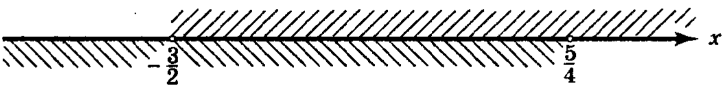


Рис. 1.82

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3(x+1) - \frac{x-2}{4} < 5x - 7 \cdot \frac{x+3}{2}, \\ 2x - \frac{x}{3} + 6 \leqslant 4x - 3. \end{cases}$$

Решение. Выполнив преобразования каждого из неравенств системы, получим

$$\begin{cases} x < -\frac{56}{5}, \\ x \geqslant \frac{27}{7}. \end{cases}$$

Значений x, удовлетворяющих одновременно неравенствам $x < -\frac{56}{5}$ и $x \geqslant \frac{27}{7}$, нет; следовательно, заданная система неравенств не имеет решений.

136. Совокупность неравенств с одной переменной. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют *совокупность неравенств*, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств.

Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в верное числовое неравенство, называют *решением совокупности неравенств*.

Пример. Решить совокупность неравенств

$$\frac{2x-3}{5} > \frac{3x-2}{2}; \quad \frac{x}{3} + 1 > \frac{3x}{2}.$$

Решение. Преобразовав каждое из неравенств, получим совокупность, равносильную заданной: $x < \frac{4}{11}$; $x < \frac{6}{7}$. С помощью числовой прямой находим, что решением заданной совокупности является промежуток $\left(-\infty; \frac{6}{7}\right)$ (рис. 1.83) (объединения заштрихованных на рис. 1.83. промежутков).

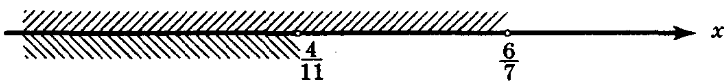


Рис. 1.83

137. Квадратные неравенства. Здесь речь идет о неравенствах вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Теорема 6. Если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен, а старший коэффициент a положителен, то при всех значениях x выполняется неравенство $ax^2 + bx + c > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $D \geqslant 0$. Для решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c < 0$) нужно разложить квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ на множители по формуле

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(см. п. 44), затем разделить обе части неравенства $a(x-x_1)(x-x_2) > 0$ (или $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$) на число a, сохранив знак неравенства, если $a > 0$, и изменив знак неравенства на противоположный, если $a < 0$ (см. п. 132), т. е. перейти к неравенству

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

(или $(x - x_1)(x - x_2) < 0$). Теперь остается воспользоваться тем, что произведение двух чисел положительно (отрицательно), если множители имеют одинаковые (разные) знаки.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + 5x + 2 > 0$.

Решение. Найдем корни трехчлена $2x^2 + 5x + 2$. Из уравнения $2x^2 + 5x + 2 = 0$ получаем $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, $2x^2 + 5x + 2 = 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, и мы приходим к неравенству $2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$ и далее $(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$. Выражения $x + 2$ и $x + \frac{1}{2}$ должны иметь одинаковые знаки, т. е.

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 2 < 0, \\ x + \frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x > -\frac{1}{2}$, а из второй $x < -2$.

Пример 2. Решить неравенство $7x + 10 \geqslant 3x^2$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $7x + 10 - 3x^2 \geqslant 0$ и, умножив обе части последнего неравенства на -1, получим $3x^2 - 7x - 10 \leqslant 0$. Корни квадратного трехчлена $3x^2 - 7x - 10$ таковы: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{10}{3}$. Разложив квадратный трехчлен на множители, получим $3(x+1)\left(x - \frac{10}{3}\right) \leqslant 0$ и далее $(x+1)\left(x - \frac{10}{3}\right) \leqslant 0$. От последнего неравенства переходим к совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x + 1 \leqslant 0, \\ x - \frac{10}{3} \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ x - \frac{10}{3} \leqslant 0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а из второй находим

$$-1 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}.$$

138. Графическое решение квадратных неравенств. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с ветвями, направленными вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$. При этом возможны три случая:

1) парабола пересекает ось x (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня);

2) парабола имеет вершину на оси x (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень);

3) парабола не пересекает ось x (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней).

Итого возможны шесть положений параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси x, — они представлены на рисунках 1.84—1.89. Опираясь на эти графические иллюстрации, можно решать квадратные неравенства.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + 5x + 2 > 0$.

Решение. Уравнение $2x^2 + 5x + 2 = 0$ имеет два корня: $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Парабола, служащая графиком функции $y = 2x^2 + 5x + 2$, имеет вид, изображенный на рисунке 1.84. Неравенство $2x^2 + 5x + 2 > 0$

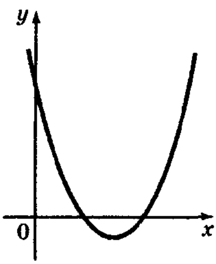


Рис. 1.84

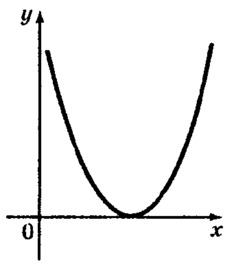


Рис. 1.85

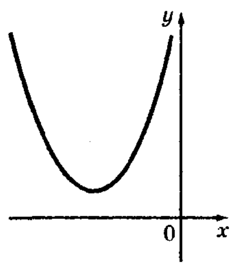


Рис. 1.86

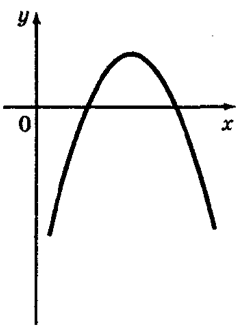


Рис. 1.87

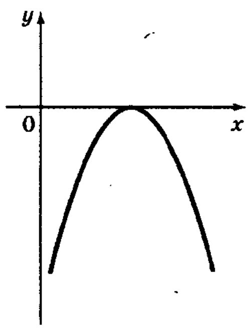


Рис. 1.88

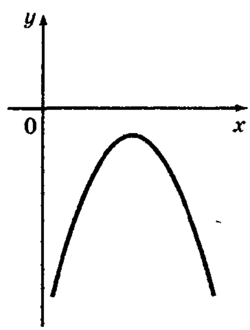


Рис. 1.89

выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси x: это будет при $x < x_1$ или при $x > x_2$, т. е. при $x < -2$ или при $x > -\frac{1}{2}$.

Значит, решения неравенства таковы: $x < -2$, $x > -\frac{1}{2}$ (см. пример 1 из п. 137).

Пример 2. Решить неравенство

$$3x^2 - 7x - 10 \leqslant 0.$$

Решение. Уравнение $3x^2 - 7x - 10 = 0$ имеет два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{10}{3}$. Парабола, служащая графиком функции $y = 3x^2 - 7x - 10$, имеет вид, изображенный на рисунке 1.84. Неравенство $3x^2 - 7x - 10 \leqslant 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат на оси x или ниже ее: это будет при x из промежутка $[x_1;\ x_2]$. Значит, множество решений неравенства есть отрезок $\left[-1;\ \frac{10}{3}\right]$ (см. пример 2 из п. 137).

Пример 3. Решить неравенство $-x^2 + 4x - 4 > 0$.

Решение. Уравнение $-x^2 + 4x - 4 = 0$ имеет один корень $x = 2$. Парабола, служащая графиком функции $y = -x^2 + 4x - 4$, имеет вид, изображенный на рисунке 1.88. Неравенство $-x^2 + 4x - 4 > 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси x. Таких точек нет; значит, неравенство не имеет решений.

Пример 4. Решить неравенство $-3x^2 + x - 5 < 0$.

Решение. Уравнение $-3x^2 + x - 5 = 0$ не имеет действительных корней. Парабола, служащая графиком функции $y = -3x^2 + x - 5$, имеет вид, изображенный на рисунке 1.89. Неравенство $-3x^2 + x - 5 < 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат ниже оси x. Так как вся парабола лежит ниже оси x, то неравенство выполняется при любых значениях x.

139. Решение рациональных неравенств методом интервалов. Решение рациональных неравенств вида $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ (вместо знака $>$ может быть и любой другой знак неравенства), где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, основано на следующем рассуждении.

Рассмотрим выражение $h(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, где $a < b < c < d$. Если $x > d$, то каждый из множителей $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$ положителен и, следовательно, на промежутке $(d;\ +\infty)$ имеем $h(x) > 0$. Если $c < x < d$, то $x - d < 0$, а остальные множители по-прежнему положительны. Значит, на интервале $(c;\ d)$ имеем $h(x) < 0$. Аналогично, на интервале $(b;\ c)$ будет $h(x) > 0$ и т. д. (рис. 1.90).

Изменение знаков $h(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (ее называют «*кривой знаков*»), которую чертят справа налево, начиная сверху (рис. 1.91). Эту иллюстрацию нужно понимать так: на тех промежутках, где эта кривая проходит выше координатной прямой, выполняется неравенство $h(x) > 0$, на тех же промежутках, где кривая проходит ниже прямой, имеем $h(x) < 0$.

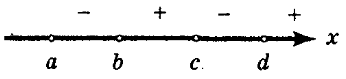


Рис. 1.90

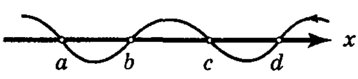


Рис. 1.91

Для проведенного выше рассуждения было несущественно количество линейных множителей в числителе и знаменателе, а также взаимное расположение корней числителя и знаменателя дроби на координатной прямой. Поэтому оно применимо для любой функции $y = f(x)$ вида

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_k)},$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k$ попарно различны. Изменение знаков функции $y = f(x)$ мы также можем иллюстрировать с помощью кривой знаков, которую чертят справа налево, начиная сверху, и проводят через все отмеченные на координатной прямой точки $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k$. На этом основан *метод интервалов*, который с успехом применяется для решения рациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(2x-3)(4x+5)} < 0.$$

Решение. Выполним преобразования левой части неравенства

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot 4\left(x+\frac{5}{4}\right)} < 0$$

и умножим обе части неравенства на 8; получим неравенство $\dfrac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)} < 0$ равносильное данному.

Изменение знаков функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)},$$

иллюстрируем с помощью кривой знаков (рис. 1.92). Значения x, при которых $f(x) < 0$ (заштриховано), удовлетворяют следующим неравенствам:

$$x < -5; -\sqrt{2} < x < -\frac{5}{4}; \frac{3}{2} < x < \sqrt{3}.$$

Это решения исходного неравенства.

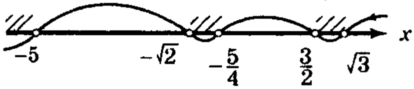


Рис. 1.92

Пример 2. Решить неравенство $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1$.

Решение. Имеем: $\frac{x^2-x-6}{x^2-1} - 1 < 0$ и далее $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)} > 0$.

Начертим кривую знаков для функции $y = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$ (рис. 1.93). С ее помощью находим решения неравенства:

$$-5 < x < -1; x > 1.$$

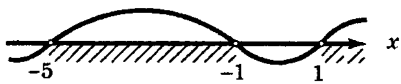


Рис. 1.93

Пример 3. Решить неравенство $\frac{(x-1)^5(x+2)^2}{x} \leqslant 0$.

Решение. Выражение $(x-1)^4(x+2)^2$ обращается в нуль при $x = 1$ и при $x = -2$, а при остальных значениях x оно положительно. Значения $x = 1$ и $x = -2$ удовлетворяют данному нестрогому неравенству, т. е. являются его решениями. Пусть теперь $x \neq 1$, $x \neq -2$, тогда $(x-1)^4(x+2)^2 > 0$, а потому, разделив обе части заданного неравенства на $(x-1)^4 \times$ $\times (x+2)^2$ и сохранив знак заданного неравенства, получим неравенство $\frac{x-1}{x} \leqslant 0$, равносильное исходному (см. п. 132). Полученное неравенство имеет решение $0 < x \leqslant 1$. В ответ нужно включить и отмеченное выше решение $x = -2$.

Ответ: $0 < x \leqslant 1$; $x = -2$.

140. Показательные неравенства. При решении неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ следует помнить, что показательная функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ (см. п. 70). Значит, в случае, когда $a > 1$, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$. В случае же, когда $0 < a < 1$, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.

Пример 1. Решить неравенство $2^{3x+7} < 2^{2x-1}$.

Решение. Здесь основание степени больше 1, поэтому, сравнивая показатели, запишем неравенство того же смысла $3x + 7 < 2x - 1$. Решив это неравенство, получим $x < -8$.

Пример 2. Решить неравенство

$$(0{,}04)^{5x-x^2-8} \leqslant 625.$$

Решение. Так как $625 = 25^2 = \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} = (0{,}04)^{-2}$,

то заданное неравенство можно записать в виде

$$(0{,}04)^{5x-x^2-8} \leqslant (0{,}04)^{-2}.$$

Так как $0 < 0{,}04 < 1$, то, сравнивая показатели, запишем неравенство противоположного смысла $5x - x^2 - 8 \geqslant -2$. Далее,

$$5x - x^2 - 8 + 2 \geqslant 0,$$

$$-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 \leqslant 0,$$

$$(x-2)(x-3) \leqslant 0,$$

$$2 \leqslant x \leqslant 3.$$

141. Логарифмические неравенства. При решении неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ следует помнить, что логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ (см. п. 72). Значит, в случае, когда $a > 1$, от исходного неравенства следует перейти к неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$. В случае же, когда $0 < a < 1$, от исходного неравенства следует перейти к неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$. При этом следует учитывать, что логарифмическая функция определена лишь на множестве положительных чисел. Значит, должны выполняться неравенства $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Таким образом, неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \tag{1}$$

а при $0 < a < 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что систему (1) можно упростить: неравенство $f(x) > 0$ вытекает из неравенств $f(x) > g(x)$, $g(x) > 0$, поэтому неравенство $f(x) > 0$ можно опустить, т. е. переписать систему (1) в виде

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Аналогично, систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример 1°. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x + 59) > -2.$$

Решение. Так как $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$, то данное неравенство можно переписать в виде $\log_{\frac{1}{3}} (2x + 59) > \log_{\frac{1}{3}} 9$. Далее имеем

$$\begin{cases} 2x + 59 > 0, \\ 2x + 59 < 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -29{,}5, \\ x < -25, \end{cases}$$

откуда ответ: $-29{,}5 < x < -25$.

Пример 2*. Решить неравенство

$$\lg (x + 2) < 2 - \lg (2x - 6).$$

Решение. Чтобы все логарифмы имели смысл, должны выполняться неравенства $x + 2 > 0$ и $2x - 6 > 0$. Используя свойства логарифмов, преобразуем заданное неравенство:

$$\lg (x + 2) + \lg (2x - 6) < 2,$$

$$\lg (x + 2) (2x - 6) < \lg 100.$$

Таким образом, заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ 2x - 6 > 0, \\ (x + 2)(2x - 6) < 100. \end{cases}$$

Имеем последовательно:

$$\begin{cases} x > -2, \\ x > 3, \\ x^2 - x - 56 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ (x + 7)(x - 8) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ -7 < x < 8. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 1.94) устанавливаем, что множество решений последней системы, а значит, и заданного неравенства есть интервал (3; 8).

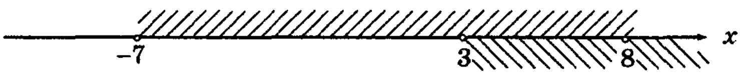


Рис. 1.94

142. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными. Рассмотрим неравенство $f(x; y) > g(x; y)$. *Решением неравенства с двумя переменными* называют пару значений переменных, которая обращает неравенство с переменными в верное числовое неравенство. Известно, что пара действительных чисел (x; y) однозначно определяет точку координатной плоскости. Это дает возможность изобразить решения неравенства или системы неравенств с двумя переменными геометрически, в виде некоторого множества точек координатной плоскости.

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x + y - 1 > 0$.

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду $y > -x + 1$. Построим на координатной плоскости прямую $y = -x + 1$. Так как ордината любой точки, лежащей выше прямой $y = -x + 1$, больше, чем ордината точки, имеющей такую же абсциссу, но лежащей на прямой, то множество точек плоскости, расположенных выше этой прямой, и будет геометрическим изображением решений заданного неравенства (рис. 1.95).

Пример 2. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x(x - 2) \leqslant y - 3$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $y \geqslant x^2 - 2x + 3$. Построим на координатной плоскости параболу — график функции $y = x^2 - 2x + 3$.

Так как ордината любой точки, лежащей выше параболы $y = x^2 - 2x + 3$, больше, чем ордината точки, имеющей ту же абсциссу, но лежащей на параболе, и так как неравенство $y \geqslant x^2 - 2x + 3$ нестрогое, то геометрическим изображением решений заданного неравенства будет множество точек плоскости, лежащих на параболе $y = x^2 - 2x + 3$ и выше нее (рис. 1.96).

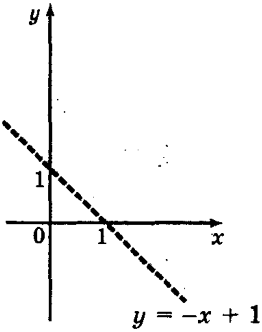


Рис. 1.95

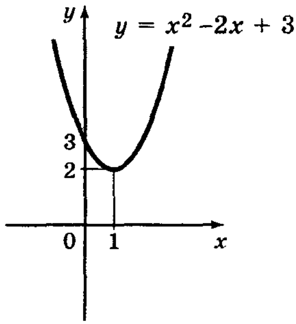


Рис. 1.96

Пример 3. Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ xy > 4, \\ x + y < 5. \end{cases}$$

Решение. Геометрическим изображением решений системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ является множество точек первого координатного угла (рис. 1.97). Геометрическим изображением решений неравенства $x + y < 5$ или $y < 5 - x$ является множество точек,

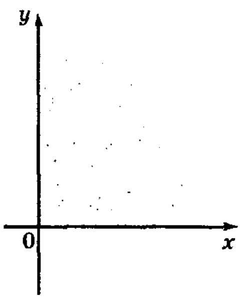


Рис. 1.97

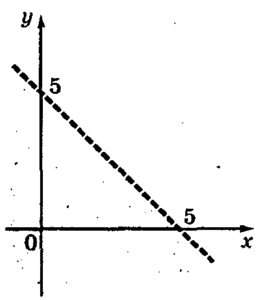


Рис. 1.98

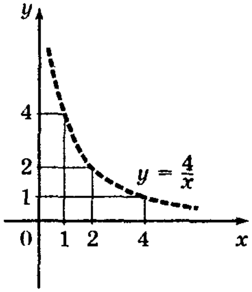


Рис. 1.99

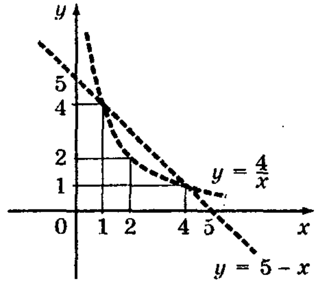


Рис. 1.100

лежащих ниже прямой, служащей графиком функции $y = 5 - x$ (рис. 1.98). Наконец, геометрическим изображением решений неравенства $xy > 4$ или, поскольку $x > 0$, неравенства $y > \frac{4}{x}$ является множество точек, лежащих выше ветви гиперболы, служащей графиком функции $y = \frac{4}{x}$ (рис. 1.99). В итоге получаем множество точек координатной плоскости, лежащих в первом координатном углу ниже прямой, служащей графиком функции $y = 5 - x$, и выше гиперболы, служащей графиком функции $y = \frac{4}{x}$ (рис. 1.100).

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 17. Предел функции

143. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$. Горизонтальная асимптота. Число b называют *пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к $+\infty$*, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, найдется число $M > 0$ такое, что для всех $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Геометрически это означает, что график функции $y = f(x)$ при выборе достаточно больших значений x безгранично приближается к прямой $y = b$ (рис. 1.101), т. е. расстояние от точки графика до прямой $y = b$ по мере удаления абсциссы x от начала координат может быть сделано меньше любого числа $\varepsilon > 0$.

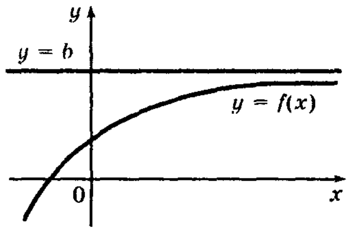
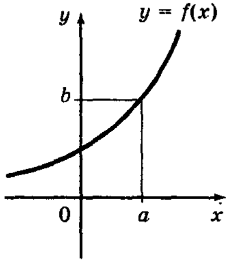


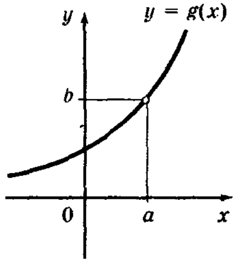
Рис. 1.101

144. Предел функции при $x \to a$. Непрерывные функции. Рассмотрим функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$, графики которых изображены на рисунках 1.102–1.104. Это разные функции, они отлича-



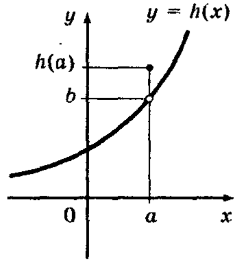
а)

Рис. 1.102



б)

Рис. 1.103



в)

Рис. 1.104

ются своим поведением в точке $x = a$. Если же $x \neq a$, то $f(x) = g(x) = h(x)$. Во всех трех случаях замечаем, что чем ближе x к a, тем меньше отличается значение функции $f(x)$, или $g(x)$, или $h(x)$ от числа b — это отличие характеризуется выражением соответственно $| f(x) - b |$, $| g(x) - b |$, $| h(x) - b |$. Для любой из рассматриваемых функций говорят, что *предел функции при стремлении x к a равен b*; пишут соответственно: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$.

Подчеркнем еще раз, что значение функции в самой точке a (и даже сам факт существования или несуществования этого значения) не принимается во внимание.

Определение формулируется так: число b называют пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к a, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, для всех достаточно близких к a значений x, т. е. для всех x из некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму эту точку, будет выполняться неравенство $| f(x) - b | < \varepsilon$.

Вернемся еще раз к рисунку 1.102. Замечаем, что для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 1.102, выполняется равенство $b = f(a)$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке a*. Если функция непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, то ее называют *непрерывной на этом интервале*. Если функция непрерывна на интервале $(a; b)$, определена в точках a и b и при стремлении точки x интервала $(a; b)$ к точкам a и b значения функции $y = f(x)$ стремятся соответственно к значениям $f(a)$, $f(b)$, то функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* $[a; b]$.

§ 18. Производная и ее применения

145. Приращение аргумента. Приращение функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x и x_1. Разность $x_1 - x$ называют *приращением аргумента*, а разность $f(x_1) - f(x)$ — *приращением функции* при переходе от значения аргумента x к значению аргумента x_1. Приращение аргумента обозначают Δx; значит, $\Delta x = x_1 - x$, т. е. $x_1 = x + \Delta x$. Приращение функции обозначают Δf или Δy:

$$\Delta f = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Например, найдем приращение функции $y = x^3$ при переходе от значения аргумента x к значению $x_1 = x + \Delta x$.

