УДК 373:51(075.3)
ББК 22.1я72
С32

Работа выполнена при поддержке РГНФ
(проект № 08-06-00144а)

Сергеев, И.Н.

С32 ЕГЭ. Математика. Задания типа С / И.Н. Сергеев. — М.: Издательство «Экзамен», 2009. — 318 [2] с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов»)

ISBN 978-5-377-02251-0

Книга посвящена наиболее проблемной составляющей Единого государственного экзамена по математике — заданиям типа С (с развернутым ответом). Освещены абсолютно все вопросы, связанные с подготовкой к таким заданиям. Разобраны демоверсии и образцы всех открытых экзаменационных заданий этого типа всех лет, начиная с первого года введения ЕГЭ. Решения задач и комментарии к ним носят обучающий характер. Приведены общие критерии оценки решений и реальные примеры конкретных критериев.

Книга адресована выпускникам и абитуриентам для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике, а также учителям и репетиторам для проведения занятий с учениками.

УДК 373:51(075.3)
ББК 22.1я72

Подписано в печать с диапозитивов 30.09.2008.
Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 10,07. Усл. печ. л. 20.
Тираж 150 000 (1-й завод — 5 000) экз. Заказ № 2482

ISBN 978-5-377-02251-0

Оглавление

Введение
или
ЧТО ПРОВЕРЯЮТ ЗАДАНИЯ ТИПА С

Настоящая книга со скромным названием *«ЕГЭ по математике. Задания типа С»* посвящена единому государственному экзамену по математике. В книге делается попытка осветить все вопросы подготовки к наиболее трудным заданиям этого экзамена, каковыми являются задания *типа С*, предполагающие развернутый ответ.

Для удобства обсуждения огромной массы самых общих проблем, возникающих в связи с подготовкой к ЕГЭ, дальнейшее изложение проведем в форме ответов на вопросы.

Какова структура варианта ЕГЭ по математике?

Экзамен проводится реально с 2002 года, и его структура со временем меняется, но с 2005 года она более или менее установилась. Современный вариант экзамена по математике состоит из трех частей, соответствующих трем уровням сложности:

- *базовому*,
- *повышенному*,
- *высокому*.

Вариант содержит в общей сложности 26 заданий, каждое из которых относится (не в строгом соответствии с уровнем сложности) к одному из трех типов:

- *A — с выбором ответа* (из числа четырех предложенных),
- *B — с кратким ответом*, имеющим форму десятичной записи числа (его нужно предварительно получить, решив задачу в черновике),
- *C — с развернутым ответом*, представляющим собой не только прямой ответ (здесь уже в произвольной форме) на

поставленный в задаче вопрос, но и прилагающийся к нему текст чистового решения.

Какова процедура проверки работ?

В 10 заданиях типа *A* и 11 заданиях типа *B* форма записи ответа совершенно понятна и абсолютно однозначна. Поэтому их проверку можно поручить бесстрастному компьютеру, что и делается на практике. Каждое верно решенное задание такого типа заслуживает оценки в 1 балл (называемый первичным).

Проверку же 5 заданий типа С осуществляют специально подготовленные экзаменаторы (эксперты). За каждое из первых двух заданий С1 и С2, имеющих повышенный уровень сложности, можно получить оценку от 0 до 2 баллов, а за каждое из остальных трех заданий С3, С4 и С5, высокого уровня сложности, — от 0 до 4 баллов. И в результате оценка конкретного решения конкретной задачи складывается под влиянием следующих составляющих:

- правильности данного в работе *ответа* на поставленный в задаче вопрос,
- текста *решения*, сопровождающего полученный ответ,
- *критериев* оценки выполнения данного задания,
- качества работы двух-трех *экспертов*, проверяющих данное решение.

Единственная однозначно определяемая составляющая из четырех перечисленных — первая, поскольку данный к задаче ответ всегда либо правилен, либо нет (правда, и в этом вопросе бывают разногласия). Все остальные пункты — несколько расплывчаты: они либо недостаточно регламентированы, либо просто субъективны.

Кроме того, от действий выпускника на экзамене зависят только первая и вторая позиция в этом списке. На остальные он повлиять не может, поскольку действующие критерии проверки заданий становятся известны только после экзамена, а уж какой экзаменатор достанется данному школьнику — не знает заранее никто.

Все эти обстоятельства, взятые вместе, как раз и характеризуют сложившуюся ситуацию и объясняют ажиотаж вокруг заданий типа С, вызывающих наибольшее беспокойство и даже некоторую тревогу, как у самих выпускников, так и у их родителей, учителей и наставников.

Что проверяют задания типа С?

1. Задачи С1 и С2 (а до 2005 года, похоже, только *C*1), повышенного уровня сложности, рассчитаны на знание стандартных методов и владение стандартными алгоритмами решения стандартных задач. Кроме того, для их успешного выполнения от выпускника требуются:

- *внимательность* и собранность,
- *аккуратность* и точность.

Они составляются, как правило, так, чтобы при неаккуратном применении метода или неточном выполнении алгоритма решения задачи, а также по рассеянности или неуверенности, ученик получил бы ошибочный ответ, потеряв в итоге один или даже оба балла.

На устранение возможных недостатков подготовки читателя в указанном направлении нацелена первая глава настоящего пособия.

2. Задачи С3 и С5 (в 2002 году С2 и С3, а в 2003–2004 годах С2 и С4 соответственно), высокого уровня сложности, предполагают, что выпускник дополнительно, сверх того, что нужно при решении задач С1 и С2, умеет:

- творчески и нестандартно *мыслить*,
- *рассуждать* и проводить доказательства.

Здесь уже не достаточно одной лишь способности механически воспроизводить известные схемы решения. Нужно проявить смекалку и сообразительность, придумать и применить новую идею, смоделировать задачу, сведя ее к известной или к более простой. Причем все свои действия и выводы необходимо обосновать или аргументировать, оформив получившееся решение в виде математически правильного, логически ясного и полного текста.

Развитие этих способностей читателя и призвана обеспечить вторая глава настоящей книги.

3. Задача С4 (в 2003–2004 годах задача С3), также высокого уровня сложности, в отличие от остальных — стереометрическая, а значит, в дополнение ко всем предыдущим качествам экзаменуемого, подразумевает наличие у него:

- *пространственного воображения.*

Отметим также, что при решении геометрических задач в целом особо важную роль играет умение обосновывать взаимное расположение и свойства данных в условии фигур и их элементов. Зачастую это бывает необходимым для исследования описанной в задаче конфигурации, для возможности сделать нужный вывод или произвести нужные выкладки.

Целенаправленную подготовку читателя по этому вопросу и осуществляет третья глава представленного пособия.

Как подготовиться к заданиям типа С?

При подготовке к этим заданиям нужно учесть следующие моменты.

- Во-первых, единый государственный экзамен по математике опирается, конечно же, на *школьную программу*. Она хорошо известна и пока что худо-бедно изучается в школе, а кроме того, подкреплена неимоверным количеством самых разнообразных учебников. Поэтому уверенное знание программы по математике и хорошее владение ею — необходимое условие успешной сдачи ЕГЭ. А для лучшего ее усвоения может оказаться полезным грамотный учебник и, до определенной степени, опытный учитель.

- Во-вторых, для того чтобы подготовиться к какому-либо экзамену, вообще, нужно, прежде всего, изучить *историю вопроса*: какие задачи давались на экзамене в прошлые годы, какими методами предполагалось их решать, какими были требования к их оформлению и т.п. Все эти аспекты полностью, хотя и в разной степени подробности, освещены в настоящем пособии.

- В-третьих, нужно иметь некоторый *запас прочности*, т.е. знать и уметь несколько больше того минимума, который вытекает из опыта предыдущих экзаменов. Ведь не секрет, что варианты экзаменационных заданий постепенно развиваются и усложняются: то, что раньше казалось новым и трудным для восприятия, со временем становится привычным и элементарным. В общем, нельзя ориентироваться только на вчерашний день. И с этой точки зрения, наша книга способна значительно расширить возможности читателя.

Как получить за решение максимальный балл?

- На экзамене можно с уверенностью и небезосновательно рассчитывать на максимальный балл за решение задачи, если только выполнить следующие условия.