Имеем $f(x) = x^3$, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$. Значит,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Итак, $\Delta f = (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)\,\Delta x$. По этой формуле можно вычислять значение Δf для любых заданных x и Δx. Например, при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$ имеем:

$$\Delta f = f(2{,}1) - f(2) = (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2) \cdot 0{,}1 = 1{,}261;$$

при $x = 1$, $\Delta x = -0{,}2$ получаем:

$$\Delta f = f(0{,}8) - f(1) = (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot (-0{,}2) +$$
$$+ (-0{,}2)^2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}488.$$

146. Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой окрестности этой точки. Пусть Δx — приращение аргумента, причем такое, что точка $x + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности точки x, а Δf — соответствующее приращение функции, т. е.

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Если существует предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, то этот предел называют *значением производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x и обозначают $f'(x)$ или y', а функцию $y = f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* x.

Итак,

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

$f'(x)$ — это новая функция, определенная во всех таких точках x, в которых существует указанный выше предел; эту функцию называют *производной функции* $y = f(x)$.

Пример 1. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2$.

Решение.

$$f(2) = 2^2 = 4, f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2,$$

$$\Delta f = f(2 + \Delta x) - f(2) = (2 + \Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4.$

Значит, $f'(2) = 4$.

Опираясь на определение, можно рекомендовать следующий план отыскания производной функции $y = f(x)$:

1) фиксируем значение x, находим $f(x)$;

2) даем аргументу x приращение Δx, находим $f(x + \Delta x)$;

3) вычисляем приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$;

4) составляем отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;

5) находим предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^3$.

Решение:

1) $f(x) = x^3$;

2) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$;

3) $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$ (см. п. 145);

4) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2$.

Итак, $(x^3)' = 3x^2$.

147. Формулы дифференцирования. Таблица производных. Операцию отыскания производной называют *дифференцированием*. В п. 146 получена одна из формул дифференцирования: $(x^3)' = 3x^2$. По такому же плану можно вывести остальные формулы, которые приведены ниже.

1. $(C)' = 0.$
2. $(kx + b)' = k.$
3. $(x^r)' = rx^{r-1}.$
4. $(e^x)' = e^x.$
5. $(a^x)' = a^x \ln a.$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
8. $(\sin x)' = \cos x.$
9. $(\cos x)' = -\sin x.$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Например, $(2x-3)' = 2$ (формула 2); $(x^{10})' = 10x^9$, $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}$, $(\sqrt[5]{x^3})' = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ (формула 3);

$(5^x)' = 5^x \ln 5$ (формула 4); $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ (формула 7).

148. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Если функции u и v дифференцируемы в точке x, то:

1°. Их сумма дифференцируема в точке x и

$$(u + v)' = u' + v'$$

(*теорема о дифференцировании суммы*).

2°. Функция Cu, где C — постоянная, дифференцируема в точке x и

$$(Cu)' = Cu'$$

(*теорема о вынесении постоянного множителя за знак производной*).

3°. Произведение функций u и v дифференцируемо в точке x и

$$(uv)' = u'v + uv'$$

(*теорема о дифференцировании произведения*).

4°. Частное функций u и v дифференцируемо в точке x и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

(*теорема о дифференцировании частного; здесь* $v(x) \neq 0$).

Пример 1. Найти производную функции

$$y = 2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5.$$

Решение. Воспользовавшись теоремами **1°** и **2°**, получим

$$\left(2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5\right)' = (2\sin x)' + \left(-\frac{1}{3}\cos x\right)' + 5' =$$

$$= 2(\sin x)' - \frac{1}{3}(\cos x)' + 5'.$$

Осталось применить соответствующие формулы дифференцирования (см. п. 147). Получим

$$2\cos x - \frac{1}{3}(-\sin x) + 0 = 2\cos x + \frac{1}{3}\sin x.$$

Итак, $\left(2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5\right)' = 2\cos x + \frac{\sin x}{3}$.

Пример 2. Найти $\left(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x\right)'$.

Решение. Воспользовавшись теоремой о дифференцировании произведения, получим

$$\left(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' \log_3 x + x^{\frac{2}{5}} (\log_3 x)'.$$

Осталось применить соответствующие формулы дифференцирования (см. п. 147). Получим $\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\log_3 x + x^{\frac{2}{5}}\cdot\frac{1}{x\ln 3}$.

Итак, $\left(x^{\frac{2}{5}}\log_3 x\right)' = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\log_3 x + \frac{x^{-\frac{3}{5}}}{\ln 3} = \frac{0{,}4\ln x+1}{\sqrt[5]{x^3}\cdot\ln 3}$.

Пример 3. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \frac{2^x}{x^2+1}$.

Решение. Сначала найдем $f'(x)$. Воспользовавшись теоремой о дифференцировании частного, получим

$$f'(x)=\frac{(2^x)'(x^2+1)-2^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2^x\ln 2\cdot(x^2+1)-2^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}.$$

Теперь вычислим $f'(0)$:

$$f'(0)=\frac{2^0\ln 2\cdot(0^2+1)-2^0\cdot 2\cdot 0}{(0^2+1)^2}=\ln 2.$$

149. Физический смысл производной. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения, то $s'(t)$ выражает *скорость движения в момент времени* t, т. е. $v = s'(t)$ (мгновенная скорость).

Например, закон свободного падения тела выражается зависимостью $s = \frac{gt^2}{2}$. Тогда скорость падения в момент t такова:

$$v=s'=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=\frac{g}{2}(t^2)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Вообще производная функции $y = f(x)$ в точке x выражает *скорость изменения функции в точке* x, т. е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$. В этом состоит *физический смысл производной.* Например, для функции $y = x^2$ имеем $f'(x) = 2x$, при $x = 2$ имеем $f'(2) = 4$, а при $x = 3$ имеем $f'(3) = 6$. Это значит, что в точке $x = 2$ функция изменяется в 4 раза быстрее аргумента, а в точке $x = 3$ — в 6 раз быстрее.

150. Вторая производная и ее физический смысл. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную. Производная — это новая функция, которая, в свою очередь, может иметь производную. Производную $f'(x)$ называют *второй производной* функции $y = f(x)$ и обозначают $f''(x)$ или y''.

Пример 1. Найти y'', если $y = x^{10}$.

Решение. Имеем: $(x^{10})' = 10x^9$, а $(10x^9)' = 90x^8$. Итак, $(x^{10})'' = 90x^8$.

Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения, то вторая производная выражает скорость изменения скорости этого движения, т. е. *ускорение* $a = s''(t)$. В этом состоит *физический смысл второй производной.*

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s = \dfrac{1}{2t-1}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути.

Решение. По второму закону Ньютона, $F = ma$, где F — сила, действующая на тело, a — ускорение, m — масса; $a = s''$.

Имеем:

$$s' = ((2t-1)^{-1})' = -(2t-1)^{-2} \cdot (2t-1)' = -2(2t-1)^{-2};$$

$$s'' = (-2(2t-1)^{-2})' = -2(-2) \cdot (2t-1)^{-3} \cdot (2t-1)' =$$

$$= 8(2t-1)^{-3} = \frac{8}{(2t-1)^3}.$$

Значит, $F = ma = \dfrac{8m}{(2t-1)^3} = 8\,ms^3$, т. е. сила F пропорциональна s^3 ($8m$ — коэффициент пропорциональности).

151. Касательная к графику функции. *Касательной к* графику функции $y = f(x)$, дифференцируемой в точке $x = a$, называют прямую, проходящую через точку $(a;\ f(a))$ и имеющую угловой коэффициент $f'(a)$.

Геометрический смысл этого определения состоит в следующем. Рассмотрим график функции $y = f(x)$, дифференцируемой в точке a, выделим на нем точку $M\ (a;\ f(a))$ и проведем секущую MP_2, где P_2 — точка графика, соответствующая значению аргумента $a + \Delta x$ (рис. 1.105). Угловой коэффициент прямой MP_2 вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. п. 145).

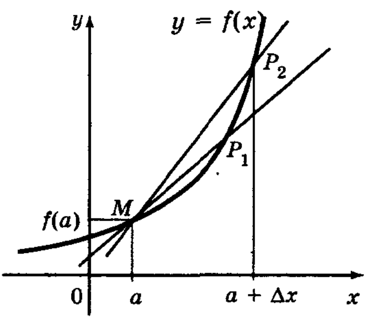


Рис. 1.105

Если точку P двигать по графику, приближая ее к точке M, то прямая MP начнет поворачиваться вокруг точки M (на рис. 1.105 указаны два положения точки

P — P_1 и P_2). Чаще всего в этом процессе секущая MP стремится занять некоторое предельное положение. Это предельное положение представляет собой прямую, с которой практически сливается график функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки a; эта прямая и есть касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$. В самом деле, угловой коэффициент такой предельной прямой (обозначим его k) получается из углового коэффициента секущей в процессе предельного перехода от P к M:

$$k = \lim_{P \to M} k_{\text{сек}}.$$

Но условие $P \to M$ можно заменить условием $\Delta x \to 0$, а вместо $k_{\text{сек}}$ написать $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. В итоге получаем

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ — это значение производной функции $y = f(x)$ в фиксированной точке $x = a$, т. е. $f'(a)$ (см. п. 146).

Итак, $k = f'(a)$, т. е. *значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$* (рис. 1.106). В этом состоит *геометрический смысл производной.*

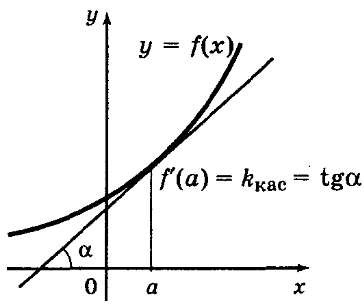


Рис. 1.106

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то в этой точке к графику можно про-

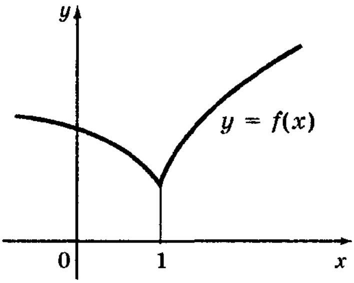


Рис. 1.107

вести касательную; верно и обратное: если в точке $x = a$ к графику функции $y = f(x)$ можно провести невертикальную касательную, то функция дифференцируема в точке x.

Это позволяет по графику функции находить точки, в которых функция имеет или не имеет производную. Так, функция, график которой изображен на рисунке 1.107, дифференцируема во всех точках, кроме точки $x = 1$; в этой точке график имеет заострение и касательную провести нельзя.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

Пример 1•. Найти угол, который образует с осью x касательная к графику функции $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$, проведенная в точке $x = 0$.

Решение. Имеем: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 3x \cdot 3 = \sqrt{3} \cos 3x$;

$$a = 0,\ f'(a) = \sqrt{3} \cos 0 = \sqrt{3}.$$

Значит, $k_{\text{кас.}} = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, откуда заключаем, что искомый угол α равен $60°$.

Пример 2. К графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = -x + 2$.

Решение. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны (см. п. 65). Угловой коэффициент прямой $y = -x + 2$ равен -1, а угловой коэффициент касательной равен $f'(a)$. Значит, точку касания мы можем найти из уравнения $f'(a) = -1$.

Имеем $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$; $f'(x) = \frac{(x+2)'(x-2) - (x+2)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{1(x-2) - 1(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$; значит, $f'(a) = -\frac{4}{(a-2)^2}$.

Решим уравнение $-\frac{4}{(a-2)^2} = -1$. Имеем: $(a-2)^2 = 4$; значит, либо $a - 2 = 2$, откуда $a_1 = 4$, либо $a - 2 = -2$, откуда $a_2 = 0$.

Если $a = 4$, то $f(a) = \frac{4+2}{4-2} = 3$ и уравнение касательной имеет вид $y = 3 - (x - 4)$, т. е. $y = 7 - x$.

Если $a = 0$, то $f(a) = \frac{0+2}{0-2} = -1$ и уравнение касательной имеет вид: $y = -1 - (x - 0)$, т. е. $y = -x - 1$.

Пример 3. Через точку $O(0; 0)$ провести касательную к графику функции $y = \ln x$.

Решение. Здесь, как и в предыдущем примере, неизвестна точка касания $x = a$. Чтобы ее найти, составим уравнение касательной в общем виде. Имеем $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$; значит, $f(a) = \ln a$, $f'(a) = \frac{1}{a}$ и *уравнение касательной* имеет вид

$$y = \ln a + \frac{1}{a}(x - a). \quad (2)$$

По условию касательная должна проходить через точку $O(0; 0)$, т. е. координаты точки $O(0; 0)$ должны удовлетворять уравнению (2). Подставив $x = 0$, $y = 0$ в уравнение (2), получим $0 = \ln a + \frac{1}{a}(0 - a)$, откуда $0 = \ln a - 1$, $\ln a = 1$, $a = e$. Если теперь в уравнение (2) подставить найденное значение точки касания $a = e$, получим $y = \ln e + \frac{1}{e}(x - e)$, т. е.

$$y = 1 + \frac{x}{e} - 1,\ y = \frac{x}{e}.$$

Это — уравнение искомой касательной (рис. 1.108).

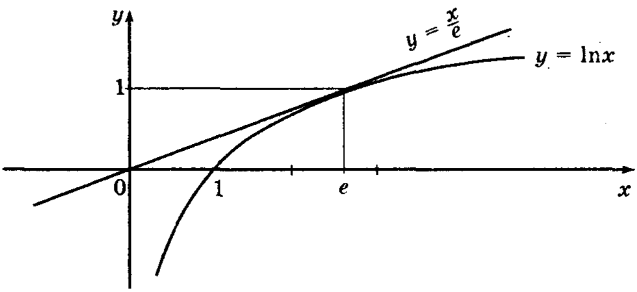


Рис. 1.108

Пример 4•. На рисунке 1.109 изображены графики функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 2. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 2$.

Решение. Значение производной функции в данной точке равно тангенсу угла между касательной к ее графику, проведенной в этой точке, и осью абсцисс. Касательная проходит через точки $(0; -3)$ и $(2; 1)$, поэтому искомый тангенс равен: $\frac{-3-1}{0-2} = 2$.

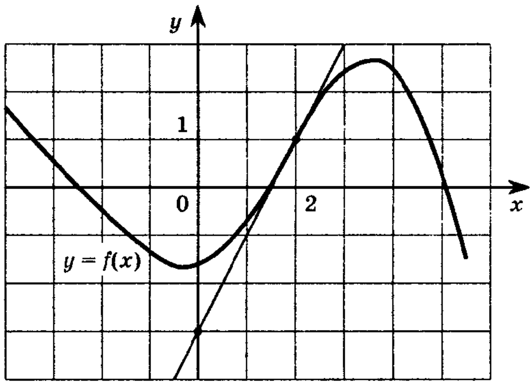


Рис. 1.109

152. Применение производной к исследованию функций на монотонность. Производная позволяет во многих случаях сравнительно просто исследовать функцию на монотонность. Достигается это с помощью следующих двух теорем:

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет неотрицательную производную ($f'(x) \geqslant 0$), причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется не более чем в конечном числе точек этого промежутка. Тогда функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в промежутке x и во всех внутренних точках этого промежутка имеет неположительную производную ($f'(x) \leqslant 0$), причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется не более чем в конечном числе точек этого промежутка. Тогда функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию

$$y = x^5 + x^3 + 1.$$

Решение. Имеем: $y' = 5x^4 + 3x^2$. Справедливо неравенство $5x^4 + 3x^2 \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место лишь в одной точке $x = 0$. Значит, по теореме 1 функция $y = x^5 + x^3 + 1$ возрастает на всей числовой прямой.

Пример 2. Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2\sin x - 3x.$$

Решение. Имеем $y' = 2\cos x - 3$. Так как $|\cos x| \leqslant 1$, то $2\cos x - 3 < 0$ при всех x. Значит, по теореме 2 функция $y = 2\sin x - 3x$ убывает на всей числовой прямой.

Пример 3°. Исследовать на монотонность функцию

$$y = \frac{x^2}{2} - 3\ln(x - 2).$$

Решение. Имеем $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 \cdot \frac{1}{x-2} = x - \frac{3}{x-2} =$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}.$$

Знаки выражения $\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$ меняются так, как показано на рисунке 1.110 (см. п. 139). Но область определения исследуемой функции задается неравенством $x > 2$. Значит, из показанных на рисунке четырех промежутков нас интересуют только два: промежуток $(2;\ 3)$ — на нем $y' < 0$ и, следовательно, функция на этом интервале убывает, —

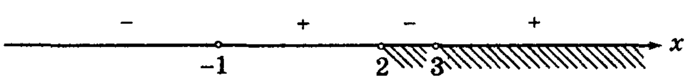


Рис. 1.110

и промежуток (3; $+\infty$) — на нем $y' > 0$ и, следовательно, функция на этом промежутке возрастает.

Указанные два промежутка имеют общую концевую точку $x = 3$. В точке $x = 3$ заданная функция определена и непрерывна. В таких случаях при исследовании функции на монотонность концевую точку включают в промежуток монотонности.

О т в е т. Функция убывает на полуинтервале $(2; 3]$ и возрастает на луче $[3; +\infty)$.

П р и м е р 4•. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

Р е ш е н и е. Решив уравнение $-5t^2 + 18t = 9$, вычислим время, когда камень находился точно на высоте 9 метров. Корни этого уравнения: 3 и 0,6, т. е. камень находился на высоте не менее 9 метров $3 - 0{,}6 = 2{,}4$ (с).

153. Применение производной к исследованию функций на экстремум. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) *в точке* $x = a$, если у этой точки существует окрестность, в которой $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) для $x \neq a$.

Так, функция, график которой изображен на рисунке 1.111, имеет максимум в точках x_1 и x_3 и минимум в точках x_2 и x_4.

Точки максимума и минимума объединяют общим термином — *точки экстремума*.

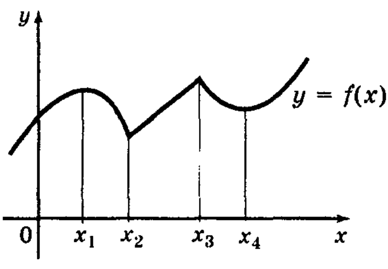


Рис. 1.111

Обратимся еще раз к рисунку 1.111. Замечаем, что в точках x_1 и x_4 к графику функции можно провести касательные, причем эти касательные будут параллельны оси x, а значит, угловой коэффициент каждой из касательных равен нулю; итак, $f'(x_1) = 0$, $f'(x_4) = 0$. В точках же x_2 и x_3 касательную к графику провести нельзя; значит, в этих точках производная функции $y = f(x)$ не существует (см. п. 151). Таким образом, в точках экстремума на рисунке 1.111 производная либо равна нулю, либо не существует. Это — общее положение, подтверждаемое следующей теоремой.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = a$, то либо $f'(a) = 0$, либо $f'(a)$ не существует (*необходимое условие экстремума*).

Точки, в которых $f'(a) = 0$, называют *стационарными*, а точки, в которых $f'(a)$ не существует и которые принадлежат области определения функции, называют *критическими*. Теорема 3 означает, что экстремумы функций могут достигаться только в стационарных или критических точках. Обратная теорема, однако, неверна: не во всякой стационарной или критической точке функция имеет экстремум.

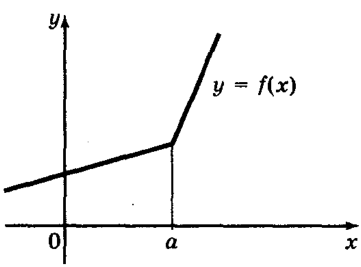


Рис. 1.112

Так, функция $y = x^3$ имеет одну стационарную точку $x = 0$ (в ней $y' = 3x^2 = 0$), но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Функция, график которой изображен на рисунке 1.112, имеет критическую точку $x = a$ — это точка излома, в ней y' не существует, но в этой точке нет ни максимума, ни минимума.

Как узнать, когда стационарная или критическая точка функции является точкой экстремума? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $x = a$ — стационарная или критическая точка функции $y = f(x)$ и пусть существует интервал $(b; c)$, содержащий точку a внутри себя и такой, что на каждом из интервалов $(b; a)$ и $(a; c)$ производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак. Тогда:

1) если на $(b; a)$ производная $y' > 0$, а на $(a; c)$ производная $y' < 0$, то $x = a$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

2) если на $(b; a)$ производная $y' < 0$, а на $(a; c)$ производная $y' > 0$, то $x = a$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

3) если и на $(b; a)$, и на $(a; c)$ производная $y' < 0$ или $y' > 0$, то $x = a$ не является точкой экстремума функции $y = f(x)$ (*достаточное условие экстремума*).

Из теорем 4 и 5 вытекает следующее правило исследования функции $y = f(x)$ на экстремум:

1) найти область определения функции;

2) найти $f'(x)$;

3) найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$;

4) найти точки, в которых $f'(x)$ не существует;

5) отметить на координатной прямой все стационарные и критические точки и область определения функции $y = f(x)$; получатся промежутки области определения функции, на каждом из которых

производная функции $y = f(x)$ сохраняет постоянный знак;

6) определить знак y' на каждом из промежутков, полученных в п. 5;

7) сделать выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из выделенных точек в соответствии с теоремой 9.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1.$$

Решение:

1) Функция определена при всех x.

2) $y' = 6x^2 - 30x + 36$.

3) Из уравнения $6x^2 - 30x + 36 = 0$ находим $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (стационарные точки).

4) y' существует при всех x (критических точек нет).

5) Отметим точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ на координатной прямой (рис. 1.113).

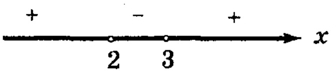


Рис. 1.113

6) $y' = 6(x - 2)(x - 3)$. Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рисунке 1.113.

7) При переходе через точку $x = 2$ слева направо производная y' меняет знак с «+» на « – », значит, $x = 2$ — точка максимума; при переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, $x = 3$ — точка минимума. В точке $x = 2$ имеем $y_{\max} = 29$, в точке $x = 3$ имеем $y_{\min} = 28$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$y = \ln(x - 2) + \ln x.$$

Решение:

1) Область определения функции задается неравенством $x > 2$.

2) $y' = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-2}{x(x-2)}$.

3) в области определения функции, т. е. при $x > 2$, нет ни стационарных, ни критических точек; значит, точек экстремума у функции нет.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{x^2-6x+9}{x-1}$.

Решение:

1) Область определения $x \neq 1$.

2) $$y' = \frac{(x^2-6x+9)'(x-1)-(x^2-6x+9)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{(2x-6)(x-1)-(x^2-6x+9)\cdot 1}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{(x-3)(2(x-1)-(x-3))}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

3) $y' = 0$ при $x = 3$ или при $x = -1$.

4) y' не существует при $x = 1$, но эта точка не принадлежит области определения функции.

5) Отметим на координатной прямой точки $x = -1$, $x = 3$ и точку $x = 1$ (рис. 1.114).

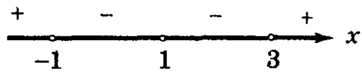


Рис. 1.114

6) Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рисунке 1.114.

7) $x = -1$ — точка максимума, $y_{\max} = -8$.

$x = 3$ — точка минимума, $y_{\min} = 0$.

Пример 4$^\bullet$. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x + 3$ на отрезке $[-1; 3]$.

Решение. Найдем производную данной функции $y' = (x^3 - 12x + 3)' = 3x^2 - 12$, приравняв ее к нулю, получим корни: ± 2. Отрезку $[-1; 3]$ принадлежит число 2. Вычислив значение данной функции в этой точке и на концах отрезка: $y(2) = (2)^3 - 24 + 3 = -13$; $y(3) = 3^3 - 36 + 3 = -6$, установили, что наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x + 3$ на отрезке $[-1; 3]$ равно -13.

154. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке. Говорят, что функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X, достигает на нем своего *наибольшего* (*наименьшего*) *значения*, если существует точка a, принадлежащая этому промежутку, такая, что для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(a)$ ($f(x) \geqslant f(a)$).

Обозначения соответственно: $y_{\text{наиб.}}$, $y_{\text{наим.}}$.

Теорема 5. Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Наибольшее значение M и наименьшее значение m непрерывной функции могут достигаться как внутри отрезка, так и на его концах (рис. 1.115). Ес-

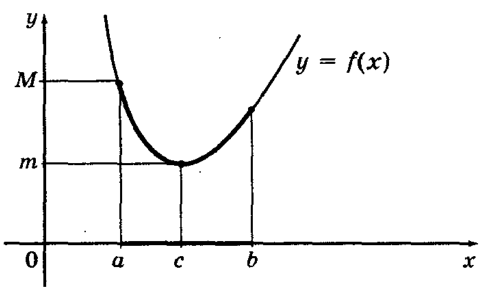


Рис. 1.115

ли наибольшего (наименьшего) значения функция достигает во внутренней точке отрезка, то эта точка является точкой экстремума; впрочем, для практики достаточно того, что эта точка стационарная или критическая.

Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1) найти $f'(x)$;

2) найти точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, и отобрать из них те, что лежат внутри отрезка $[a; b]$;

3) вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, полученных в п. 2, и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее; они и будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Пример•. Найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 225$ на отрезке $[0; 6]$.

Решение:

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

2) y' существует при всех x. Найдем точки, в которых $y' = 0$. Имеем:

$$3x^2 - 6x - 45 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

Отрезку $[0; 6]$ принадлежит лишь точка $x = 5$.

3) вычислим значения функции в точках 0, 5, 6:

x	0	5	6
y	225	50	63

8-1707и

Наибольшим из найденных значений функции является число 225, наименьшим — число 50. Итак, $y_{\text{наиб.}} = 225$, $y_{\text{наим.}} = 50$.

155. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин удобно решать по следующему п л а н у.

1) Выявляют оптимизируемую величину (т. е. величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти) и обозначают ее буквой y (или S, p, r, R и т. д. в зависимости от сюжета задачи).

2) Одну из неизвестных величин (сторону, угол и т. д.) объявляют независимой переменной и обозначают буквой x; устанавливают реальные границы изменения x в соответствии с условиями задачи.

3) Исходя из конкретных условий данной задачи, выражают y через x и известные величины.

4) Для полученной на третьем шаге функции $y = f(x)$ находят наибольшее или наименьшее значение (в зависимости от требований задачи) по промежутку реального изменения x, найденному на втором шаге.

5) Интерпретируют результат, полученный на четвертом шаге, для данной конкретной задачи.

На первых трех этапах составляется, как принято говорить, *математическая модель* задачи. Здесь часто успех решения зависит от разумного выбора независимой переменной. Важно, чтобы было сравнительно нетрудно выразить y через x. На четвертом этапе составленная математическая модель исследуется чаще всего с помощью производной, реже элементарными способами. В момент такого исследования сюжет самой задачи, послужившей отправной точкой для математической модели, исследователя не интересует. И лишь когда закончится решение задачи в рамках составленной математической модели, полученный результат интерпретируется для исходной задачи (пятый этап).

Пример 1. В степи, в 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшей к поисковой партии точки шоссе, находится райцентр. Поисковая партия отправляет курьера-велосипедиста в райцентр. Каков должен быть маршрут следования курьера, чтобы он прибыл в райцентр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе — 10 км/ч?

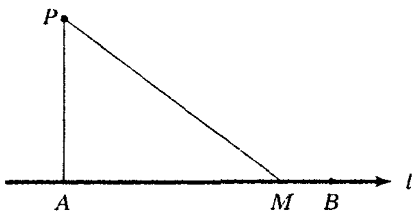


Рис. 1.116

Решение. Сделаем чертеж. На рисунке 1.116 точка P означает местонахождение поисковой партии, прямая l — шоссе, B — райцентр, $PA = 9$ км, $AB = 15$ км, PMB — маршрут следования курьера, причем положение точки M между A и B пока неизвестно.

Будем решать задачу поэтапно.

1. Оптимизируемая величина — время t движения курьера из P в B; надо найти $t_{\text{наим}}$.

2. Положим $AM = x$. По смыслу задачи точка M может занять любое положение между A и B, не исключая самих точек A и B. Значит, реальные границы изменения x таковы: $0 \leqslant x \leqslant 15$.

3. Выразим t через x. Имеем: $PM = \sqrt{PA^2 + AM^2} = \sqrt{81 + x^2}$. Этот путь велосипедист едет со скоростью 8 км/ч, т. е. время t_1, за которое велосипедист

проходит путь, выражается формулой $t_1 = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8}$.

Далее, $MB = 15 - x$. Этот путь велосипедист едет со скоростью 10 км/ч, т. е. время t_2, за которое он проезжает этот путь, выражается формулой $t_2 = \frac{15 - x}{10}$. Суммарное время t, за которое он проезжает весь путь, равно $t_1 + t_2$, т. е. $t = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}$.

4. Нужно найти наименьшее значение функции

$$t = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}$$

на отрезке [0; 15]. Используем для этого план из п. 218:

1) $t' = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} (81 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{10} (-1) = \frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10}$.

2) t' существует при всех x. Найдем точки, в которых $t' = 0$. Имеем:

$$\frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0,$$

$$5x = 4\sqrt{81 + x^2},$$

$$25x^2 = 16(81 + x^2),$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81,$$

$$x = 4 \cdot 3 = 12.$$

Значение $x = 12$ принадлежит отрезку [0; 15].

3) Составим таблицу значений функции, куда включим значения функции на концах отрезка и в найденной стационарной точке:

x	0	12	15
t	$\frac{105}{40}$	$\frac{87}{40}$	$\frac{5\sqrt{306}}{40}$

$$t_{\text{наим.}} = \frac{87}{40}.$$

Четвертый этап решения задачи закончен, нам осталось интерпретировать полученный результат применительно к исходной задаче.

5. Время $t_{\text{наим.}}$ достигается при $x = 12$. Значит, велосипедисту надо ехать по такому маршруту PMB, чтобы расстояние между точками A и M по шоссе было равно 12 км.

Пример 2. Через фиксированную точку M внутри данного угла провести прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади (рис. 1.117).

Решение (по этапам).

1. Оптимизируемая величина — площадь S треугольника AOB.

2. Проведем $DM \parallel OB$, $MK \parallel OA$. Положим $KB = x$; реальные границы изменения x таковы: $0 < x < +\infty$.

3. Поскольку M — фиксированная точка, отрезки DM и KM тоже фиксированы; положим $DM = a$, $KM = b$ и выразим S через x, a, b.

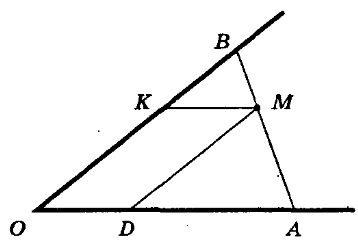


Рис. 1.117

Рассмотрим треугольники MKB и AOB, они подобны; значит, $\frac{MK}{AO} = \frac{KB}{OB}$, т. е. $\frac{b}{AO} = \frac{x}{a+x}$. Отсюда находим $AO = \frac{b(a+x)}{x}$.

Далее имеем $S = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha$, где $\alpha = \angle AOB$.

Значит, $S = \frac{1}{2} \frac{b(a+x)}{x} (a+x)\sin\alpha = \frac{b\sin\alpha}{2} \frac{(a+x)^2}{x}$ (математическая модель задачи составлена).

4. Рассмотрим функцию $S = k \frac{(a+x)^2}{x}$, $0 < x < +\infty$, где $k = \frac{b\sin\alpha}{2}$. Найдем ее наименьшее значение:

1) $S' = k \frac{2(a+x)x - (a+x)^2}{x^2} = k \cdot \frac{(a+x)(x-a)}{x^2}$;

2) производная не существует в точке $x = 0$, а обращается в нуль в точках $x = -a$, $x = a$. Из этих трех точек промежутку $(0; +\infty)$ принадлежит лишь точка $x = a$;

3) $x = a$ — единственная стационарная точка, принадлежащая промежутку $(0; +\infty)$, причем точка минимума. Значит, по теореме 11 (п. 154), наименьшее значение функции достигается именно в точке $x = a$;

5. Вернемся к исходной геометрической задаче. Если $x = KB = a$, то, поскольку $OK = a$, MK — средняя линия треугольника AOB; значит, M — середина AB. Таким образом, чтобы от сторон угла отсечь треугольник наименьшей площади, надо провести через точку M прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился в точке M пополам.

§ 19. Первообразная

156. Первообразная. Функцию $y = F(x)$ называют *первообразной* для функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для любого x из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Примеры.

1. Пусть $f(x) = x^3$. Тогда первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x) = \frac{x^4}{4}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$.

2. Пусть $f(x) = \sin 3x$. Тогда первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$, так как $F'(x) = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' = -\frac{1}{3}\,3\,(-\sin 3x) = \sin 3x = f(x)$.

Для $f(x) = x^3$ в примере 1 мы нашли первообразную $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Это не единственное решение задачи. Так, в качестве первообразной можно было взять и $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 3$ $\left(\text{поскольку} \left(\frac{x^4}{4} + 3\right)' = x^3\right)$, и $F_2(x) = \frac{x^4}{4} - 5$ $\left(\text{поскольку} \left(\frac{x^4}{4} - 5\right)' = x^3\right)$, и вообще любую функцию вида $y = \frac{x^4}{4} + C$. Так же обстоит дело в примере 2, где в качестве первообразной можно было взять любую функцию вида $y = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Если $F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все эти первообразные имеют вид $F(x) + C$, где C — любое действительное число.

Пример. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^r$, $r \neq -1$.

Решение. Одной из первообразных будет $F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = \frac{1}{r+1}(r+1)x^r = x^r = f(x)$. Значит, общий вид первообразных таков:

$$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

157. Таблица первообразных. Учитывая, что отыскание первообразной есть операция, обратная дифференцированию, и отталкиваясь от таблицы производных (см. п. 147), получаем следующую таблицу первообразных (для простоты в таблице приведена одна первообразная $F(x)$, а не общий вид первообразной $F(x) + C$):

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
1) $f(x) = k$	$F(x) = kx$	7) $f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
2) $f(x) = x^r$ $(r \neq -1)$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$	8) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
3) $f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert$	9) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
4) $f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	10) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
5) $f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$		
6) $f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	11) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$

158. Правила вычисления первообразных. Пусть нужно найти первообразную функции $y = f(x)$. Иногда это можно сделать с помощью таблицы первообразных из п. 157; например, для функции $y = x^{\frac{3}{5}}$ по второй строке указанной таблицы находим $F(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}$, т. е. $F(x) = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}$, а общий вид первообразных $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C$. Но чаще, прежде чем воспользоваться таблицей, приходится применять правила вычисления первообразных.

1°. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$.*

Иными словами, *первообразная суммы равна сумме первообразных.*

2°. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.*

Иными словами, *постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.*

3°. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k, b — постоянные, причем $k \neq 0$,* то *$\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первообразная для $f(kx + b)$.*

Пример 1. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sin x - 2^x + \frac{\cos x}{3}$.

Решение.

1) Воспользовавшись таблицей первообразных (см. п. 157), найдем первообразную для каждой из четырех функций, входящих в состав $f(x)$:

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \sin x,$$
$$f_3(x) = 2^x, \quad f_4(x) = \cos x.$$

Для $f_1(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ имеем $F_1(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Для $f_2(x) = \sin x$ имеем $F_2(x) = -\cos x$.

Для $f_3(x) = 2^x$ имеем $F_3(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2}$.

Для $f_4(x) = \cos x$ имеем $F_4(x) = \sin x$.

2) Воспользовавшись правилом 2°, получим, что для $2f_1(x)$ первообразной будет $2F_1(x)$, т. е. $2 \cdot \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}$; для $3f_2(x)$ первообразной будет $3F_2(x)$, т. е. $-3\cos x$; для $-f_3(x)$ первообразной будет $-F_3(x)$, т. е. $-\dfrac{2^x}{\ln 2}$; для $\dfrac{1}{3}f_4(x)$ первообразной будет $\dfrac{1}{3}F_4(x)$, т. е. $\dfrac{1}{3}\sin x$.

3) Воспользовавшись правилом 1°, получим, что для $f(x)$ первообразной будет

$$F(x) = 2F_1(x) + 3F_2(x) - F_3(x) + \frac{1}{3} F_4(x) =$$

$$= \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - 3\cos x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{3} \sin x.$$

4) Общий вид первообразных для заданной функции

$$\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - 3\cos x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{\sin x}{3} + C.$$

Пример 2. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$, где $f(x) = (2x - 1)^5$.

Решение. Для $h(x) = x^5$ первообразной будет $H(x) = \frac{x^6}{6}$. Тогда по правилу 3^0 для $h(2x - 1) = (2x - 1)^5$ первообразной будет $\frac{1}{2} H(2x - 1) = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^6}{6}$.

Итак, $F(x) = \frac{(2x-1)^6}{12}$, а общий вид первообразных для заданной функции $\frac{(2x-1)^6}{12} + C$.

Пример 3. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sin^2 3x$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2}$ (см. п. 98). Тогда $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x$. Для

$f_1(x) = \frac{1}{2}$ первообразной будет $\frac{1}{2}x$, а для $f_2(x) = \cos 6x$ в соответствии с правилом 3° первообразной будет $\frac{\sin 6x}{6}$. Тогда для $f(x) = f_1(x) - \frac{1}{2} f_2(x)$ по правилам 1° и 2° первообразной будет $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 6x}{6}$, т. е. $\frac{1}{2}x - \frac{\sin 6x}{12}$. Общий вид первообразных $\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C$.

Часть вторая

ГЕОМЕТРИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Слово «геометрия» в переводе с греческого языка означает «землемерие». Наука геометрия изучает свойства фигур, неизменные под действием тех или иных преобразований. Впервые такое истолкование науки «геометрия» предложил немецкий математик Феликс Клейн в 1872 году в лекции, прочитанной им в университете города Эрланген в так называемой «Эрлангенской программе». С тех пор эта точка зрения считается общепринятой. Геометрия, изучаемая в школе, называется евклидовой геометрией — по имени древнегреческого ученого Евклида (3 в. до н.э.). Согласно Эрлангенской программе, евклидова геометрия изучает свойства фигур, неизменные под действием движений и подобий. Школьный курс геометрии предусматривает изучение двух разделов: планиметрии и стереометрии. Планиметрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости; стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. И наука геометрия, и школьный предмет геометрия строятся на основе ряда принимаемых без доказательства свойств фигур, называемых *аксиомами*. В этом смысле геометрия — аксиоматическая наука, а предмет геометрия — единственный аксиоматический предмет, который изучают в школе. В основе школьного курса геометрии лежит аксиоматика евклидовой плоскости и евклидова пространства, сформулированная немецким математиком Давидом Гильбертом в 1899 году в книге «Основания геометрии».

Приведем аксиомы школьного курса геометрии, разбив их на аксиомы планиметрии и стереометрии.

Аксиомы планиметрии:

П I_1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

П I_2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

П II_1. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

П II_2. Прямая, принадлежащая плоскости, разбивает эту плоскость на две полуплоскости.

П III_1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

П III_2. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

П IV_1. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

П IV_2. От любой полупрямой на содержащей ее плоскости в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

П IV_3. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в данной плоскости в заданном расположении относительно данной полупрямой в этой плоскости.

П V. На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Аксиомы стереометрии:

С 1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, ей не принадлежащие.

С2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

С3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Раздел «Геометрия» общего справочника по математике поможет подготовиться к сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ), для удачного написания которого прежде всего надо научиться решать задачи. Мы предполагаем, что при подготовке к ЕГЭ будут также использованы школьные учебники по геометрии, в которых подробно изложены все определения и теоремы. Поэтому в этом справочнике приведены только основные базовые определения, теоремы и формулы, в первую очередь необходимые для решения геометрических задач, входящих в состав каждого из вариантов ЕГЭ. Отметим, что для строгого определения некоторых математических понятий необходимы глубокие знания высшей математики, поэтому многие определения нами даны в упрощенной «школьной» трактовке.

В варианты ЕГЭ из общего количества 18 задач входят всего 5 задач по геометрии.

Как уже отмечалось, цель данного справочника — помочь научиться решать задачи. Для этого проведен анализ составляющих частей — «кирпичиков», блоков решения данных задач, и по каждому из необходимых блоков предложены примеры с решениями по ходу изложения необходимых основных разделов планиметрии и стереометрии. Предлагаемые в вариантах ЕГЭ задачи по геометрии являются комбинированными, требующими для решения знания из различных разделов геометрии. Поэтому разобранные примеры, приведенные в данном справочнике по основным разделам, представляют собой типовые задачи — блоки, необходимые для решения комбинированных задач по геометрии, предлагаемых в вариантах ЕГЭ. По итогам рассмотрения разделов по планиметрии, многогранникам и телам вращения предложены типовые задачи с решениями, похожие на задачи Части 1 и Части 2 соответственно. При решении задач мы использовали следующие основные методы решения геометрических задач: аксиоматический, аналитический, алгебраический, тригонометрический, векторный, координатный, а также методы подобия, вспомогательных и опорных элементов, площадей.

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Треугольники, четырехугольники и многоугольники. Подобие и метрические соотношения

1. Треугольники.

Виды треугольников. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть a, b, c — стороны треугольника; c — наибольшая из сторон, тогда:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник — остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник — прямоугольный,

в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник — тупоугольный.

Признаки равенства треугольников:

1) По двум сторонам и углу между ними;

2) по одной стороне и двум прилежащим к ней углам;

3) по трем сторонам.

Признаки подобия треугольников:

1) По двум сторонам и углу между ними;

2) по двум углам;

3) по трем сторонам.

Свойства медиан (см. рис. 2.1):

1. Медианы пересекаются в одной точке (центр масс треугольника) и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$AO : OD = BO : OE = CO : OF = 2 : 1.$

2. Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника (одинаковой площади).

3. Три медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

4. Длина медианы может быть вычислена по формуле: $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

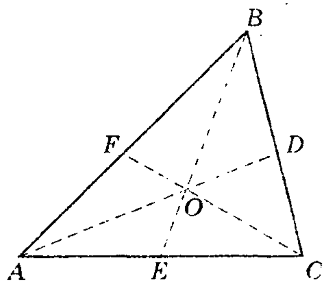


Рис. 2.1

Свойства биссектрис (см. рис. 2.2):

1. Биссектрисы пересекаются в одной точке — центре вписанной в треугольник окружности.

2. Биссектриса делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам: $AE : CE = AB : BC$.

3. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника перпендикулярны.

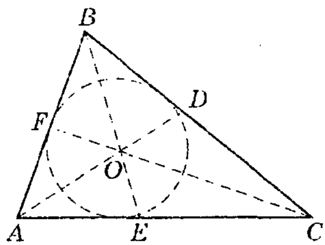


Рис. 2.2

4. Длина биссектрисы может быть вычислена по формуле: $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b + c} = \sqrt{AB \cdot AC - AE \cdot EC}$.

Свойства высот:

1. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке — ортоцентре треугольника.

2. В зависимости от вида треугольника возможны следующие случаи расположения ортоцентра:

а) ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника (рис. 2.3);

б) ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла;

в) ортоцентр тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (рис. 2.4).

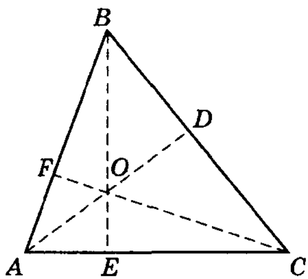


Рис. 2.3

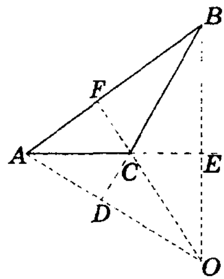


Рис. 2.4

3. Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

4. Длина высоты может быть вычислена по формуле: $h_a = b\sin C = c\sin B = \frac{2S}{a}$.

Свойства средней линии треугольника:

1. Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине.

2. Средняя линия отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

Теорема о сумме внутренних углов треугольника:

Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Прямоугольный треугольник

1. **Теорема Пифагора** (*Пифагор Самосский, древнегреческий математик, VI в. до н. э.*). *Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*: $c^2 = a^2 + b^2$, где гипотенуза $AB = c$, катеты $AC = b$, $BC = a$.

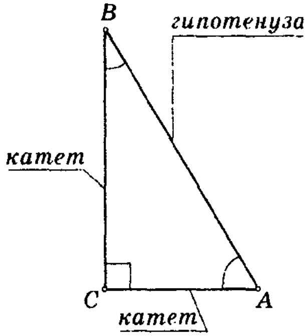


Рис. 2.5

2. Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \ \cos\alpha = \frac{AC}{AB},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}, \ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}.$$

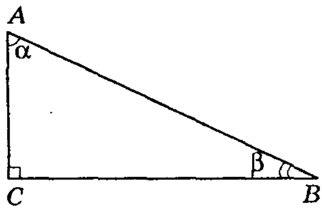


Рис. 2.6

3. Свойства проекций катетов на гипотенузу:

$$h = \sqrt{c_1 c_2};$$

$$a = \sqrt{cc_1};$$

$$b = \sqrt{cc_2};$$

$$h = \frac{ab}{c} = \frac{a+b}{a_c + b_c}.$$

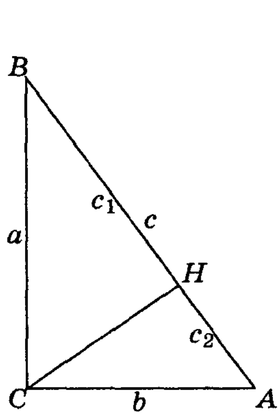


Рис. 2.7

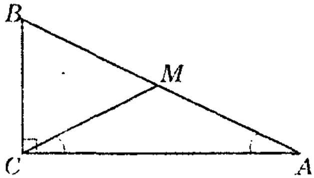


Рис. 2.8

4. Свойство медианы, проведенной к гипотенузе.