- Прежде всего, совершенно необходимо *собственно решить задачу*, для начала хотя бы в черновике. Причем решить ее нужно правильно, т.е. получить верный ответ, верным методом и с помощью верных рассуждений. Для этого необходим достаточный арсенал подходов к решению различных задач, который вполне можно почерпнуть из нашего пособия, где обсуждается также и эвристическая сторона решения.

- Далее, требуется *записать решение в чистовик*. Существует масса разнообразных способов записи решений: кратких или многословных, рациональных или бестолковых, гибких или неповоротливых. И в этом отношении полезно определиться до экзамена. Разумеется, в настоящем пособии уже выбран оптимальный, по мнению автора, способ оформления текстов, преимущество которого продемонстрировано на многочисленных примерах.

- Наконец, желательно заранее знать, *за что снижается оценка* на данном экзамене. Довольно трудно, порой почти невозможно написать математически содержательный текст без каких-либо недостатков вообще. А вот, какие из них существенны и влекут за собой снижение оценки — вопрос весьма не простой. Некоторое представление о требованиях к решениям могут дать приведенные в нашей книге образцы критериев оценки выполнения заданий ЕГЭ по математике.

Желаем успехов Вам или Вашим ученикам на предстоящем Едином государственном экзамене по математике!

Доктор физико-математических наук
профессор И.Н. Сергеев

Глава 1

ВНИМАТЕЛЬНОСТЬ И АККУРАТНОСТЬ

1.1. Задание С1, 2002 г.

1. **Демоверсия.** Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции

$$f(x)=16\log_{\frac{1}{16}}\frac{\sin x+\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Найдем явно область значений данной функции, и тогда станет понятно, сколько в ней целых чисел.

Решение.

1. $f(x)=16\log_{\frac{1}{16}}\frac{\sin x+\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$
$=\frac{16}{-4}\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+3\right)=$
$=-4\log_2\left(\sin\left(x+\varphi\right)+3\right)$, где $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

2. $E\left(\sin\left(x+\varphi\right)\right)=[-1;1]$
$\Rightarrow E\left(\sin\left(x+\varphi\right)+3\right)=[2;4]$
$\Rightarrow E\left(\log_2\left(\sin\left(x+\varphi\right)+3\right)\right)=[1;\ 2]$
$\Rightarrow E(f)=E\left(-4\log_2\left(\sin\left(x+\varphi\right)+3\right)\right)$
$=[-8;-4]$.

3. Количество целых чисел в $[-8;-4]$:
$8-3=5$.

Ответ: 5.

Комментарий

А. Для нахождения области значений данной функции мы использовали ***метод вспомогательного угла***, благодаря которому выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

было свернуто по формуле синуса суммы

$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\sin(x+\varphi),$$

где $\varphi=\frac{\pi}{4}$ — и есть вспомогательный угол.

Б. В данном случае подсчитать количество целых чисел, содержащихся во множестве $[-8;-4]$, можно было и напрямую, натурально предъявив все эти пять чисел

$$-8,-7,-6,-5,-4.$$

Однако если бы их количество было велико, то для подсчета поневоле пришлось бы прибегнуть к какому-нибудь более хитрому способу, подобному тому, что применили мы в решении задачи.

2. Решите уравнение $7\operatorname{tg}x+\cos^2x+3\sin 2x=1$.

На первый взгляд, совершенно непонятно, как решать такое уравнение — слишком много в нем самых разных тригонометрических функций. А значит, прежде всего, нужно попытаться уменьшить их количество. Для этого распишем тангенс через синус и косинус. То же проделаем с синусом двойного угла, а за одно и с единицей (через основное тригонометрическое тождество).

Р е ш е н и е .

$7\operatorname{tg}x+\cos^2x+3\sin 2x=1$

$\Leftrightarrow 7\cdot\frac{\sin x}{\cos x}+3\cdot 2\sin x\cos x=1-\cos^2 x\ \ (=\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\left(7+6\cos^2 x-\sin x\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=0$, т.к. $7+6\cos^2x\geqslant 7>1\geqslant\sin x\cos x$,

$\Leftrightarrow x=\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

О т в е т : $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Комментарий

А. Мы вполне могли бы сразу и не заметить, что второй сомножитель

$$7+6\cos^2x-\sin x\cos x$$

в полученном выше уравнении всегда положителен (и, стало быть, не добавляет никаких корней). И если так, то нам пришлось бы решать уравнение

$$7+6\cos^2x-\sin x\cos x=0,$$

сводящееся с помощью основного тригонометрического тождества к ***однородному уравнению второй степени*** (относительно синуса и косинуса):