Медиана, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, равна половине гипотенузы: $CM = \frac{1}{2}AB$.

5. Целочисленные прямоугольные треугольники.
Целочисленные прямоугольные треугольники — это треугольники со следующим отношением сторон:

- 3 : 4 : 5 — египетский треугольник, стороны которого выражаются числами 3, 4, 5 (или пропорциональны им), простейший из треугольников с целочисленными сторонами;

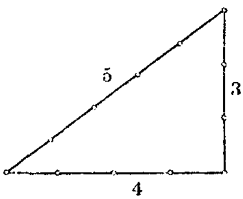


Рис. 2.9

- 5 : 12 : 13;
- 8 : 15 : 17;
- 7 : 24 : 25 и т.д.

2. Четырехугольники.

Параллелограмм

1. Свойства параллелограмма (рис. 2.10):

1. Противоположные стороны параллелограмма равны: $AB = CD$, $AD = BC$.

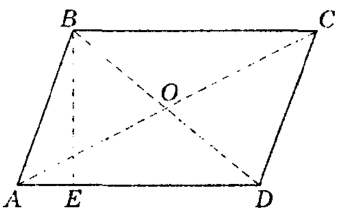


Рис. 2.10

2. Противоположные углы параллелограмма равны: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

3. Диагонали параллелограмма делятся в точке их пересечения пополам: $AO = OC$, $BO = OD$.

4. Сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°: $\alpha + \beta = 180°$ (рис. 2.11, *а*).

5. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

2. Метрическое соотношение в параллелограмме

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон (рис. 2.11, *б*):

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

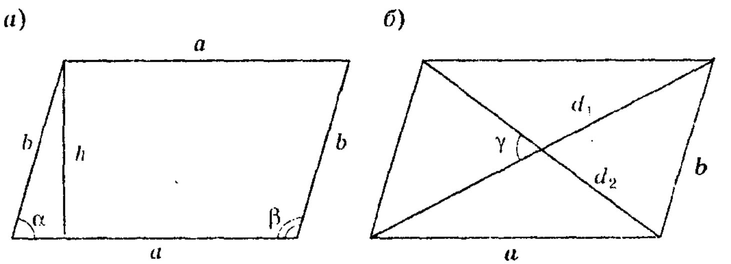


Рис. 2.11

Ромб

Свойства ромба (рис. 2.12):

1. Все стороны ромба равны: $AB = BC = CD = DA$.

2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны: $AC \perp BD$.

3. Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов:

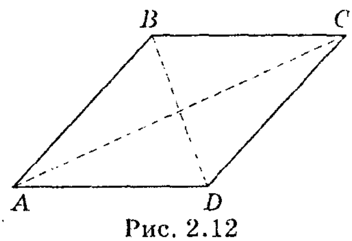


Рис. 2.12

$$\angle DCA = \angle BCA, \ \angle ABD = \angle CBD.$$

4. Прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

Прямоугольник

Свойства прямоугольника (рис. 2.13):

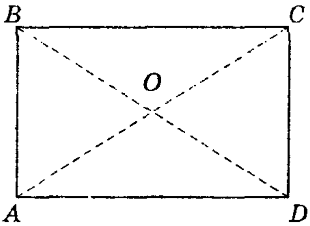


Рис. 2.13

1. Стороны прямоугольника являются его высотами.

2. Диагонали прямоугольника равны: $AC = BD$ и точкой пересечения делятся пополам ($AO = OC$, $BO = OD$).

3. Две противоположные стороны равны и углы, прилежащие к одной из этих сторон, прямые.

4. Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его сторон:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

5. Прямые, содержащие серединные перпендикуляры к сторонам, являются осями симметрии.

Квадрат

Свойства квадрата (рис. 2.14):

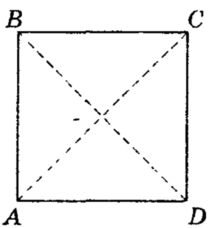


Рис. 2.14

1. Все стороны равны и попарно взаимно перпендикулярны.

2. Диагонали равны, взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам.

3. Прямые, содержащие диагонали, являются биссектрисами внутренних углов квадрата.

4. Прямые, содержащие диагонали и прямые, содержащие серединные перпендикуляры к сторонам, являются осями симметрии квадрата.

5. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии квадрата.

Трапеция

1. Элементы трапеции.

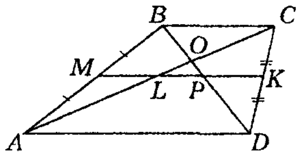


Рис. 2.15

Параллельные стороны AD и BC называются *основаниями* трапеции, а две другие AB и CD — *боковыми сторонами*. Расстояние между основаниями — *высота*. Отрезок MK, соединяющий середины боковых сторон M и K, называется *средней линией* трапеции.

2. Частные случаи трапеции.

1) Трапеция с равными боковыми сторонами ($AB = CD$) называется *равнобочной* (равнобедренной) трапецией. В равнобочной трапеции углы при каждом основании равны ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$) (рис. 2.16).

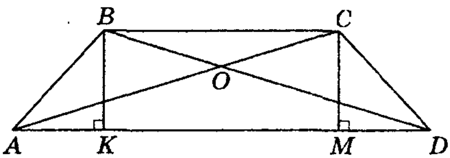


Рис. 2.16

2) Трапеция, один из углов которой — прямой, называется *прямоугольной* (рис. 2.17).

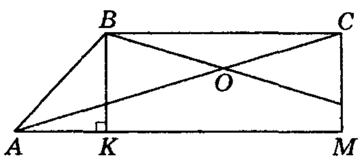


Рис. 2.17

3) Частным случаем трапеции является параллелограмм.

Свойства средней линии трапеции (рис. 2.15):

1. Средняя линия параллельна основаниям трапеции.

2. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований: $MK = \dfrac{AD + BC}{2}$.

3. Средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок, заключенный между основаниями трапеции.

! ***Некоторые важные факты в теме «Подобие и метрические соотношения в треугольниках и четырехугольниках», часто применяемые при решении задач.***

1. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами — равны.

2. Обобщенная теорема подобия для треугольников:

- отношение любых соответствующих сумм линейных элементов подобных треугольников равно коэффициенту подобия (а частности соответствующих периметров, медиан, высот, биссектрис);
- отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

3. **Теорема Фалеса** (*Фалес Милетский, древнегреческий математик, VII–VI вв. до н. э.*). Если четыре параллельные прямые $l \parallel m \parallel n \parallel k$ пересекают одну сторону угла в точках A, B, C, D соответственно, а другую сторону угла в точках A', B', C', D' соответственно, то $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.

При этом возможны следующие частные случаи:

- если $AB = CD$, то $A'B' = C'D'$;
- если прямые m и n совпадают, а прямая k проходит через вершину угла, то оставшиеся две параллельные прямые l и m высекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.

! ***Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, сформулируем несколько важных рекомендаций, которые помогут вам при решении различных задач.***

Рекомендация 1. При решении задачи на треугольники, прежде всего, если это возможно, определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный). От вида треугольника во многом зависит дальнейший ход решения задачи.

Рекомендация 2. Часто при решении планиметрических задач полезно выполнить дополнительные построения.

Рекомендация 3. В задачах с медианой бывает полезно достроить треугольник до параллелограмма, удвоив медиану. Далее, в некоторых случаях следует воспользоваться метрическим соотношением в параллелограмме.

Рекомендация 4. При необходимости установить равенство двух отрезков (или углов) можно воспользоваться одним из следующих способов доказательства:

а) Рассмотреть отрезки как стороны двух треугольников и доказать, что треугольники равны. Тогда нужные отрезки будут равны как соответственные стороны в равных треугольниках.

б) Рассмотреть отрезки как стороны одного треугольника и доказать, что этот треугольник равнобедренный.

в) Заменить данные отрезки на другие, им соответственно равные, и доказать равенство новой пары отрезков.

г) Заключить отрезки в качестве противоположных сторон четырехугольника и доказать, что этот четырехугольник — параллелограмм.

д) Рассмотреть движение (параллельный перенос, поворот или осевую симметрию), переводящее один отрезок в другой.

3. Примеры.

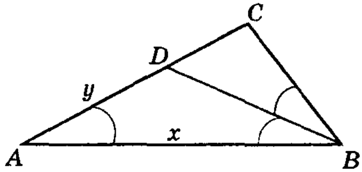


Рис. 2.18

Пример 1*. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла A, $AC = 6$, $BC = 4$. Найдите третью сторону треугольника.

Решение.

1) Рассмотрим подобные треугольники

$\triangle CBD$ и $\triangle CAB$: $\frac{CB}{AC} = \frac{CD}{CB}$, $\frac{4}{6} = \frac{6-y}{4}$, $y = \frac{10}{3}$.

2) По теореме о биссектрисе BD угла B в треугольнике ABC:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC},\ \frac{x}{4} = \frac{y}{6-y},\ \frac{x}{4} = \frac{\frac{10}{3}}{6-\frac{10}{3}},\ x = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 2. Диагонали трапеции равны и взаимно перпендикулярны. Полусумма оснований равна 17. Найдите высоту трапеции.

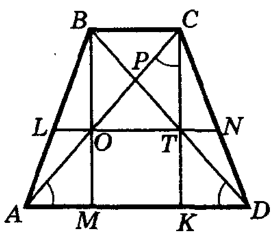


Рис. 2.19

Решение.

1) Рассмотрим высоты трапеции BM и CK. Треугольники $\triangle ACK$ и $\triangle DBM$ равны как прямоугольные по гипотенузе и катету. Следовательно, соответственные элементы этих треугольников равны: $\angle CAK = \angle BDM$.

2) Рассмотрим треугольник $\triangle APD$. По условию задачи этот треугольник — прямоугольный, следовательно, $\angle CAK = \angle BDM = 45°$.

3) Углы ACK и BDA равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно, $\angle CAK = \angle BDM = \angle ACK = 45°$. Значит, треугольник $\triangle ACK$ — равнобедренный: $AK = CK$.

4) Треугольники $\triangle ACD$ и $\triangle DBA$ равны по двум сторонам и углу между ними: $BD = AC$ по условию, AD — общая, $\angle CAK = \angle BDM = 45°$ по доказанному в п. 2. Следовательно, $CD = AB$ и трапеция — равнобедренная.

5) Средняя линия равнобедренной трапеции $LN = LO + OT + TN = OT + AM = AK = 17$ (по условию задачи полусумма оснований равна 17), $AK = CK = 17$.

Ответ: 17.

4. Многоугольники. Правильные многоугольники.

В школьном курсе геометрии изучают простые многоугольники, т.е. многоугольники, для которых ломаная, являющаяся их границей, не имеет самопересечений. Ниже на рисунках изображены простой многоугольник (рис. 2.20, *а*) и многоугольник, не являющийся простым (рис. 2.20, *б*).

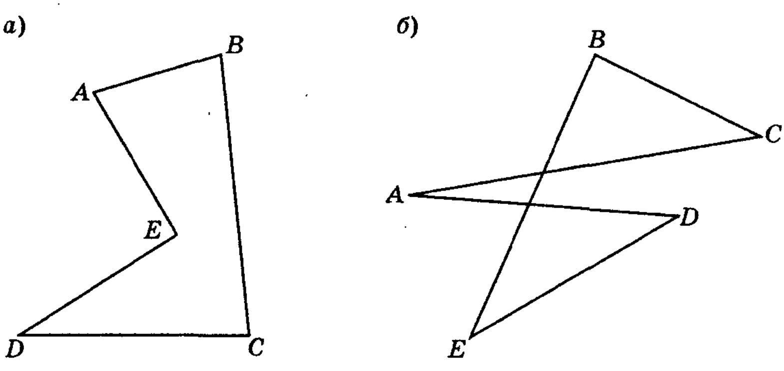


Рис. 2.20

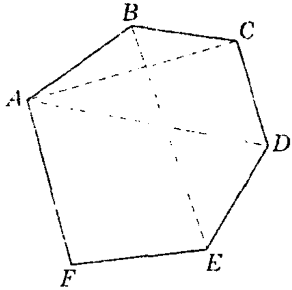


Рис. 2.21

Среди всевозможных простых многоугольников выделяют выпуклые многоугольники. На рисунке 2.21 многоугольник $ABCDEF$ является выпуклым, многоугольник, расположенный на рисунке 2.20, *а* — простой, не являющийся выпуклым.

Свойства выпуклого многоугольника:

1. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна $360°$.

3. Число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

4. Выпуклый n-угольник разбивается на $n-2$ треугольника диагоналями, выходящими из одной вершины.

Выпуклый многоугольник с равными сторонами и углами — правильный.

Свойства правильного многоугольника:

1. Каждый угол правильного многоугольника равен $\frac{180°(n-2)}{n}$, где n — число его углов.

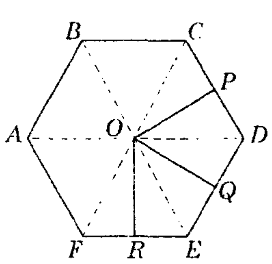


Рис. 2.22

2. Центр правильного многоугольника равноудален от его вершин.

3. Центр правильного многоугольника равноудален от его сторон.

4. В правильный многоугольник можно вписать ок-

ружность и около него можно описать окружность.

5. Центры вписанной и описанной окружностей совпадают с центром правильного многоугольника.

§ 2. Окружность. Круг. Вписанные и описанные фигуры

5. Измерение углов, связанных с окружностью.

1. Центральный угол AOB измеряется дугой m, на которую он опирается (рис. 2.23).

2. Вписанный угол BAC измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 2.24).

3. Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ (рис. 2.25).

4. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу — равны.

5. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр — прямые: $\angle APB = \angle AQB = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$ (рис. 2.26).

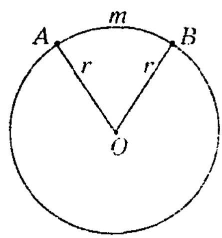


Рис. 2.23

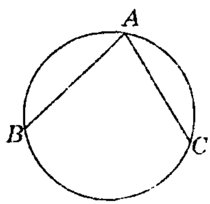


Рис. 2.24

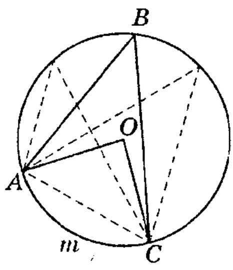


Рис. 2.25

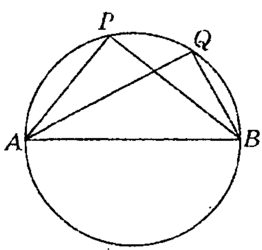


Рис. 2.26

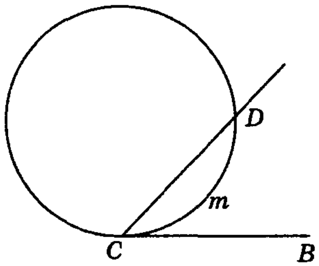


Рис. 2.27

6. Угол между касательной CB и хордой CD измеряется половиной дуги m, заключенной между касательной и хордой.

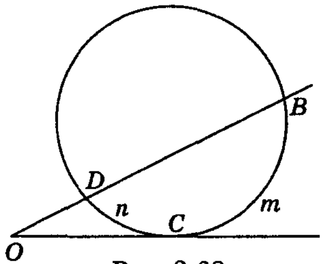


Рис. 2.28

7. Угол $\angle BOC$ между касательной и секущей измеряется полуразностью дуг, заключенных между сторонами угла:

$$\angle BOC = \frac{m - n}{2}$$

8. Угол $\angle AOD$ между секущими, пересекающимися внутри окружности, вычисляется по формуле: $\frac{m + n}{2}$ (рис. 2.29).

9. Угол $\angle AOD$ между секущими, пересекающимися вне окружности, вычисляется по формуле: $\frac{n - m}{2}$ (рис. 2.30).

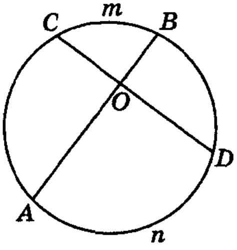


Рис. 2.29

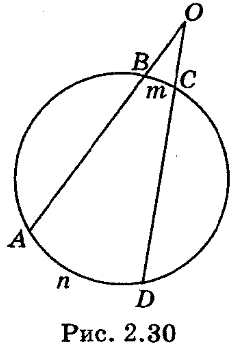


Рис. 2.30

6. Касательные к окружности. Метрические соотношения в окружности.

1. Произведения отрезков секущих, проведенных из общей точки, равны: $OA \cdot OB = OD \cdot OC$.

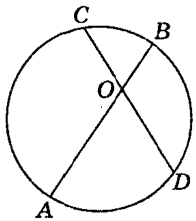


Рис. 2.31

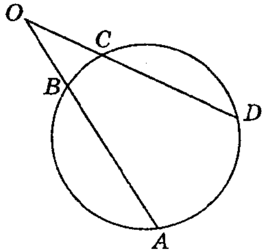


Рис. 2.32

2. Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки: $OA^2 = OD \cdot OB$ (рис. 2.33).

3. Отрезки касательных, проведенных из общей точки, равны: $AB = AC$ (рис. 2.34).

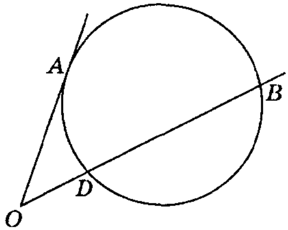


Рис. 2.33

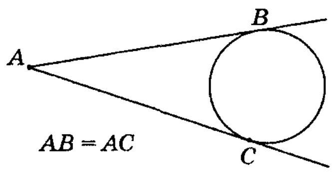


Рис. 2.34

4. Центр окружности, вписанной в угол MAN, принадлежит биссектрисе этого угла.

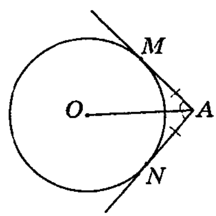


Рис. 2.35

7. Окружность и треугольник.

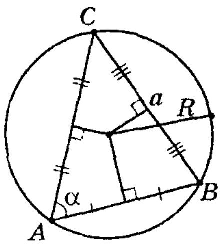


Рис. 2.36

1. Около любого треугольника можно описать окружность. Центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Радиус R описанной около треугольника окружности может быть вычислен по формулам: $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника, α — угол, лежащий против стороны a, S — площадь треугольника.

В случае остроугольного треугольника центр описанной окружности лежит внутри треугольника.

В случае прямоугольного треугольника центром описанной окружности является середина гипотенузы.

В случае тупоугольного треугольника центр описанной окружности лежит вне треугольника.

2. В любой треугольник можно вписать окружность. Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис его внутренних углов.

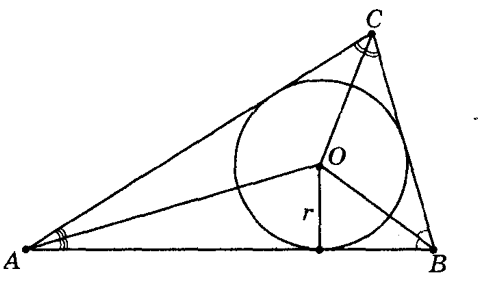


Рис. 2.37

Радиус r вписанной в треугольник окружности может быть вычислен по формуле: $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, а p — полупериметр.

В случае правильного треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

В случае прямоугольного треугольника радиус $r = OF = OE = OG$ вписанной в него окружности может быть вычислен по формуле: $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a, b, c — стороны треугольника.

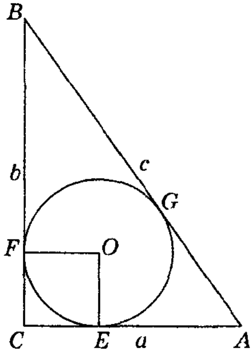


Рис. 2.38

8. Окружность и четырехугольник.

1. Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его внутренних противоположных углов равна 180°: $\beta + \varphi = \alpha + \gamma$.

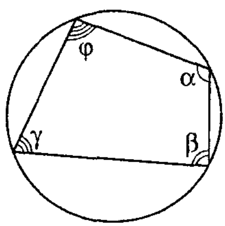


Рис. 2.39

2. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда равны суммы длин его противоположных сторон: $a + c = b + d$, где a, b, c, d длины сторон четырехугольника.

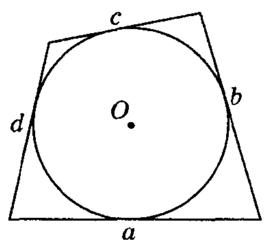


Рис. 2.40

9. Соотношения между стороной правильного многоугольника и радиусами вписанной и описанной окружностей. Центр O правильного n-угольника $ABCD...$ является одновременно точкой пересечения биссектрис его внутренних углов и точкой пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

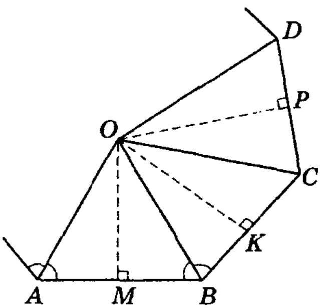


Рис. 2.41

Радиус R описанной около правильного многоугольника окружности $R = OA = OB = OC = OD = ...$.

Радиус r вписанной в правильный многоугольник окружности $r = OM = OK = OP...$.

Обозначим количество сторон правильного n-угольника через n, тогда:

1) угол, под которым каждая сторона n-угольника видна из его центра, вычисляется по формуле:

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n};$$

2) радиус R описанной около правильного n-угольника окружности вычисляется по формуле:

$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};$$

3) радиус r вписанной в правильный n-угольник окружности вычисляется по формуле:

$$r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

4) Для основных частных случаев: $n = 3, 4, 6$ результаты вычислений R и r представляем в следующей таблице:

n	3	4	6
R	$\frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	a_6
r	$\frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a_4}{2}$	$\frac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$\frac{r}{R}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

§ 3. Тригонометрия в планиметрии

Применение тригонометрии в решении планиметрических задач в основном заключается в следующих четырех направлениях, рассмотренных в пунктах 10, 11, 12, 13.

10. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB},$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}.$$

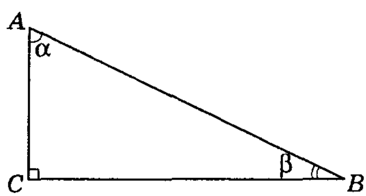


Рис. 2.42

11. Теорема синусов:

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = \mathbf{2R}$, где R — радиус описанной около треугольника окружности.

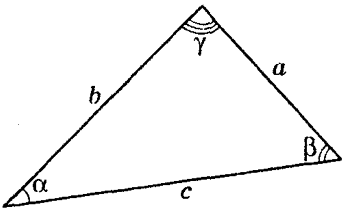


Рис. 2.43

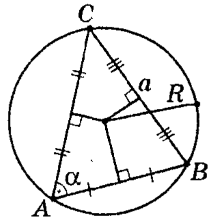


Рис. 2.44

12. Теорема косинусов:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$

13. Формулы площадей. Метод площадей. Формулы для вычислений площадей плоских фигур нами приведены в следующем разделе. Некоторые из формул нам пришлось напомнить вам в предыдущих разделах. Здесь же отметим, что во многих формулах площадей присутствуют тригонометрические функции. Поэтому при решении задачи методом площадей мы применяем знания тригонометрии.

Напомним, в чем заключается метод площадей. Одним из основных методов составления уравнений в геометрических задачах является метод опорного элемента, заключающийся в том, что один и тот же элемент (сторона, угол, площадь, периметр, высота, радиус, медиана, ...) выражается через известные и неизвестные величины двумя различными способами и полученные выражения приравниваются.

В случае, если при составлении уравнения в геометрических задачах в качестве опорного элемента выбрана площадь, считают, что задача решена методом площадей.

Пример 1. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна 9 и образует с основанием угол, тангенс которого равен $2\sqrt{2}$.

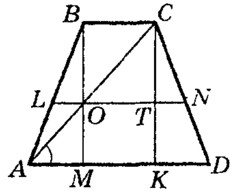


Рис. 2.45

Решение.

1) Средняя линия равнобедренной трапеции $LN = LO + OT + TN = OT + AM = AK$.

2) Рассмотрим ΔACK: $AK = AC \cdot \cos\angle CAK = 9\cos\angle CAK$.

3) $1 + \mathrm{tg}^2\angle CAK = \dfrac{1}{\cos^2\angle CAK}$, $1 + 8 = \dfrac{1}{\cos^2\angle CAK}$,

$\cos^2\angle CAK = \dfrac{1}{9}$, $\cos\angle CAK = \dfrac{1}{3}$.

(По смыслу условия задачи угол CAK — угол между диагональю и основанием равнобедренной трапеции — острый).

4) $LN = AK = 9 \cdot \cos\angle CAK = 9 \cdot \dfrac{1}{3} = 3$.

Ответ: 3.

Пример 2•. Найдите периметр ромба, диагонали которого относятся, как 3 : 4, а высота равна 6.

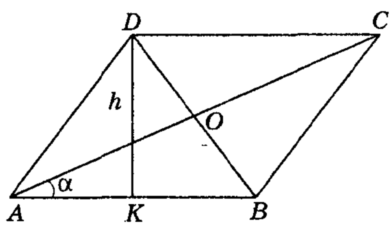


Рис. 2.46

Решение.

1) По свойствам ромба его диагонали взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов. Треугольник AOB — прямоугольный, угол α является половиной острого угла ромба. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BO}{AO} = \dfrac{3}{4}$.

2) Рассмотрим треугольник ADK.

$$AD = \frac{h}{\sin 2\alpha} = \frac{6}{\sin 2\alpha}.$$

3) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{16}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \dfrac{24}{25}$, $AD = \dfrac{6}{\frac{24}{25}} = \dfrac{25}{4}$.

4) $P = 4AD = 25$.

Ответ: 25.

§ 4. Площади плоских фигур

14. Формулы площади треугольника.

Произвольный треугольник

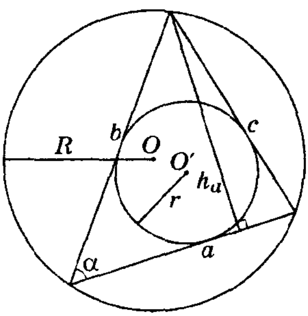


Рис. 2.47

Обозначим через a, b, c — стороны произвольного треугольника;

α — угол между сторонами a и b;

p — полупериметр;

R — радиус описанной около треугольника окружности;

r — радиус вписанной в треугольник окружности;

S — площадь треугольника;

h_a — высота, проведенная к стороне a.

Тогда в данных обозначениях для вычисления площади произвольного треугольника может быть применена одна из следующих формул:

$$S = \frac{1}{2}ah_a;\ S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\ S = pr;\ S = \frac{abc}{4R}.$$

Прямоугольный треугольник

Пусть a, b — катеты; c — гипотенуза; h_c — высота, проведенная к гипотенузе c.

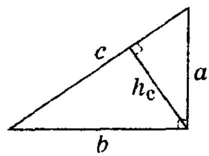


Рис. 2.48

Тогда в данных обозначениях для вычисления площади прямоугольного треугольника может быть применена одна из следующих формул:

$$S = \frac{1}{2}ab;\ S = \frac{1}{2}ch_c.$$

Равносторонний треугольник со стороной a

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

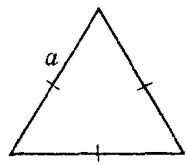


Рис. 2.49

15. Формулы площади параллелограмма. Обозначим через a, b — стороны параллелограмма; α — угол между сторонами параллелограмма; d_1, d_2 — диагонали параллелограмма; φ — указанный на рисунке угол между диагоналями. Тогда в данных обозначениях для вычисления площади параллелограмма может быть применена одна из следующих формул:

$$S = ah_a;\ S = ab\sin\alpha;$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

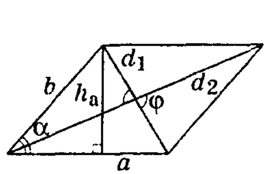


Рис. 2.50

16. Формулы площади ромба. Обозначим через a — сторону ромба; α — угол между сторонами ромба; d_1, d_2 — диагонали ромба. Тогда в данных обозначениях для вычисления площади ромба может быть применена одна из следующих формул:

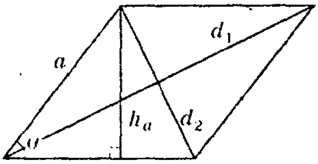


Рис. 2.51

$$S = ah_a;\ S = a^2\sin\alpha;\ S = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

17. Формулы площади прямоугольника. Обозначим через a, b — стороны прямоугольника; d — диагональ прямоугольника; φ — указанный на рисунке 2.52 угол между диагоналями.

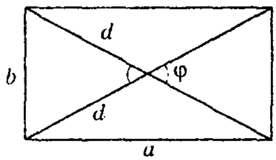


Рис. 2.52

Тогда в данных обозначениях для вычисления площади прямоугольника может быть применена одна из следующих формул:

$$S = ab;\ S = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi.$$

18. Формулы площади квадрата. Обозначим через a — сторону квадрата; d — диагональ квадрата.

Тогда в данных обозначениях для вычисления площади квадрата может быть применена одна из следующих формул:

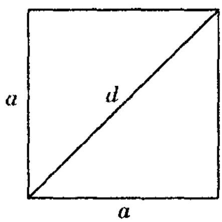


Рис. 2.53

$$S = a^2;\ S = \frac{1}{2}d^2.$$

19. Формулы площади трапеции. Обозначим через a и b — основания трапеции; h — высоту;

l — среднюю линию трапеции. Тогда в данных обозначениях для вычисления площади трапеции может быть применена одна из следующих формул:

$$S = \frac{a+b}{2}h;\ S = lh.$$

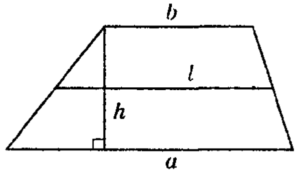


Рис. 2.54

20. Формула площади произвольного выпуклого четырехугольника. Обозначим через d_1, d_2 — диагонали выпуклого четырехугольника; φ — указанный на рисунке 2.55 угол между ними.

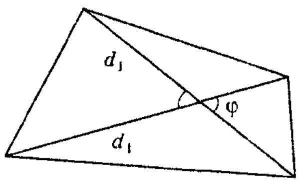


Рис. 2.55

Тогда в данных обозначениях формула для вычисления площади выпуклого четырехугольника имеет вид:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

21. Формула площади многоугольника, описанного около окружности. Обозначим через p — полупериметр многоугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Тогда в данных обозначениях формула для вычисления площади многоугольника, описанного около окружности, имеет вид: $S = pr$.

22. Формула площади круга и его частей.

1. Площадь круга: $S = \pi \cdot R^2$.

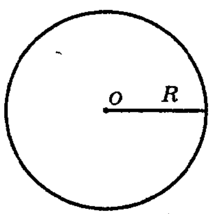


Рис. 2.56

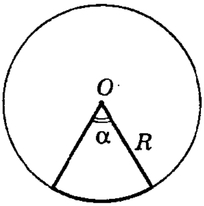


Рис. 2.57

2. Площадь сектора:

$S = \frac{1}{2}\alpha \cdot R^2$, угол α — в радианах.

3. Площадь сегмента (заштрихованного):

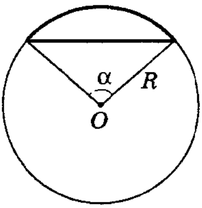


Рис. 2.58

1) $S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$, угол α — в радианах.

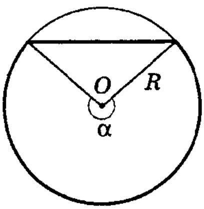


Рис. 2.59

2) $S = \frac{1}{2}R^2(\alpha + \sin\alpha)$, угол α — в радианах.

4. Площадь кольца.

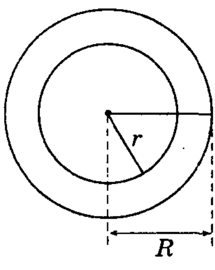


Рис. 2.60

Обозначим через R, r — внешний и внутренний радиусы кольца; D, d — внешний и внутренний диаметры кольца.

Тогда площадь кольца может быть вычислена по формулам:

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2).$$

23. Примеры. Перед тем, как перейти к рассмотрению примеров, остановимся на некоторых рекомендациях, полезных для решения задач.

Рекомендация 1. При решении задач полезно помнить о следующих фактах:

1. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если у двух треугольников равны основания, то их площади относятся как их высоты.

3. Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как их основания.

4. Если фигура площади S каким либо образом разрезана на n частей, имеющих соответственно площади S_1, S_2, ... S_n, то $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$ (т. е. площадь обладает свойством аддитивности).

Рекомендация 2. При решении некоторых задач на вычисление площадей бывает целесообразно заменить фигуру на равновеликую ей (т.е. на фигуру одинаковой площади), более удобную для вычисления площади.

Рекомендация 3. При решении задач на вычисление площади при составлении уравнений полезно использовать метод площадей как частный случай метода опорного элемента.

Рекомендация 4. Для доказательства факта принадлежности трех точек одной прямой полезно воспользоваться одной из следующих идей:

1. Доказать, что угол, образованный тремя данными точками — развернутый.

2. Воспользоваться векторным методом и доказать, что векторы с началом в одной из точек, и

концами в двух оставшихся точках являются коллинеарными.

3. Рассмотреть соответствующий для данных точек треугольник и воспользоваться теоремой Менелая (см. § 5).

Пример 1. В треугольнике один из углов равен 60°, а точка касания вписанного круга делит противоположную сторону на отрезки $\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. Найдите площадь круга.

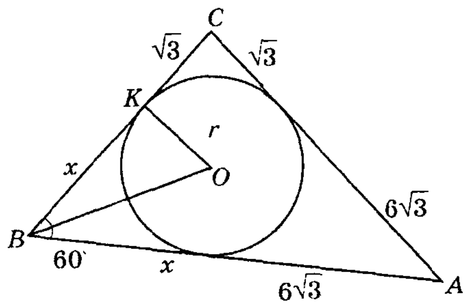


Рис. 2.61

Решение.

1) Выразим площадь данного треугольника двумя способами, применив метод площадей:

$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанного круга.

2) Рассмотрим треугольник BOK: $\angle KBO = 30°$, $\angle K = 90°$. Тогда $OB = 2OK = 2r$, $x = r\sqrt{3}$. С учетом равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из общей точки, получим, что в нашем случае полупериметр $p = \sqrt{3} + 6\sqrt{3} + r\sqrt{3} = (7 + r)\sqrt{3}$.

3) Таким образом, применив, как было указано в п. 13 метод площадей, имеем:

$$r(7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) = \sqrt{(7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot r\sqrt{3}},$$

$$r^2(7\sqrt{3} + r\sqrt{3})^2 = (7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) \cdot 18 \cdot r\sqrt{3},$$

$$r(7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) = 18\sqrt{3},\ S = r(7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}.$$

Решив уравнение $r^2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}r - 18\sqrt{3} = 0$, $r^2 + 7r - 18 = 0$, найдем радиус вписанного круга: $r = 2$. Искомая площадь круга равна 4π.

Ответ: 4π.

Пример 2•. В параллелограмме $ABCD$ точки L и K являются соответственно серединами сторон AD и DC. Отрезки AK и BL пересекаются в точке M. Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника AML равна 1.

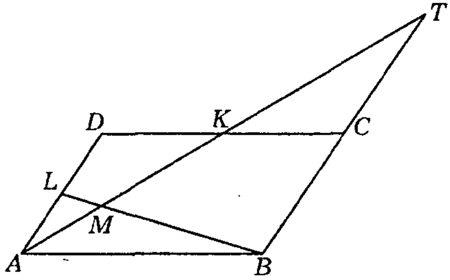


Рис. 2.62

Решение.

Определим, какую часть искомой площади параллелограмма $ABCD$ составляет известная площадь треугольника AML.

1) $\dfrac{S_{ALM}}{S_{ALB}} = \dfrac{LM}{LB}$; $\dfrac{S_{ALB}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{4}$.

2) Рассмотрим пересечение AK и BC.

Точку пересечения указанных прямых обозначим через T. Треугольники KCT и ABT подобны с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$: $BC = \frac{1}{2}BT$, $AL = \frac{1}{2}BC$, $AL = \frac{1}{4}BT$. Следовательно, треугольники ALM и TBM подобны с коэффициентом подобия $\frac{1}{4}$: $\frac{LM}{MB} = \frac{1}{4}$, $LM = \frac{1}{5}LB$.

3) $\frac{S_{ALM}}{S_{ALB}} = \frac{1}{5}$, $S_{ALM} = \frac{1}{5}S_{ALB} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{20}S_{ABCD}$.

Учитывая, что по условию задачи, площадь треугольника ALM равна 1, получим, что площадь параллелограмма равна 20.

Ответ: 20.

§ 5. Некоторые дополнительные теоремы планиметрии

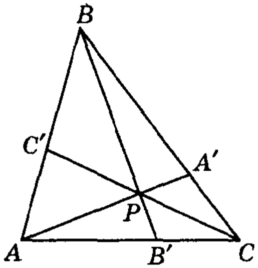


Рис. 2.63

Теорема Чевы (*Джованни Чева, итальянский математик, XVII–XVIII вв.*). Отрезок, соединяющий вершину треугольника с внутренней точкой противолежащей стороны, называется *чевианой* треугольника.

Теорема: Три чевианы AA', BB' и CC' треугольника ABC

пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|CA'|}{|A'B|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} = 1$.

Теорема Менелая (*Менелай Александрийский, I–II вв. н. э.*). Точки X, Y и Z, лежащие на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно или на их продолжениях, принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1$.

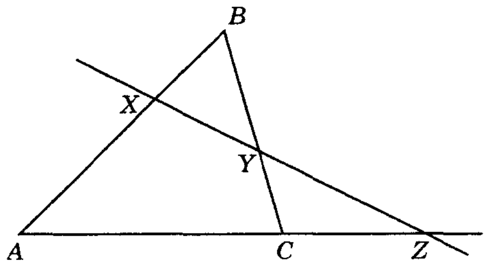


Рис. 2.64

Теорема Штейнера-Лемуса (*Штейнер Якоб, немецкий математик, XVIII–XIX вв.; Лемус Даниэль, французский математик, XVIII–XIX вв.*). Любой треугольник, у которого равны длины биссектрис двух его углов, является равнобедренным.

Прямая Эйлера и окружность девяти точек (*Эйлер Леонард, швейцарский и российский математик, XVIII в.*).

Теорема. Ортоцентр, центроид и центр описанной окружности произвольного треугольника лежат на одной прямой (*прямой Эйлера*). Центроид делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношении 2 : 1.

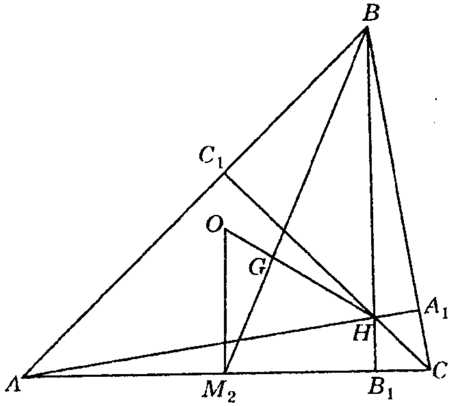


Рис. 2.65

Теорема. Основания трех высот произвольного треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*), радиус которой равен половине радиуса описанной около треугольника окружности.

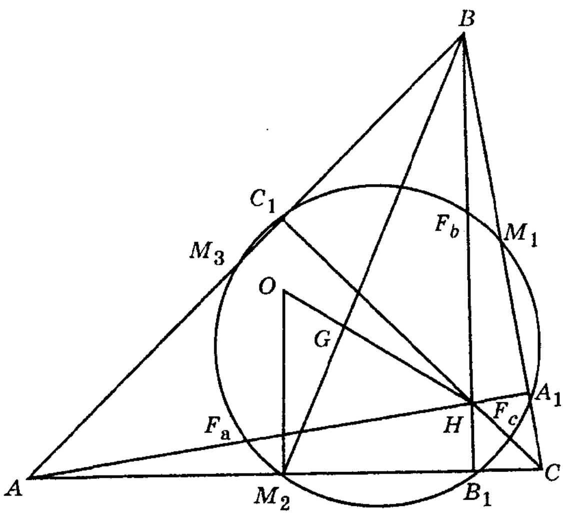


Рис. 2.66

Прямая Симсона (*Симсон Роберт, шотландский математик, XVII–XVIII вв.*).

Основания перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника, принадлежат одной прямой (*прямой Симсона*) тогда и только тогда, когда эта точка лежит на описанной около этого треугольника окружности.

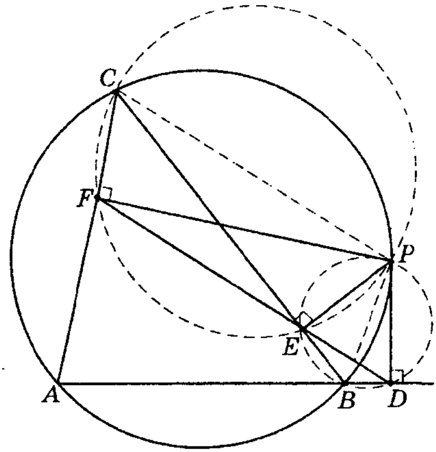


Рис. 2.67

Теорема. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, то имеет место равенство:

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

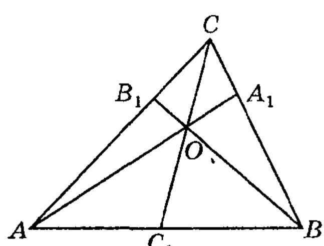


Рис. 2.68

Теорема Птолемея (*Клавдий Птолемей, древнегреческий математик, II в.*). Во всяком вписан-

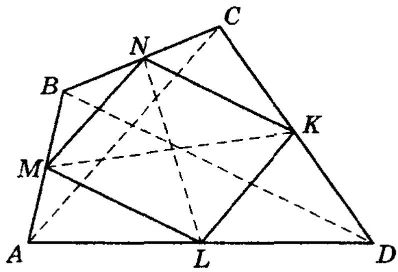


Рис. 2.69

ном в окружность четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Теорема Вариньона (*Вариньон Пьер, французский математик, XVII–XVIII вв.*). Середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырехугольника (рис. 2.69).

Теорема Брахмагупты (*Брахмагупта, индийский математик и астроном, VI–VII вв.*).

Если вписанный в окружность четырехугольник имеет длины сторон a, b, c, d и полупериметр p, то его площадь S вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

§ 6. Геометрические построения на плоскости

24. Инструменты построения. В зависимости от набора используемых инструментов задачи на построение делятся на различные типы:
задачи на построение
- циркулем и линейкой;

- только циркулем (построения Мора–Маскерони);
- только линейкой при условии, если на плоскости начерчена окружность и задан ее центр (построения Штейнера).

В школьном курсе рассматриваются построения, выполненные циркулем и линейкой.

Решение задачи на построение осуществляется в 4 этапа: анализ, построение, доказательство, исследование.

Рассмотрим основные действия, которые можно осуществлять с помощью циркуля и линейки — так называемые аксиомы построения.

25. Аксиомы построения.

1. Построение прямой, проходящей через две имеющиеся точки.
2. Построение окружности с центром в построенной точке и радиусом, равным отрезку с концами в построенных точках.
3. Построение пересечения двух построенных фигур.
4. Выбор любого конечного числа произвольных точек, принадлежащих одной из построенных фигур.

26. Основные построения. Построения, наиболее часто применяемые при решении задач, называют основными.

При решении задачи на построение этап построения должен быть осуществлен по шагам. Каждый шаг должен представлять собой или аксиому, или основное построение.

К основным относятся следующие 13 построений:

1. Откладывание на данном луче отрезка, равного данному.

2. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную данной.

3. Построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку.

4. Откладывание от данного луча в данную полуплоскость угла, равного данному.

5. Построение биссектрисы данного угла

6. Построение середины данного отрезка.

7. Построение серединного перпендикуляра к данному отрезку.

8. Построение треугольника по двум данным его сторонам и углу между ними.

9. Построение треугольника по стороне и двум, прилежащим к ней углам.

10. Построение треугольника по трем данным его сторонам.

11. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

12. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу.

13. Построение касательной к данной окружности, проходящей через данную точку.

В качестве примера разберем построение середины данного отрезка. В силу простоты поставленной задачи пропустим этапы анализа и исследования.

Построение.

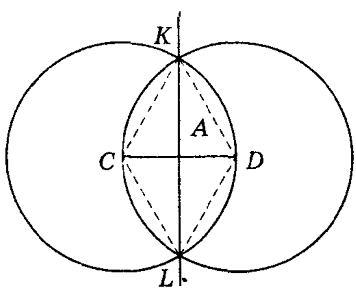


Рис. 2.70

Предположим, что CD — данный отрезок. Рассмотрим следующие шаги построения:

1. Построим окружность δ радиуса CD с центром в точке C.

2. Построим окружность γ радиуса CD с центром в точке D.

3. Построим точки K и L пересечения окружностей δ и γ: $\delta \cap \gamma = \{K, L\}$.

4. Построим прямую KL.

5. Построим точку A пересечения прямой KL с прямой, содержащей отрезок CD. A — искомая точка.

Доказательство.