$7\sin^2x+7\cos^2x+6\cos^2x-\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 7\sin^2x-\sin x\cos x+13\cos^2x=0$ ($\Rightarrow \cos x\neq 0$, иначе $\sin x=0=\cos x$, что невозможно, т.к. $\sin^2x+\cos^2x=1$)

$\Leftrightarrow 7t^2-t+13=0$, где $t=\operatorname{tg}x$,

$\Leftrightarrow t\in\varnothing$, т.к. $D=1^2-4\cdot 7\cdot 13<0$.

Б. Идеальным способом оформления решения (или его фрагмента) следует признать его запись в виде:

- цепочки равенств, неравенств или каких-либо соотношений вообще,
- логической цепочки — равносильностей, следствий и т.п.

В написанных выше решениях мы уже видели образцы таких цепочек. Все они замечательны тем, что, сравнив начало и конец каждой цепочки, можно увидеть тот окончательный вывод, который она в результате обосновывает.

Приведем примеры:

- ***цепочка равенств***, начинающаяся выражением $f(x)$ и кончающаяся выражением

$$-4\log_2\left(\sin\left(x+\varphi\right)+3\right),$$

обосновывает равенство этих выражений

$$f(x)=-4\log_2\left(\sin\left(x+\varphi\right)+3\right),$$

- *цепочка неравенств*

$$7+6\cos^2 x\geqslant 7>1\geqslant \sin x\cos x$$

служит доказательством строгого неравенства

$$7+6\cos^2 x>\sin x\cos x$$

(т.к. все неравенства цепочки — одного смысла и хотя бы одно из них — строгое),

- ***цепочка равносильностей***, начинающаяся уравнением

$$7\operatorname{tg} x+\cos^2 x+3\sin 2x=1$$

и кончающаяся уравнением

$$x=\pi n$$

(точнее, совокупностью уравнений, задаваемой параметром $n\in\mathbb{Z}$), утверждает, что поставленный в задаче вопрос можно обратить не к первому, а к последнему звену цепочки, которое как раз и представляет собой ответ,

- ***цепочка следствий***, начинающаяся утверждением

$$E\left(\sin\left(x+\varphi\right)\right)=\left[-1;1\right]$$

и кончающаяся утверждением

$$E(f)=\left[-8;-4\right],$$

обосновывает последнее, поскольку первое — верно.

В. Особенностью нашего оформления цепочек является возможность свободно, не разрывая саму цепочку, вклиниваться в нее с различными ***пояснениями*** очередных переходов: обозначениями, уточнениями, замечаниями, равенствами, неравенствами, следствиями, равносильностями и т.п. Например:

- введя обозначение для вспомогательного угла φ, мы в цепочке незамедлительно добавили пояснение:
  где $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$,
- заведя параметр n, мы тут же приписали:
  где $n\in\mathbb{Z}$,
- заведя в уравнении новую букву t, мы сразу же пояснили обозначение:
  где $t=\operatorname{tg}x$,
- чтобы не переписывать целиком все уравнение
  $7\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}+3\cdot 2\sin x\cos x=1-\cos^2 x$

из-за незначительного преобразования его правой части, мы продолжили ее в скобках равенством $\left(=\sin^2 x\right)$,

- откинув в левой части уравнения
  $\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\left(7+6\cos^2 x-\sin x\cos x\right)=0$

второй сомножитель, мы объяснили, почему он всегда положителен,

- прежде чем поделить уравнение
  $7\sin^2 x-\sin x\cos x+13\cos^2 x=0$

на выражение $\cos^2 x$, мы пояснили, что в силу самого уравнения это выражение не может оказаться равным нулю.

Все эти замечательные примеры показывают, что если относиться к пояснениям *творчески*, то они способны не только сильно облегчить формальную сторону решения, но и упростить существо самого решения: его логику и арифметику.