Точка A является искомой, так как четырехугольник $CKDL$ — ромб (по построениям 1, 2, 3), а диагонали ромба в точке пересечения делятся пополам.

27. Основные методы решения задач на построение. Существуют три метода решения задач на построение:

- Метод геометрических мест точек.
- Метод геометрических преобразований.
- Алгебраический метод.

28. Основные геометрические места точек. *Геометрическое место точек* — это множество всех точек, удовлетворяющих заданным условиям.

Перечислим основные геометрические места точек:

1) Множество всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от данной точки — окружность с центром в данной точке и радиусом, равным заданному расстоянию.

2) Множество всех точек плоскости, равноудаленных на заданное расстояние от данной прямой —

пара прямых, параллельных данной, точки которых отстоят от данной прямой на заданное расстояние.

3) Множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных параллельных прямых — прямая, параллельная данным и делящая пополам всякий отрезок с концами на этих прямых.

4) Множество всех точек плоскости, равноудаленных от концов данного отрезка — прямая, перпендикулярная к данному отрезку, проходящая через его середину (серединный перпендикуляр к данному отрезку).

5) Множество всех точек плоскости, равноудаленных от сторон угла — биссектриса угла.

6) Множество всех точек плоскости, равноудаленных от пары данных пересекающихся прямых — пара взаимно перпендикулярных прямых, являющихся биссектрисами углов, образованных при пересечении данных прямых.

7) Множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом — окружность, построенная на данном отрезке как на диаметре (концы отрезка не рассматриваются).

8) Множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом — есть две дуги окружностей равных радиусов, опирающихся на данный отрезок (концы отрезка не рассматриваются).

§ 7. Планиметрические задачи

Пример 1•. Вершина A треугольника ABC принадлежит окружности, его сторона BC касается этой окружности в точке B, а сторона $AC = 6$ пересекает окружность в точке P так, что $PC + CB = AP$. Найдите длину отрезка касательной, проведенной из точки C.

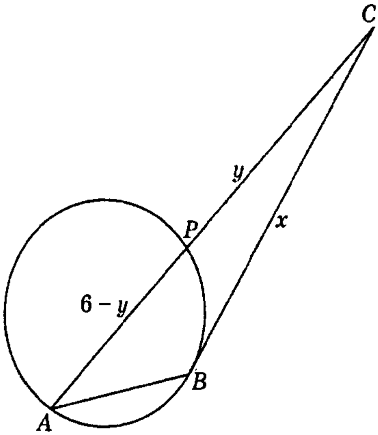


Рис. 2.71

Решение. Введем следующие обозначения: искомую касательную BC обозначим через x, внешний отрезок PC секущей AC — через y, тогда внутренний отрезок AP секущей AC равен $6 - y$.

1) По свойству секущей и касательной, проведенных из общей точки C к окружности, имеем:

$$BC^2 = CP \cdot CA,\ x^2 = 6y.$$

2) По условию $PC + CB = AP$, следовательно, $y + x = 6 - y$.

3) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = 6y, \\ y + x = 6 - y, \end{cases}$$

и найдем значение $x = BC = 3$.

Ответ: 3.

Пример 2*. В полуокружность вписан четырехугольник $ABCD$ с известными длинами трех сторон: $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $CD = 6$. Найдите длину четвертой стороны.

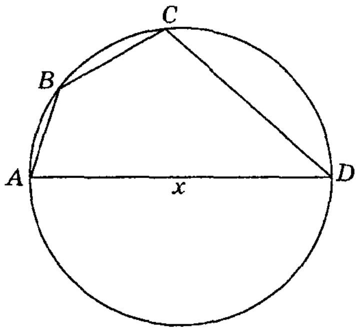


Рис. 2.72

Решение.

1) Четырехугольник $ABCD$, вписанный в полуокружность, является вписанным также в окружность. Воспользуемся теоремой Птолемея о том, что во всяком вписанном в окружность четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

2) Углы ABD и ACD являются прямыми, как вписанные, опирающиеся на диаметр AD. Следовательно, треугольники ABD и ACD являются прямоугольными. Применив к ним теорему Пифагора, соответственно получим:

$$BD^2 = AD^2 - AB^2 = x^2 - (2\sqrt{5})^2,$$

$$AC^2 = AD^2 - CD^2 = x^2 - 36.$$

$$BD = \sqrt{x^2 - 20},\ AC = \sqrt{x^2 - 36}.$$

3) Подставим полученные значения в равенство из п. 1) $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$, получим: $2\sqrt{5}(6 + x) = \sqrt{(x^2 - 20)(x^2 - 36)}$. Из последнего уравнения найдем значение $x = 10$.

Ответ: 10.

Пример 3$^\bullet$. Найдите площадь прямоугольной трапеции, синус острого угла которой равен $\frac{1}{7}$, а площадь вписанного в нее круга равна 4π.

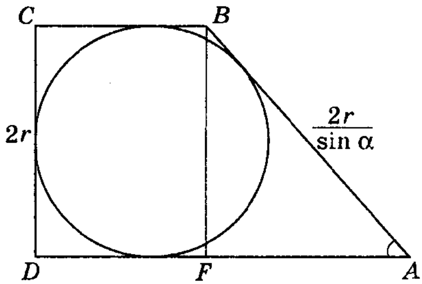


Рис. 2.73

Решение.

1) Радиус r вписанного круга равен 2, следовательно, высота трапеции равна $2r = 4$.

2) По свойству четырехугольника, описанного около круга, суммы длин его противоположных сторон равны:

$$AD + BC = AB + CD.$$

3) В прямоугольном треугольнике ABF, $\angle AFB = 90°$, $AB = \frac{2r}{\sin\alpha}$.

Подставляя значение AB в равенство из п. 2), получим: $AD + BC = 2r + \frac{2r}{\sin\alpha}$.

4) Искомая площадь трапеции выражается по формуле:

$$S = \frac{AD + BC}{2} 2r = \left(2r + \frac{2r}{\sin\alpha}\right) r = \left(4 + \frac{4}{\frac{1}{7}}\right) \cdot 2 =$$

$$= (28 + 4) \cdot 2 = 64.$$

Ответ: 64.

Пример 4. Постройте треугольник наименьшего периметра по данным одной из его сторон a и высоте h_a, проведенной к этой стороне.

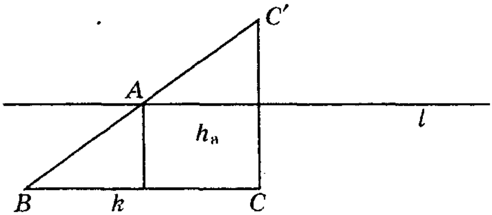


Рис. 2.74

Решение. Решение задачи на построение осуществляется в 4 этапа: анализ, построение, доказательство, исследование. Рассмотрим последовательно эти этапы.

1. Анализ.

Пусть задача решена. Точка A принадлежит множеству точек, расположенных на данном расстоянии от прямой BC, т. е. принадлежит прямой l, параллельной BC и отстоящей от нее на заданное расстояние.

Выполнение условия о наименьшем периметре означает, что значение суммы $BC + AC + AB$ должно быть наименьшим. Поскольку длина отрезка BC по условию задана и равна a, то наименьшее значение должна принимать сумма длин двух оставшихся сторон: $AC + AB$. Это возможно в том и только в том случае, когда три точки B, A и C принадлежат одной прямой. Рассмотрим осевую симметрию относительно оси l. Образом точки C при такой симметрии является точка C', такая, что $CC' \perp l$ и расстояния от точек C и C' до прямой l равны. Рассмотрим прямую BC', прямая BC' пересекает прямую l в точке A. Так как точки B, A, C' лежат на одной прямой, то значение суммы $BA + AC'$ — наименьшее. Следовательно, положение искомой точки A определено как пересечение прямых BC' и l.

2. Построение.

1) Любая прямая k, принадлежащая плоскости построения.

2) Любая точка B на прямой k.

3) Окружность $\omega(B, a)$ с центром в точке B, радиуса a.

4) Точка $C = \omega(B, a) \cap k$.

5) Прямая l, удаленная от прямой k на расстояние h_a.

6) Точка C', симметричная точке C относительно прямой l.

7) Прямая BC'.

8) Точка $A = BC' \cap l$.

9) Треугольник ABC — искомый.

3. Доказательство.

Построенный в пункте 9) раздела «Построение» треугольник ABC — искомый, так как выполняются все требования условия задачи. Действительно,

1) $BC = a$ по пунктам 3), 4) раздела «Построение».

2) Длина высоты треугольника, проведенной к стороне BC, равна h_a по пунктам 5), 8) раздела «Построение» .

3) Построенный треугольник является треугольником наименьшего периметра, так как по пункту 6) раздела построение $BC + AC + AB = BC + AC' + AB$.

4. Исследование.

Задача всегда имеет решение. С точностью до движений плоскости решение — единственное.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 8. Прямые и плоскости в пространстве

29. Параллельность прямых и плоскостей.

Признак параллельности прямой и плоскости:

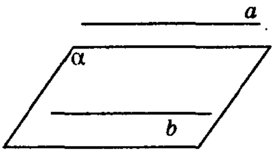


Рис. 2.75

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Свойство прямой, параллельной плоскости:

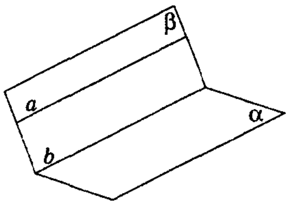


Рис. 2.76

Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Признаки параллельности плоскостей:

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (рис. 2.77).

2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны (рис. 2.78).

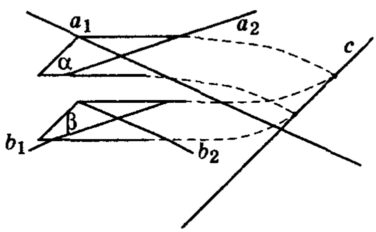


Рис. 2.77

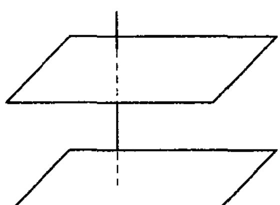


Рис. 2.78

Свойства параллельных плоскостей:

1) Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны.

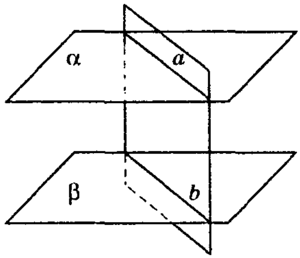


Рис. 2.79

2) Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

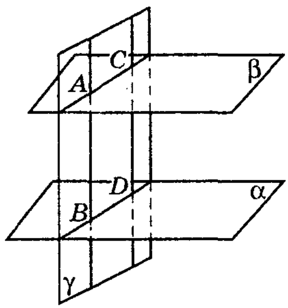


Рис. 2.80

30. Перпендикулярность прямых и плоскостей.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости:

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

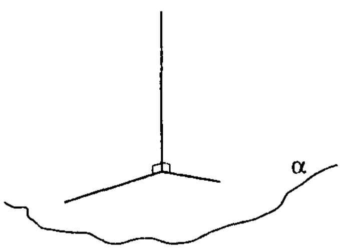


Рис. 2.81

Свойства прямых, перпендикулярных плоскости:

1) Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

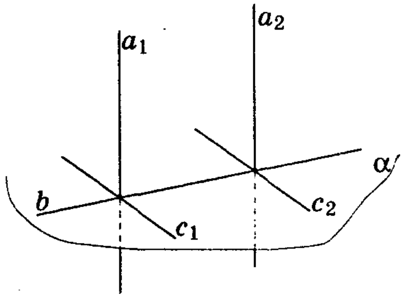


Рис. 2.82

2) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

3) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Теорема о трех перпендикулярах. **Наклонная к плоскости перпендикулярна к прямой, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой.**

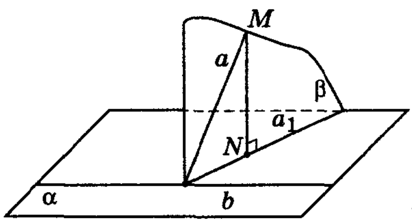


Рис. 2.83

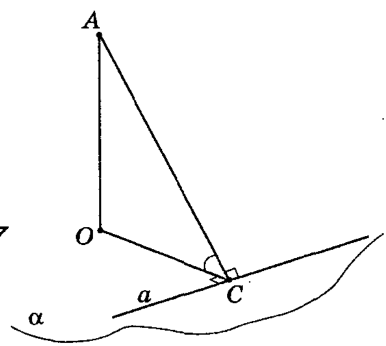


Рис. 2.84

Признак перпендикулярности двух плоскостей:

Если одна из двух плоскостей содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

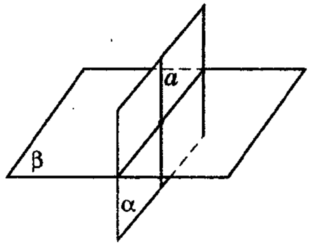


Рис. 2.85

31. Скрещивающиеся прямые. Скрещивающимися прямыми называются прямые, не лежащие в одной плоскости.

Признак скрещивающихся прямых:

Если одна из двух данных прямых лежит в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые являются скрещивающимися.

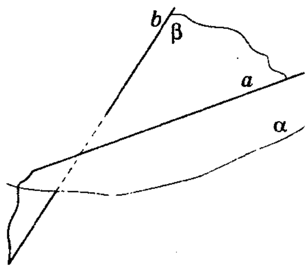


Рис. 2.86

Расстояние между скрещивающимися прямыми:

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между параллельными плоскостями, содержащими данные скрещивающиеся прямые.

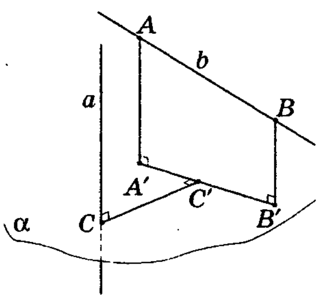


Рис. 2.87

Для того чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, надо:

1) построить плоскость α, перпендикулярную одной из

скрещивающихся прямых (на рисунке 2.87 — это прямая a);

2) построить точку пересечения C прямой a и плоскости α;

3) построить ортогональную проекцию $A'B'$ второй прямой на плоскость α (на рисунке — прямой b);

4) из точки C восстановить перпендикуляр CC' на проекцию $A'B'$ прямой b;

5) длина отрезка CC' — расстояние между скрещивающимися прямыми a и b.

Теорема об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр.

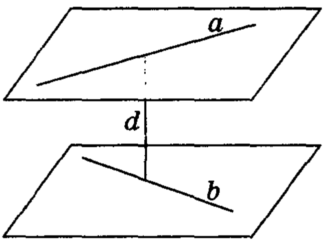


Рис. 2.88

Длина общего перпендикуляра d равна расстоянию между скрещивающимися прямыми.

Угол между скрещивающимися прямыми

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

32. Основные теоремы. Подводя итог по данному разделу, сформулируем семь, на наш взгляд, основных для решения задач теорем в данной теме:

1. Признак параллельности прямой и плоскости.
2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
3. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

4. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

5. Теорема о трех перпендикулярах.

6. Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости, перпендикулярна третьей плоскости.

7. Пусть две плоскости взаимно перпендикулярны и в первой из них взята точка, из которой восстановлен перпендикуляр к второй плоскости. Тогда этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.

33. Углы в пространстве.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой AB и плоскостью α — это угол между прямой AB и ее проекцией OB на плоскость α.

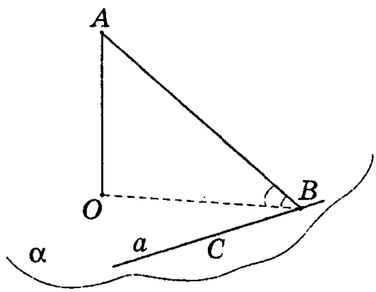


Рис. 2.89

Угол между плоскостями. Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла

Угол между плоскостями

Угол между двумя плоскостями измеряется углом, образованным прямыми AB и CD, которые перпендикулярны данным плоскостям соответственно.

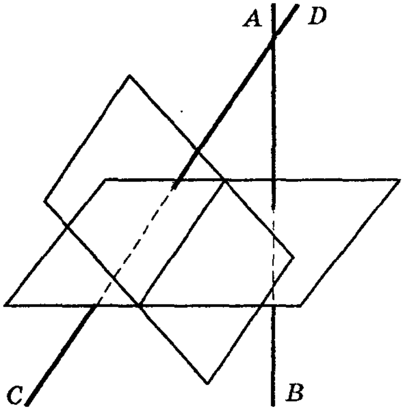


Рис. 2.90

• В случае, если угол между прямыми AB и CD прямой, плоскости перпендикулярны.

• Угол между двумя параллельными плоскостями равен нулю.

Двугранный угол

Двугранный угол — угол между двумя плоскостями, имеющими общую прямую MN, измеряется своим линейным углом $\angle AOB$ (рис. 2.91).

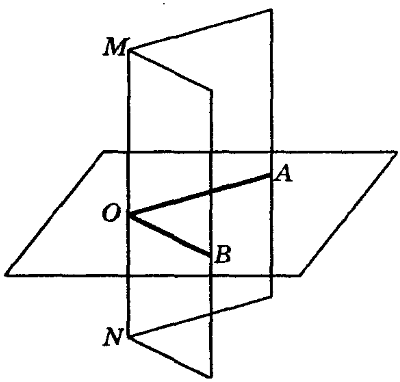


Рис. 2.91

Линейный угол двугранного угла строится следующим образом: в произвольной точке C линии a пересечения рассматриваемых плоскостей α и β восстанавливаются в каждой из плоскостей соответственно перпендикуляры CA и CB. Полученный $\angle ACB$ является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями α и β.

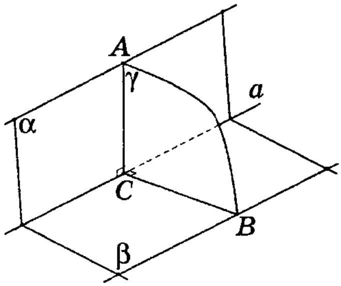


Рис. 2.92

В случае, если величина линейного угла 90°, плоскости α и β взаимно перпендикулярны.

Многогранный угол. Трехгранный угол. Плоский угол многогранного угла

Многогранным углом называется фигура, образованная множеством плоскостей AOB, BOC, COD..., проведенных через произвольную точку пространства O, последовательно пересекающихся по прямым OB, OC, OD, ... так, что последняя из этих плоскостей пересекается с первой (рис. 2.93).

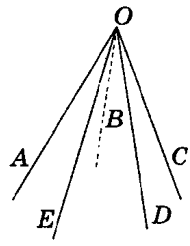


Рис. 2.93

Образуемые при этом углы AOB, BOC, COD, ..., EOA называются его *плоскими углами*.

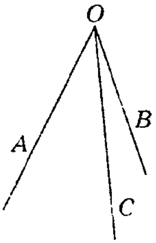


Рис. 2.94

В случае минимального количества граней (очевидно, что это число равно 3) многогранный угол называют *трехгранным углом* (рис. 2.94).

Некоторые свойства двугранных и трехгранных углов:

1) Углы между биссектрисами плоских углов трехгранного угла, взятыми попарно, либо одновременно все острые, либо все тупые, либо — прямые.

2) Сумма косинусов плоских углов трехгранного угла не меньше $-\frac{3}{2}$:

$$\cos\angle AOB + \cos\angle BOC + \cos\angle COA \geqslant -\frac{3}{2}.$$

3) Обозначим величины плоских углов трехгранного угла через $\angle BOC = \alpha$; $\angle COA = \beta$; $\angle AOB = \gamma$.

Тогда величины линейных углов $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ его двугранных углов выражаются по формулам:

$$\cos\angle a = \frac{\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma};$$

$$\cos\angle b = \frac{\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma};$$

$$\cos\angle c = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta};$$

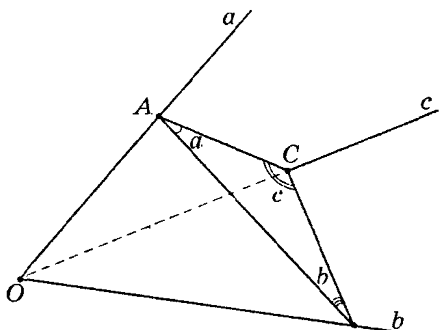


Рис. 2.95

4) Обозначим величины линейных углов двугранных углов трехгранного угла через $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$.

Тогда величины его плоских углов $\angle BOC = \alpha$; $\angle COA = \beta$; $\angle AOB = \gamma$ выражаются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c};$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b + \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c};$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c + \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

В частности, плоские углы трехгранного угла прямые, тогда и только тогда, когда линейные углы его двугранных углов также прямые.

§ 9. Многогранники. Площади поверхностей и объемы

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждого многоугольника его поверхности.

34. Пирамида. *Пирамидой* называется многогранник, одна грань которого (*основание*) — многоугольник, а остальные грани (*боковые*) — треугольники, имеющие общую вершину (*вершину пирамиды*) — точку пересечения отрезков (*боковых ребер*), соединяющих ее с вершинами основания.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из ее вершины на плоскость основания.

В зависимости от многоугольника, являющегося основанием, пирамида может быть:

треугольной (*тетраэдром, или четырехгранником*),

четырехугольной,

пятиугольной,

шестиугольной и т.д., n-угольной.

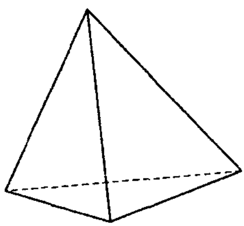


Рис. 2.96

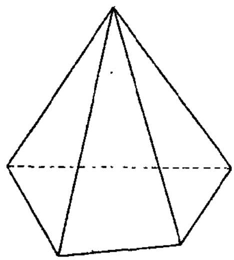


Рис. 2.97

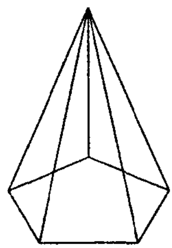


Рис. 2.98

Пирамида называется *правильной*, если в *основании лежит правильный многоугольник*, а ее *высота проходит через центр основания*. Все боковые ребра правильной пирамиды равны; все боковые грани — равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой*.

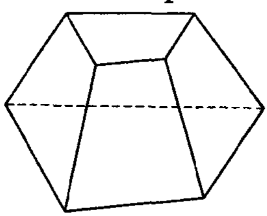


Рис. 2.99

Тело, ограниченное сечением, проведенным в пирамиде параллельно основанию, основанием пирамиды, и заключенной между ними боковой поверхностью, называется *усеченной пирамидой*.

Формулы вычисления объема и площади поверхности пирамиды

Введем следующие обозначения:

V — объем;

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания;

$P_{\text{осн}}$ — периметр основания;

k — апофема;

h — высота.

Тогда формулы для вычисления объема и площади поверхности имеют вид:

Для произвольной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h;\ S_{\text{бок}} = \sum_{i=1}^{n} S_i;\ S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

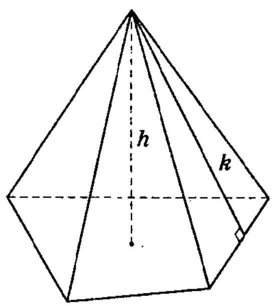


Рис. 2.100

Для правильной пирамиды:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot k.$$

Для усеченной пирамиды (рис. 2.101):

$$V = \frac{1}{3} \cdot h(S + s + \sqrt{Ss});\ S_{\text{бок}} = \frac{S - s}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}(P + p) \cdot k,$$

где S, s — площади нижнего и верхнего оснований соответственно, P, p — периметры нижнего и верх-

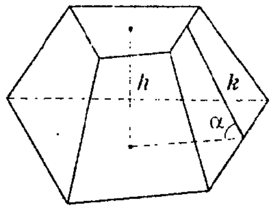


Рис. 2.101

него оснований соответственно, α — величина линейного угла двугранного угла при ребре нижнего основания (рис. 2.101).

35. Призма. Призмой называется многогранник, две грани которого (*основания*) — плоские выпуклые равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани (*боковые*) — параллелограммы.

Боковыми ребрами называются отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований.

Призма называется *прямой*, если ее боковое ребро перпендикулярно плоскости основания (рис. 2.102).

Призма называется *наклонной*, если боковое ребро призмы не перпендикулярно плоскости основания (рис. 2.103).

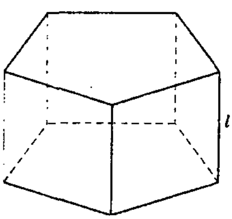


Рис. 2.102

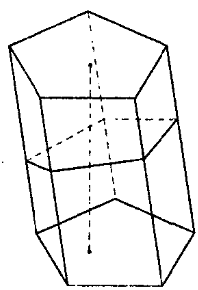


Рис. 2.103

Сечение, образованное плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру призмы, называется *нормальным* (*ортогональным*) сечением призмы.

Призма называется *параллелепипедом*, если ее основания — параллелограммы.

Если боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований, то параллелепипед называется *прямым*. Прямой параллелепипед, основания которого — прямоугольники, называется *прямоугольным*. Призма, все грани которой — квадраты, называется *кубом*.

Формулы вычисления объема и площади поверхности призмы

Введем следующие обозначения:

V — объем;

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания;

$P_{\text{осн}}$ — периметр основания;

k — апофема;

h — высота.

$P_{\perp}$ — периметр нормального (перпендикулярного) сечения;

$S_{\perp}$ — площадь нормального (перпендикулярного) сечения;

l — длина бокового ребра.

Тогда формулы для вычисления объема и площади поверхности имеют вид:

Для произвольной призмы:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = S_{\perp} \cdot l; \; S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l;$$
$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

Для прямой призмы:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h.$$

Для прямоугольного параллелепипеда:

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac);\ V = abc;\ d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Для куба:

$$d = a\sqrt{3};\ S_{\text{полн}} = 6a^2;\ V = a^3.$$

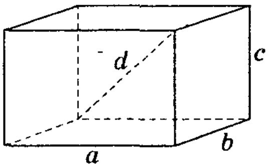


Рис. 2.104

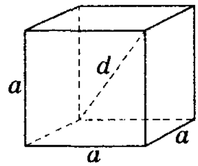


Рис. 2.105

36. Правильные многогранники. *Правильным многогранником* называется выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

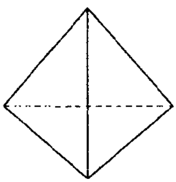


Рис. 2.106

Существует 5 типов правильных выпуклых многогранников: *правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.*

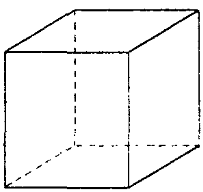


Рис. 2.107

• Гранями правильного тетраэдра (рис. 2.106) являются 4 правильных треугольника, в каждой вершине сходятся по 3 ребра;

• Гранями куба являются 6 квадратов (рис. 2.107), в каждой вершине сходятся по 3 ребра;

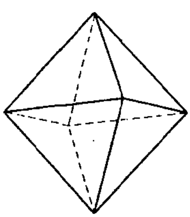


Рис. 2.108

• Гранями октаэдра являются 8 правильных треугольников, в каждой вершине сходятся по 4 ребра (рис. 2.108);

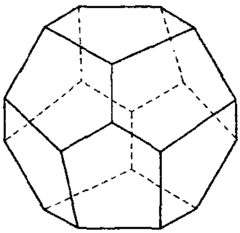


Рис. 2.109

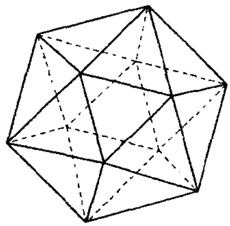


Рис. 2.110

- Гранями додекаэдра являются 12 правильных пятиугольников, в каждой вершине сходятся по 3 ребра (рис. 2.109);
- Гранями икосаэдра являются 20 правильных треугольников, в каждой вершине сходятся по 5 ребер (рис. 2.110).

В любой правильный многогранник можно вписать сферу радиуса r и около любого правильного многогранника можно описать сферу радиуса R.

Формулы вычисления объемов и площадей поверхностей правильных многогранников

Правильный многогранник	Объем V	Площадь полной поверхности $S_{полн}$	Радиус описанной сферы R	Радиус вписанной сферы r
Правильный тетраэдр	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}h$, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$	$\frac{1}{4}h$, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
Куб	a^3	$6a^2$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
Октаэдр	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$
Додекаэдр	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$
Икосаэдр	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$

37. Изображение фигур на плоскости.

Параллельное проектирование

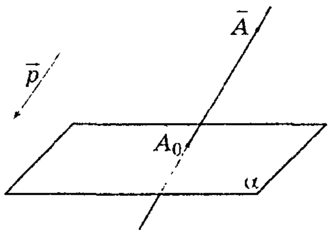


Рис. 2.111

Для изображения пространственных фигур на плоскости в базовом школьном курсе геометрии используют параллельное проектирование.

При изображении фигуры при помощи параллельного проектирования поступим следующим образом: рассмотрим произвольный вектор $\vec{p}$ (подробнее о векторах см. раздел «Векторы»), не параллельный плоскости α, на которой мы хотим получить изображение фигуры, проведем через каждую точку $\bar{A}$ фигуры прямую, параллельную выбранному вектору.

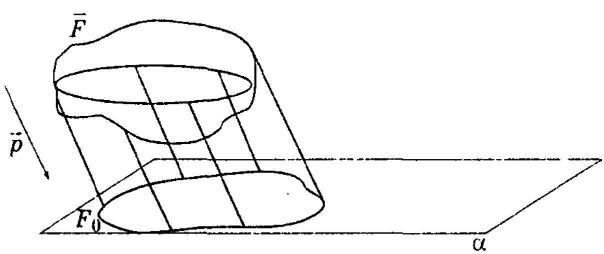


Рис. 2.112

Полученное таким образом множество точек A_0 пересечения прямых с плоскостью изображения α является изображением F_0 заданной в пространстве фигуры $\bar{F}$.

Фигура, принадлежащая плоскости изображения α и подобная фигуре F_0, также может служить изображением заданной в пространстве фигуры $\bar{F}$.

В случае, если вектор $\vec{p}$ проектирования перпендикулярен плоскости изображения, параллельное проектирование называется *ортогональным проектированием*.

Свойства параллельного проектирования:

1) Проекцией прямой является прямая.

2) Проекцией отрезка является отрезок.

3) Параллельные прямые (отрезки) изображаются на плоскости чертежа параллельными прямыми (отрезками, или отрезками, лежащими на одной прямой).

4) Отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, сохраняется при параллельном проектировании: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$; $\frac{AB}{B^*C^*} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

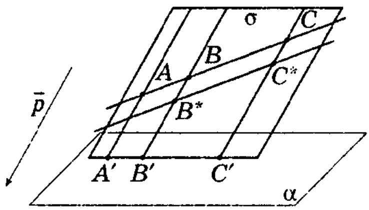


Рис. 2.113

§ 10. Геометрические построения в пространстве

38. Аксиомы построения.

1. Плоскость считается построенной, если построены элементы, ее определяющие.

2. Если построены две пересекающиеся плоскости, то построена и линия их пересечения.

3. Во всякой плоскости пространства все построения планиметрии считаются выполнимыми.

39. Основные построения.

1. Построение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярной данной прямой.

2. Построение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярной данной плоскости.

3. Построение плоскости, проходящей через одну из двух данных скрещивающихся прямых, параллельной другой прямой.

4. Построение двух параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из двух данных скрещивающихся прямых.

5. Построение плоскости, проходящей через одну из двух данных взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых, перпендикулярной другой прямой.

6. Построение плоскости, проходящей через данную точку, параллельной данной плоскости.

7. Построение плоскости, проходящей через данную прямую, перпендикулярной данной плоскости.

8. Построение общего перпендикуляра двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых.

9. Построение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых.

40. Основные геометрические места точек в пространстве.

1. Множество точек, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, перпендикулярная прямой, проходящей через эти две точки и проходящая через середину отрезка с концами в этих точках.

2. Множество точек, отстоящих от данной плоскости на данное расстояние, есть две плоскости, параллельные данной плоскости и отстоящие от нее на данное расстояние.

3. Множество точек, удаленных от данной точки на данное расстояние, есть сфера с центром в данной точке и радиусом, равным данному расстоянию.

4. Множество точек, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой, есть прямая, перпендикулярная плоскости, определяемой тремя данными точками, и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в данных точках.

5. Множество точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть две взаимно перпендикулярные плоскости, перпендикулярные плоскости, определяемой двумя данными пересекающимися прямыми, и делящие углы между данными прямыми пополам.

6. Множество точек, равноудаленных от четырех данных точек, не лежащих в одной плоскости, есть центр сферы, проходящей через эти четыре точки.

7. Множество точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние, есть цилиндр с радиусом, равным данному расстоянию, осью которого является данная прямая.

8. Множество точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых, есть плоскость, проходящая через середину их общего перпендикуляра и перпендикулярная ему.

9. Множество точек, равноудаленных от сторон данного треугольника, есть прямая, перпендикулярная плоскости треугольника, проходящая через центр вписанной в этот треугольник окружности.

10. Множество точек, равноудаленных от двух данных параллельных плоскостей, есть параллельная им плоскость, проходящая через середину любого общего перпендикуляра данных плоскостей.

11. Множество точек, равноудаленных от граней данного двугранного угла, есть биссекторная полуплоскость этого угла.

12. Множество точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей, есть пара

биссекторных плоскостей, проходящих через линию пересечения данных плоскостей.

41. Построение сечений многогранников.

Основные методы построения сечений многогранников:

1. Метод следов.
2. Метод параллельного проектирования.
3. Метод центрального проектирования.
4. Комбинированный метод.

§ 11. Тела вращения. Площади поверхностей и объемы

Телом вращения в школьном курсе геометрии называется такое тело, которое пересекается плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (*оси вращения*), по кругам с центрами на этой оси. Примерами тел вращения в простейшем случае являются круговой цилиндр, круговой конус, сфера.

42. Цилиндр. *Цилиндром* (*круговым цилиндром*) называется тело, состоящее из двух кругов (*оснований цилиндра*), совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие при параллельном переносе точки этих кругов. Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей оснований, называются *образующими цилиндра*.

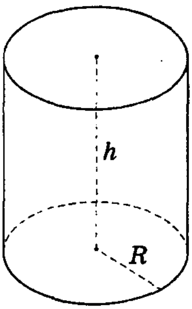


Рис. 2.114

Цилиндр называется *прямым* (рис. 2.114), если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. В противном случае цилиндр называется *наклонным*.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований. *Осью* цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением*.

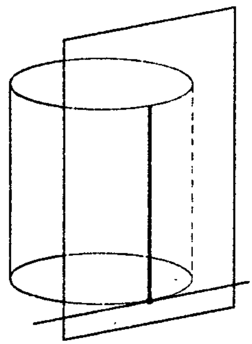


Рис. 2.115

Плоскость, проходящая через образующую прямого цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью цилиндра* (рис. 2.115).

Формулы вычисления объема и площади поверхности цилиндра

Введем следующие обозначения:

V — объем;

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

R — радиус;

h — высота.

В данных обозначениях формулы для вычисления объема и площади поверхности цилиндра имеют следующий вид:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot h; \ S_{\text{полн}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot h; \ V = \pi R^2 h.$$

43. Конус. Конусом (*круговым конусом*) называется тело, состоящее из круга (*основания конуса*), точки, не лежащей в плоскости этого круга (*вершины конуса*), и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания (рис. 2.116). В противном случае, конус называется *наклонным*. В школьном курсе изучается прямой круговой конус. *Высотой* конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. *Осью* прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* конуса (рис. 2.117).

Тело, ограниченное сечением, проведенным в конусе параллельно основанию, основанием, и заключенной между ними боковой поверхностью конуса, *называется усеченным конусом* (рис. 2.118).

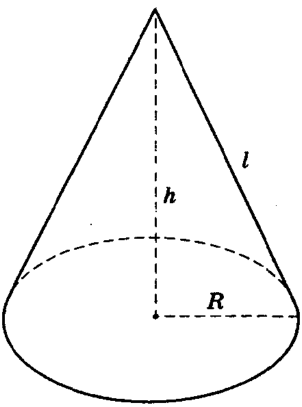


Рис. 2.116

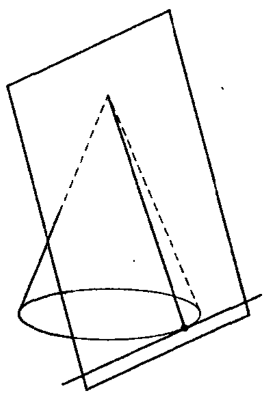


Рис. 2.117

Формулы вычисления объема и площади поверхности конуса

Введем следующие обозначения:

V — объем;

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

l — образующая;

R, r — радиусы оснований;

D, d — диаметры оснований;

h — высота.

В данных обозначениях формулы для вычисления объема и площади поверхности конуса имеют следующий вид:

Для кругового конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi R \cdot l = \frac{1}{2}\pi \cdot D \cdot l; \; S_{\text{полн}} = \pi R(R + l);$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Для усеченного конуса (рис. 2.119):

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot l \cdot (R + r) = \frac{1}{2}\pi(D + d);$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + \pi(R^2 + r^2); \; V = \frac{1}{3}\pi \cdot h(R^2 + Rr + r^2).$$

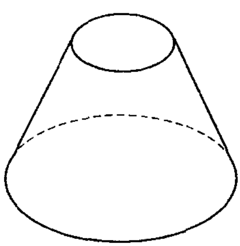


Рис. 2.118

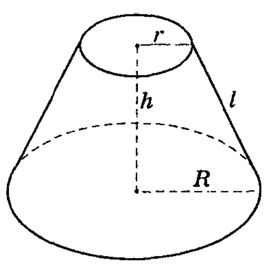


Рис. 2.119

44. Шар. *Шаром* называется тело (рис. 2.120), состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (*радиуса шара*), от данной точки (*центра шара*).

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом*.

Плоскость, проходящая через произвольную точку шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в данную точку, называется *касательной плоскостью* (рис. 2.121).

Шаровым сегментом называется (рис. 2.122) часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Шаровым слоем называется часть шара (рис. 2.123), расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.

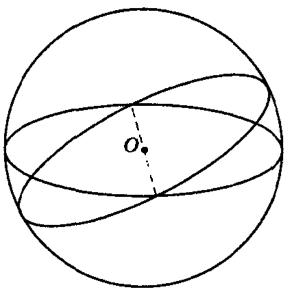


Рис. 2.120

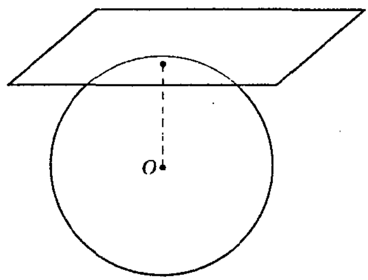


Рис. 2.121

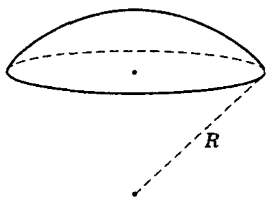


Рис. 2.122

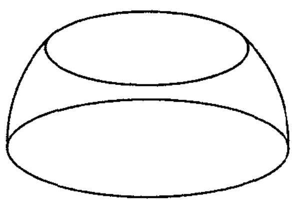


Рис. 2.123

Шаровой сектор (рис. 2.124) может быть получен из шарового сегмента и конуса следующим образом:

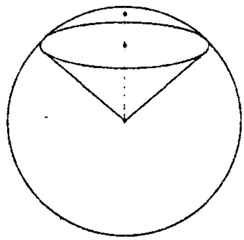


Рис. 2.124

если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом с вершиной в центре шара и основанием, совпадающим с основанием сегмента;

если шаровой сегмент больше полушара, то данный конус из него удаляется.

Формулы вычисления объема и площади поверхности шара и его элементов

Для вычисления объема и площади поверхности шара и его элементов введем следующие обозначения:

V — объем;

S — площадь поверхности шара;

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности элемента шара;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности элемента шара;

R — радиус;

d — диаметр;

h — высота.

В данных обозначениях формулы для вычисления объема и площади поверхности элементов шара имеют следующий вид:

Для шара:

$$S = 4\pi \cdot R^2 = \pi \cdot d^2; \; V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot d^3.$$

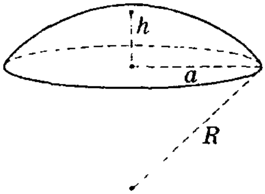


Рис. 2.125

Для шарового сегмента (рис. 2.125):

$$a = \sqrt{h(2R - h)};\ a^2 = h(2R - h);$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(2Rh + a^2) = \pi(h^2 + 2a^2);$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3a^2).$$

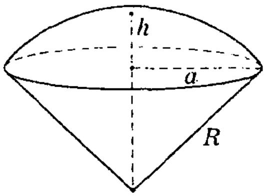


Рис. 2.126

Для шарового сектора (рис. 2.126):

$$S_{\text{полн}} = \pi R(2h + a);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

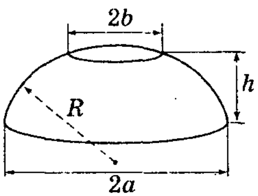


Рис. 2.127

Для шарового слоя (рис. 2.127):

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2;$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh;$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(2Rh + a^2 + b^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

§ 12. Стереометрические задачи

Пример 1•. В правильном тетраэдре с боковым ребром, равным стороне основания, найдите косинус угла между пересекающимися медианами боковых граней.

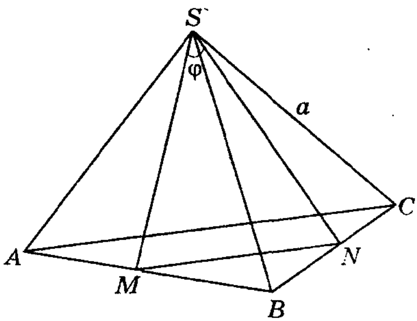


Рис. 2.128

Решение.

1) Обозначим ребро тетраэдра через a. Так как SM, SN — медианы боковых граней, то MN — средняя линия треугольника ABC, следовательно, $MN = \frac{a}{2}$.

2) ΔABS — равносторонний, $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3) Треугольник SMN — равнобедренный, $SM = SN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов: $MN^2 = SM^2 + SN^2 - 2SM \cdot SN \cdot \cos\varphi$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2(1 - \cos\varphi),\ 1 - \cos\varphi = \frac{1}{6},\ \cos\varphi = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Пример 2. Постройте сечение куба с ребром, равным 6, плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания куба и середину одной из сторон его верхнего основания. Найдите расстояние от центра куба до этой плоскости.

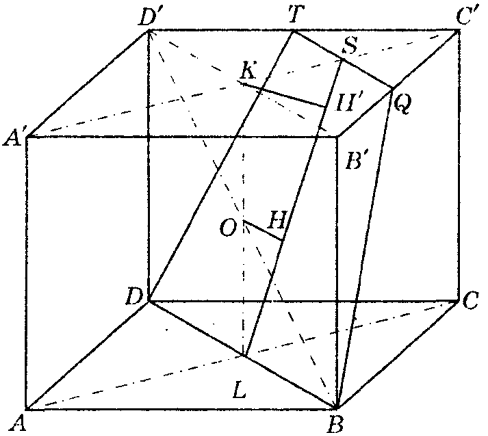


Рис. 2.129

Решение.

1) Рассмотрим треугольник KSL: $\angle SKL = 90°$, KH' — высота, проведенная из прямого угла, $OH \parallel KH'$, следовательно, $OH \perp SL$.

2) $OH \perp (BDT)$, так как $OH \perp LC$ (по построению), $OH \perp DB$ ($DB \perp ACC'$, $OH \in ACC'$).

3) $KL = 6$, $KS = \frac{1}{2}KC'$, $KC' = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, $KS = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $LO = \frac{6}{2} = 3$, так как O — центр куба, следовательно, O — середина LK.

Треугольники LKS и LHO подобны, следовательно, $\frac{LS}{LO} = \frac{KS}{HO}$.

$$LS = \sqrt{LK^2 + KS^2} = \sqrt{6^2 + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{72+9}{2}} = 9\sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= 9\frac{\sqrt{2}}{2}, \ HO = \frac{LO \cdot KS}{LS} = \frac{\frac{6}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 3*. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом $1+\sqrt{2}$. Высота пирамиды, равная $1+$ $+\sqrt{2}$, проходит через вершину острого угла. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

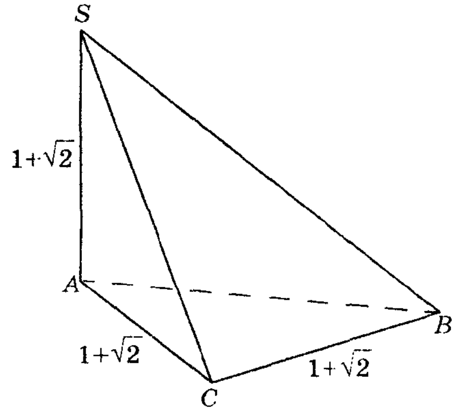


Рис. 2.130

Решение.

1) $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$

2) Обозначим катет основания и высоту пирамиды через a, тогда $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} a^2$.

3) $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{6}$.

4) $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$.

5) Найдем радиус вписанного шара. Для этого рассмотрим сумму объемов четырех пирамид с вершинами в центре шара, с основаниями — соответствующими гранями исходной пирамиды, с высотами, равными радиусу вписанного шара. Очевид-

но, что объем данной пирамиды равен данной сумме объемов:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}rS_{ABC} + \frac{1}{3}rS_{ASC} + \frac{1}{3}rS_{ABS} + \frac{1}{3}rS_{SBC} =$$

$$= \frac{1}{3}r(S_{ABC} + S_{ASC} + S_{ABS} + S_{SBC}) = \frac{1}{3}rS_{\text{полн}},$$

$$r = \frac{3V}{S_{\text{полн}}}.$$

Замечание.