Комментарий

Отбрасывание оснований степени в уравнениях или неравенствах происходит по правилу:

$$\text{если } a>1\text{, то } a^f \vee a^g \Leftrightarrow f \vee g\,,$$

$$\text{а если } 0<a<1\text{, то } a^f \vee a^g \Leftrightarrow f \wedge g\,,$$

где под знаком $\vee$ понимается любой (везде один и тот же) из знаков $=$, $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ или даже $\neq$, а под знаком $\wedge$ — соответствующий *обратный* знак $=$, $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ или $\neq$.

Само это правило, в сущности, представляет собой самую обыкновенную переформулировку свойства *возрастания* или *убывания* показательной функции

$$y(x)=a^x$$

в зависимости от основания a. Действительно, к примеру, первая часть правила означает, что степени с одинаковым основанием, большим 1, связаны в точности тем же знаком $\vee$, каким и их показатели: скажем, если

$$f>g\text{, то } a^f>a^g,$$

и наоборот.

6. Решите уравнение $2^{5x-1}\cdot 3^{4x+1}\cdot 7^{3x+3}=504^{x-2}$.

7. Решите уравнение $3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^{3x}=540^{8-x}$.

8. Решите уравнение $\sqrt{9-4x|x-4|}-4x=3$.

Решение.

$$\sqrt{9-4x|x-4|}-4x=3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-4x|x-4|}=4x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3\geqslant 0 \\ 9-4x|x-4|=(4x+3)^2. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x-4\geqslant 0 \quad (\Rightarrow 4x+3\geqslant 0) \\ 9-4x(x-4)=16x^2+24x+9 \quad (\Leftrightarrow 20x^2+8x=0) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 4 \\ x(x+0{,}4)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\varnothing,$$

2) $\begin{cases} x-4\leqslant 0 \\ x\geqslant -3/4 \\ 9+4x(x-4)=16x^2+24x+9 \quad (\Leftrightarrow 12x^2+40x=0) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3/4\leqslant x\leqslant 4 \\ x(x+10/3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: $x=0$.

Комментарий

А. В приведенном решении был произведен ***перебор случаев***, определяемых тем, какой знак имеет выражение под модулем, т.е. какое из неравенств имеет место:

$$x-4\geqslant 0 \text{ или } x-4<0.$$

Заметим, кстати, что при рассмотрении соответствующего случая каждое из этих неравенств:

- либо вписывается непосредственно *в систему* вместе со всеми остальными ее условиями (именно так мы и поступили, и это наиболее надежный способ записи),
- либо записывается только *в начале случая*, наподобие его заголовка — тогда после двоеточия рассматривается сам случай, а в конце это неравенство снова вспоминается и учитывается (к сожалению, в реальности не всеми и не всегда) при отборе решений.

Например, рассмотрение первого случая из только что приведенного решения по второму типу оформления могло выглядеть так:

1) $x \geqslant 4$:

$$\begin{cases} 4x+3 \geqslant 0 \\ 9-4x(x-4)=16x^2+24x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3/4 \\ 20x^2+8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3/4 \\ x(x+0{,}4)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=0,\ -0{,}4$ — не удовлетворяют условию $x \geqslant 4$,
поэтому решений нет.

Получившийся текст решения, по сравнению с приведенным ранее, логически менее совершенен:

- в заключительной его части нам пришлось отвлечься и, вспомнив о начальном неравенстве, совершить некую дополнительную операцию (проверку), выходящую за рамки решаемой системы
- ограничение $x \geqslant 4$, будучи сразу вписанным в систему, имело бы гораздо больший эффект, т.к. избавило бы ее от более слабого ограничения

$$4x+3 \geqslant 0.$$

Б. Иногда лучше не торопиться разбирать случаи, а попытаться сократить их число с помощью каких-либо наблюдений.

Так, в нашем примере можно продвинуться в решении системы чуточку дальше, не рассматривая пока случаев:

$$\begin{cases} 4x+3 \geqslant 0 \\ 9-4x|x-4|=16x^2+24x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3 \geqslant 0 \\ x\cdot(4|x-4|+16x+24)=0\ (\Rightarrow x \leqslant 0). \end{cases}$$

Поясним, что последнее неравенство в скобках вытекает из уравнения, т.к. иначе в нем первый сомножитель положителен сразу, а второй — еще и потому, что модуль всегда неотрицателен.