Приведенное нами рассуждение для нахождения радиуса вписанного в пирамиду шара справедливо для любого вида пирамиды. Следовательно, для нахождения радиуса шара, вписанного в пирамиду, в произвольном случае верна полученная в процессе решения задачи формула: $r = \dfrac{3V}{S_{\text{полн}}}$.

6) $S_{\text{полн}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = a^2(1 + \sqrt{2}) =$
$= (1 + \sqrt{2})^3$.

$$r = \frac{3V}{S_{\text{полн}}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{6}}{a^2 \cdot (1 + \sqrt{2})} = \frac{a}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{(1 + \sqrt{2})}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{2}.$$

7) $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Пример 4. Сечение, проведенное параллельно оси цилиндра, делит окружность основания в отношении 1 : 5 и является боковой гранью площади $S = 10$ ед.^{2} треугольной призмы, помещенной в цилиндр. Противоположное боковое ребро призмы совпадает с осью цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

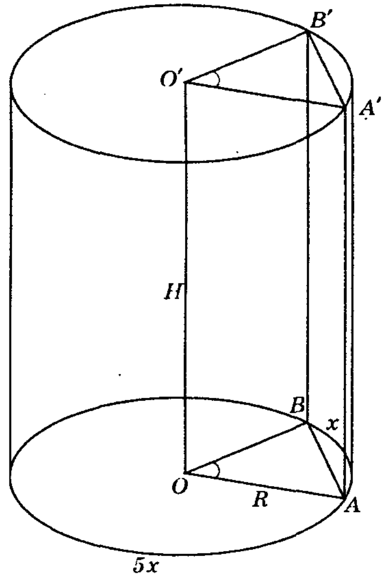


Рис. 2.131

Решение.

1) $S_{\text{бок.призмы}} = 2S_{AOO'A'} + S_{ABB'A'} = 2RH + S$.

2) Радианная мера окружности равна 2π. Тогда $2\pi = x + 5x$; $6x = 2\pi$; $x = \frac{\pi}{3}$.

Таким образом, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$.

3) Рассмотрим треугольник AOB. Треугольник AOB равнобедренный, с углом при вершине $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, этот треугольник — равносторонний, $AB = R$. Значит, площадь прямоугольника $AOO'A'$ равна площади прямоугольника $ABB'A'$: $S_{AOO'A'} + S_{ABB'A'} = RH = 10$.

4) $S_{\text{бок.призмы}} = 3RH = 30$.

Ответ: 30.

Пример 5*. В шар вписан конус, в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найдите отношение объемов цилиндра и шара, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен 45°.

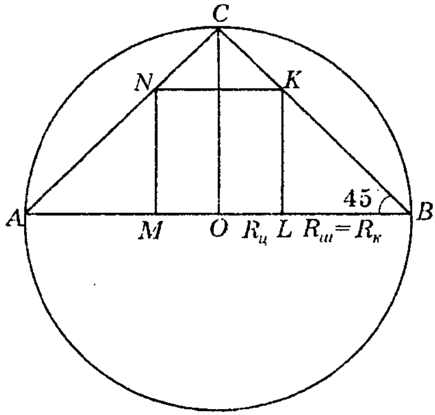


Рис. 2.132

Решение.

1) Рассмотрим осевые сечения данных фигур. Так как осевое сечение конуса представляет собой равнобедренный треугольник ABC с углом при основании 45°, то этот треугольник — прямоугольный $\angle C = 90°$ и, следовательно, $\angle C$ опирается на диаметр большого круга, являющегося осевым сечением шара. Таким образом, радиус шара равен радиусу конуса $R_ш = R_к$.

2) По условию задачи осевым сечением цилиндра является квадрат $MNKL$. Следовательно, радиус цилиндра равен половине его высоты: $R_ц = OL =$

$$= \frac{1}{2}KL,\ 2R_ц = KL.$$

Треугольник BLK прямоугольный с острым углом 45°, следовательно, этот треугольник — равнобедренный, $KL = LB$. Следовательно, $2R_ц = LB$, $LB = R_ш - R_ц$, $2R_ц = R_ш - R_ц$, $3R_ц = R_ш$.

3) $V_ц = \pi \cdot R_ц^2 H = \pi \cdot R_ц^2 KL = 2\pi R_ц^3$,

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R_ш^3 = \frac{4}{3}\pi(3R_ц)^3 = 36\pi R_ц^3, \quad \frac{V_ц}{V_ш} = \frac{2\pi R_ц^3}{36\pi R_ц^3} = \frac{1}{18}.$$

Ответ: $\frac{1}{18}$.

§ 13. Декартовы координаты. Уравнения фигур

Декартовы координаты

Через произвольную точку O (*начало координат*) плоскости проведем две взаимно перпендикулярные прямые (*оси координат*) OX (*ось абсцисс*) и OY (*ось ординат*).

Через произвольную точку M, отличную от точки O, проведем прямую, параллельную оси ординат, до ее пересечения с осью абсцисс. Число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от начала координат до полученной точки пересечения, называется *абсциссой* точки M.

Через точку M проведем прямую, параллельную оси абсцисс, до ее пересечения с осью ординат. Число y, абсолютная величина которого равна расстоянию от начала координат до полученной точки пересечения, называется *ординатой* точки M.

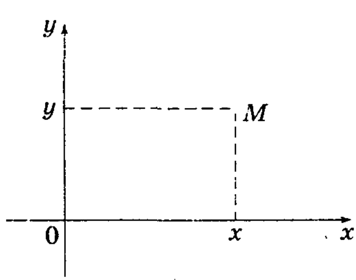


Рис. 2.133

Таким образом, мы каждой точке плоскости, отличной от начала координат, сопоставили пару действительных чисел — абсциссу x и ординату y: $M(x, y)$. Координатами начала координат очевидно являются $x = 0$, $y = 0$.

Система, состоящая из начала координат и взаимно перпендикулярных координатных осей, называется *декартовой системой координат* по имени французского математика Рене Декарта (1596–1650), а координаты точек — декартовыми координатами.

Аналогичным образом введем декартовы координаты в пространстве.

Рассмотрим три попарно перпендикулярные в пространстве прямые (*координатные прямые*), пересекающиеся в одной точке O (*начале координат*). Данные прямые попарно образуют три плоскости (*координатные плоскости*).

Через произвольную точку пространства M, отличную от начала координат, проведем плоскость, параллельную плоскости XOY. Эта плоскости пересекает ось OZ (*ось аппликат*) в некоторой точке.

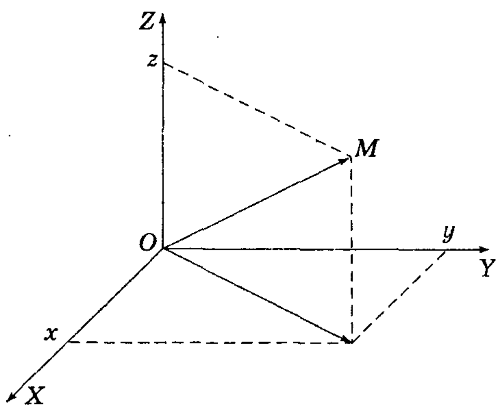


Рис. 2.134

Координатой z точки M называется число, равное по абсолютной величине расстоянию от начала координат O до полученной точки пересечения. Аналогично определяются две оставшиеся координаты — x и y.

Таким образом, мы каждой точке пространства, отличной от начала координат, сопоставили тройку действительных чисел — абсциссу x, ординату y и аппликату z: $M(x, y, z)$. Координатами начала координат являются значения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Основные формулы в декартовой системе координат на плоскости:

1) Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2) Координаты середины отрезка с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Уравнения прямой на плоскости в декартовой системе координат:

1) Общее уравнение прямой: $ax + by + c = 0$.

2) Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, где k — тангенс угла наклона прямой к оси Ox (угловой коэффициент).

3) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(x_0; y_0)$: $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = k$ — тангенс угла наклона прямой к оси Ox (угловой коэффициент).

4) Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, где a, b — отрезки, отсекаемые прямой на осях абсцисс и ординат соответственно.

11-1707и

5) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Взаимное расположение прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2$$

1) условие параллельности: $k_1 = k_2$;

2) условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2 = -1$;

3) угол α между прямыми может быть найден по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Уравнения кривых на плоскости:

парабола: $y = ax^2 + bx + c$

$$y^2 = 2px$$

гипербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

окружность с центром в начале координат радиуса R:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

окружность с центром в точке $(a;\ b)$ радиуса R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Основные формулы в декартовой системе координат в пространстве:

1) Расстояние между точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2) Координаты середины отрезка с концами в точках $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Уравнение плоскости в декартовой системе координат в пространстве:

1) Общее уравнение плоскости:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

2) Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях.

Уравнение сферы в декартовых координатах в пространстве:

Сфера с центром в начале координат радиуса R:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Сфера с центром в точке $(a; b; c)$ радиуса R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

§ 14. Векторы

Понятие вектора

Вектор характеризуется направлением и абсолютной величиной.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина направленного отрезка, определяющего данный вектор.

Координаты вектора

Пусть в прямоугольной системе координат $OE_1E_2E_3$ точки E_1, E_2, E_3 имеют соответственно

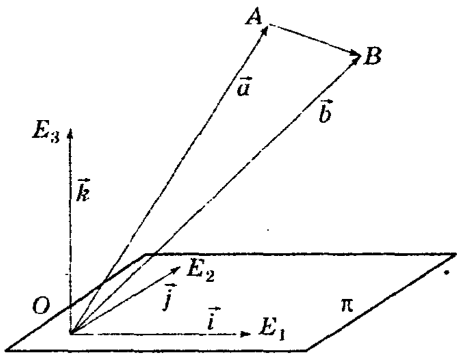


Рис. 2.135

координаты (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Назовем векторы $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OE_3}$ *координатными векторами*, или *базисными векторами*.

Тогда для базисных векторов выполняются следующие соотношения: $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

В этом случае базисные векторы называются *единичными*. Система векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называется *ортонормированным базисом*.

Пусть в системе координат $OE_1E_2E_3$ точка A имеет координаты (a_1, a_2, a_3), точка B имеет координаты (b_1, b_2, b_3).

Тогда координатами вектора с началом в точке A и концом в точке B называются числа: $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$. Принята следующая запись:

$$\overrightarrow{AB}\ (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

В этом случае также считают, что вектор $\overrightarrow{AB}$ представлен в виде

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k}.$$

Это представление означает, что вектор $\overrightarrow{AB}$ разложен по базисным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Если началом вектора является начало координат $O(0, 0, 0)$, а концом вектора является точка $A(a_1, a_2, a_3)$, то такой вектор называется *радиус-вектором* точки A (рис. 2.136), и его координаты совпадают с координатами точки A: $\overrightarrow{OA}(a_1, a_2, a_3)$.

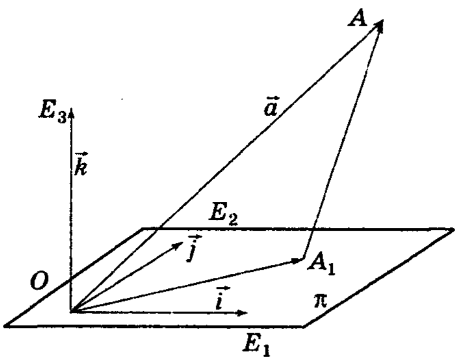


Рис. 2.136

Если конец вектора совпадает с его началом, то вектор называется *нулевым*: $\vec{0}(0, 0, 0)$. Другими словами, точка O является нулевым вектором.

Сложение векторов

Рассмотрим два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ от точки A — получим направленный отрезок $\overline{AB}$; отложим вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ от конца направленного отрезка $\overline{AB}$ — получим направленный отрезок $\overline{BC}$ (рис. 2.137). Соединим точки A и B в указанном порядке. Получим направленный отре-

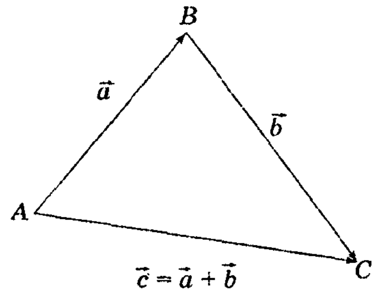


Рис. 2.137

резок $\overline{AC}$. Вектор $\vec{c}$, определенный направленным отрезком $\overline{AC}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Построение суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ возможно по одному из двух правил: треугольника или параллелограмма.

Свойства сложения векторов:

1) для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (свойство коммутативности);

2) для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливо равенство: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (свойство ассоциативности);

3) для любого вектора $\vec{a}$ справедливо соотношение: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) для любого вектора $\vec{a}$ его сумма с противоположным вектором $(-\vec{a})$ равна нулевому вектору:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Под *разностью* двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условию: $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы

Произведением ненулевого действительного числа λ и ненулевого вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$, где $|\lambda|$ — абсолютная величина λ;

2) если $\lambda > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены; если $\lambda < 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.

Если $\lambda = 0$, или $\vec{a} = \vec{0}$, произведение $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Свойства умножения вектора на число:

Для любых действительных чисел α и β и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняются следующие равенства:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = (-\vec{a})$;

2) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;

3) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

4) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Линейные операции над векторами в координатах

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеют координаты: $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3). Тогда вектор $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеет координаты:

$$\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}(\alpha a_1 \pm \beta b_1, \alpha a_2 \pm \beta b_2, \alpha a_3 \pm \beta b_3).$$

Два вектора называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они оба параллельны.

Коллинеарные векторы обозначаются так: $\vec{a} \| \vec{b}$.

Критерий коллинеарности векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $(\vec{a} \neq \vec{0})$ являются коллинеарными в том и только в том случае, когда существует такое единственное действительное число λ, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Критерий коллинеарности векторов в координатной форме

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны в том и только том случае, когда их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \lambda a_1, \\ b_2 = \lambda a_2, \\ b_3 = \lambda a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}.$$

Компланарные векторы

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Критерий компланарности векторов

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ являются компланарными в том и только в том случае, когда существует такая единственная пара действительных чисел α, β, что $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Критерий компланарности векторов в координатной форме

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеют координаты: $\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\ (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}\ (c_1, c_2, c_3)$.

Ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны в том и только в том случае, когда их соответствующие координаты удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1, \\ c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2, \\ c_3 = \alpha a_3 + \beta b_3. \end{cases}$$

Скалярное произведение двух векторов. Длина вектора. Угол между двумя векторами

Скалярным произведением векторов $\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\ (b_1, b_2, b_3)$ называется число $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними. Обозначим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через φ. Тогда имеем: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ (рис. 2.138).

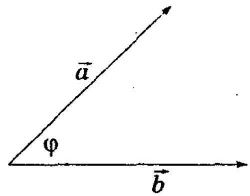


Рис. 2.138

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется число

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3.$$

Длина вектора $\vec{a}$ может быть вычислена по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Косинус угла φ между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Критерий перпендикулярности двух векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Проекция вектора на ось

Пусть m — ось, а $\vec{b}$ — ее орт. Тогда проекцией $pr_m\vec{a}$ любого ненулевого вектора $\vec{a}$ на ось m называется число $pr_m\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi = \angle\vec{a}\vec{b}$ (рис. 2.139).

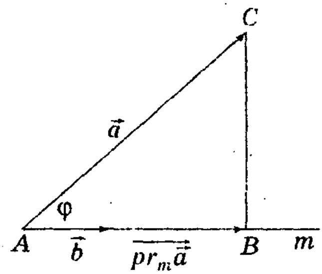


Рис. 2.139

Тогда $pr_m\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = |\vec{a}|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} =$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

В частности, проекции вектора $\vec{a}$ на координатные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно имеют вид:

$$pr_{\vec{i}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{i}|} = \vec{a}\cdot\vec{i} = a_1;$$

$$pr_{\vec{j}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{j}|} = \vec{a}\cdot\vec{j} = a_2;$$

$$pr_{\vec{k}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{k}|} = \vec{a}\cdot\vec{k} = a_3.$$

Некоторые формулы, определяющие взаимное расположение прямых и плоскостей, записанные в координатах

В декартовой системе координат на плоскости

Расстояние от точки $(x_0;\ y_0)$ ***до прямой*** $ax + by + c = 0$ вычисляется по формуле:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Взаимное расположение прямых, заданных общими уравнениями

$$\boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1 = 0} \text{ и } \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2 = 0}$$

1) условие параллельности прямых:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

2) условие перпендикулярности прямых:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

3) угол α между прямыми может быть найден по формулам:

$$\sin\alpha = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{b_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}\ (a,\ b,\ c)$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$

Пусть плоскости заданы уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

1) Вычисление угла φ между плоскостями:

$$\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

2) Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

3) Расстояние от точки M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *до плоскости* $ax + by + cz + d = 0$ может быть вычислено по формуле:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Уравнение прямой в пространстве

1) Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}$ $(l,\ m,\ n)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n};$$

2) уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

3) угол между прямыми, заданными уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2};$$

$$\cos\varphi = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}};$$

4) условие перпендикулярности двух прямых в пространстве:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

5) угол между прямой $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $ax + by + cz + d = 0$

$$\sin\varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Приложение

Формулы сокращенного умножения

- Квадрат суммы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Квадрат разности

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Куб суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Куб разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

- Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

- Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Свойства степени

$$a^0 = 1 \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Свойства квадратного (арифметического) корня

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0$

$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}, \ b \neq 0$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt{a^m} = (\sqrt{|a|})^m$

Уравнения

- Решение уравнения первой степени $ax = b$

$$x = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

- Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  - приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

- квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом $ax^2 + 2kx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

- Теорема Виета

- для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

- для приведенного кубического уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q$$
$$x_1x_2x_3 = -r$$

- Разложение на множители квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

- Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

- Решение биквадратного уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$

$$x_{1,2} = \pm\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- **Формула действительного корня неполного кубического уравнения $y^3 + py + q = 0$**

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Неравенства

- **Свойства неравенств**
  - **Если $a > b$, то $b < a$.**
  - **Если $a > b$, то $a + c > b + c$.**
  - **Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.**
  - **Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.**
  - **Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$.**
  - **Если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.**
- **Абсолютная величина числа (модуль)**
  - **Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$.**
  - **Если $a < 0$, то $|a| = -a$.**
- **Некоторые важные неравенства**

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

$$a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$$

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \ (a > 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \ (ab > 0)$$

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \ (a > 0,\ b > 0)$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ (\text{неравенство Коши})$$

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leqslant \sqrt{ab} \ (a > 0,\ b > 0)$$

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$$

- Решение неравенства первой степени $ax > b$
  - Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$.
  - Если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$.
- Решение системы неравенств первой степени

$$\begin{cases} x > a; \\ x > b. \end{cases}$$

  - Если $a > b$, то $x > a$.
  - Если $a < b$, то $x > b$.
- Решение системы неравенств первой степени

$$\begin{cases} x < a; \\ x < b. \end{cases}$$

  - Если $a > b$, то $x < b$.
  - Если $a < b$, то $x < a$.
- Решение системы неравенств первой степени

$$\begin{cases} x > a; \\ x < b. \end{cases}$$

  - Если $a > b$, то система не имеет решения.
  - Если $a < b$, то $a < x < b$.
- Решение системы неравенств первой степени

$$\begin{cases} x < a; \\ x > b. \end{cases}$$

  - Если $a > b$, то $b < x < a$.
  - Если $a < b$, то система не имеет решения.
- Решение неравенства второй степени $ax^2 + bx + c > 0$.
  - Если $a > 0$, то $x < x_1$ и $x > x_2$.
  - Если $a < 0$, то $x_1 < x < x_2$.

Здесь x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — действительные корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Если действительных корней нет, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для всех x при $a > 0$; и не имеет решений при $a < 0$.

Логарифмы

- **Определение логарифма.** Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

- Свойства логарифма

$$b^{\log_b a} = a \qquad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a a^m = m$$

- Логарифм произведения

$$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$$

- Логарифм частного

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

- Логарифм степени

$$\log_c a^k = k\log_c a$$

- Логарифм корня

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log_c a$$

- Переход к новому основанию

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

- Формулы, следующие из свойств логарифмов

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$$

Сравнение логарифмов

Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ — знак неравенства меняется.

Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ — знак неравенства не меняется.

Если $1 < a < b$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.

Если $0 < a < b < 1$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.

Если $1 < a < b$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.

Если $0 < a < b < 1$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Градусная и радианная мера углов

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана}$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ радиана} \approx 0{,}000291 \text{ радиана}$$

$$1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ радиана} \approx 0{,}000005 \text{ радиана}$$

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$

225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Тригонометрические функции

Синус угла α — ордината точки единичной окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\sin\alpha = y$ (рис. 1).

Косинус угла α — абсцисса точки окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\cos\alpha = x$ (рис. 1).

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

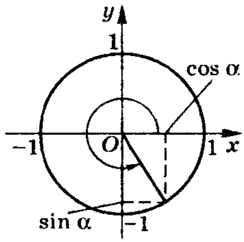


Рис. 1

Знаки значений тригонометрических функций

Четверть	sin α	cos α	tg α	ctg α	sec α	cosec α
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
ctg α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞
sec α	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	−2	−1	∞	1
cosec α	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞	−1	∞

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике

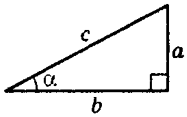


Рис. 2

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$$

Тригонометрические тождества

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ $\qquad$ $|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$

Формулы приведения тригонометрических функций

$$\sin(\pm\alpha + \pi n) = \pm(-1)^n \sin\alpha$$

$$\cos(\pm\alpha + \pi n) = (-1)^n \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pm\alpha + \pi n) = \pm\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pm\alpha + \pi n) = \pm\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin\left(\pm\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n\cos\alpha$$

$$\cos\left(\pm\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \mp(-1)^n\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Тригонометрические функции кратных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^3\alpha - 1}$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha}$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Справочное издание

Александр Григорьевич Мордкович,
Вита Иммануиловна Глизбург,
Наталья Юрьевна Лаврентьева

МАТЕМАТИКА

Полный справочник

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *Г. Н. Хромова*
Художественный редактор *Т. Н. Войткевич*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Корректор *И. Н. Мокина*

Оригинал-макет подготовлен ООО «БЕТА-Фрейм»

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.014255.12.08 от 23.12.2008 г.

ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ»
141100, РФ, Московская обл., г. Щелково, ул. Заречная, д. 96

Наши электронные адреса: www.ast.ru

E-mail: astpub@aha.ru

ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
129085, Москва, Звездный бульвар, д. 21, 7-й этаж
Отдел реализации учебной литературы издательской группы «АСТ»
Справки по тел.: (495)615-53-10, 232-17-04