Наградой за терпение становится откидывание одного из двух случаев раскрытия модуля прямо с порога: теперь можно смело *вписать в систему* выведенное из нее неравенство

$$x \leqslant 0$$

и раскрыть модуль однозначно, с минусом, благодаря чему решение выстраивается в одну цепочку.

В. При ***возведении в квадрат*** уравнения или неравенства нужно, прежде всего, понимать, что эта операция заведомо правомерна при условии, что и левая, и правая его части принимают неотрицательные значения. Это объясняется *возрастанием* функции

$$y(x)=x^2,\ x \geqslant 0,$$

благодаря которому справедливо правило:

$$\text{если } f,g \geqslant 0,$$

$$\text{то } f \vee g \Leftrightarrow f^2 \vee g^2,$$

где, как и раньше, $\vee$ — есть любой из знаков (равенства или неравенства).

Если же хотя бы одна из частей отрицательна, то возведение в квадрат может привести к нелепостям или ошибкам, которые моделируются следующими верными высказываниями, отрицающими возможность некоторых переходов:

- $1=-1 \not\Leftarrow 1^2=(-1)^2$,
- $-2>1 \not\Leftarrow (-2)^2>1^2$.
- $-2>-1 \not\Leftarrow (-2)^2>(-1)^2$,
- $1>-2 \not\Rightarrow 1^2>(-2)^2$,
- $-1>-2 \not\Rightarrow (-1)^2>(-2)^2$.

Реальный механизм возведения в квадрат предполагает разбор двух случаев:

- *когда возводить в квадрат можно*, т.е. когда обе части уравнения (неравенства) неотрицательны, — в приведенном примере это случай, когда выполнено неравенство

$$4x+3\geqslant 0\,,$$

- *когда возводить в квадрат нельзя или опасно*, т.е. когда хотя бы одна из частей отрицательна, — в приведенном примере этот случай опущен, поскольку неравенство, наложенное в предыдущем случае, является следствием исходного уравнения.

Г. Теперь поговорим об одной операции над уравнением или неравенством, которая обычно приводит к неоправданному усложнению его решения, — об операции выписывания ***области допустимых значений*** (ОДЗ) неизвестной величины.

Многие школьники и их наставники всерьез считают, что перед тем, как решать уравнение или неравенство, необходимо выписать ОДЗ, а еще лучше — решить все выписанные условия до конца, указав эту область явно. Мотивируют они свои действия тем, что некоторые преобразования уравнений и неравенств приводят к расширению ОДЗ, а значит, если, на всякий случай, не найти ее заранее, то можно не заметить ее расширения и получить, так сказать, посторонние решения.

Вопреки этому, весьма живучему, мнению, такое выписывание ОДЗ:

- как правило, мало что упрощает по существу, т.к. не снимает остальных логических ограничений на рассуждения при решении задачи,
- нередко требует от школьника выполнения совершенно ненужных действий, поскольку часто выписываемые условия выполнены автоматически (или полностью, или частично), а значит, и выписывание, и учет этих условий в конце решения представляют собой по-настоящему лишнюю работу,

- приводит к необходимости решать неравенства, порой намного более трудные, чем само решаемое уравнение или неравенство,
- представляет собой обособленный этап в решении уравнения или неравенства, приводящий к логическому разрыву между различными условиями и, тем самым, затрудняющий оформление решения в виде цепочки равносильностей.

Чтобы далеко не ходить за примерами, зададим приверженцам теории выписывания области допустимых значений, например, следующую пару риторических вопросов, касающихся разобранных выше задач (заметьте, никто задач специально не подбирал!):

- имеет ли смысл искать ОДЗ к уравнению, содержащему выражение $\operatorname{tg} x$, если это уравнение в итоге приводится к виду

$$\operatorname{tg} x=0\ ?$$

- разве есть необходимость искать ОДЗ к уравнению, содержащему под корнем выражение

$$9-4x|x-4|\,,$$

- если это уравнение после возведения в квадрат приобретает вид

$$9-4x|x-4|=(4x+3)^2\ ?$$

Д. Итак, вывод один: вместо того, чтобы искать явно ОДЗ, гораздо более важно

- *следить за его расширением*, постепенно вписывая в систему с остальными условиями задачи те ограничения, которые перестают действовать в процессе производимых преобразований,
- *не допускать его сужения*, в результате которого могут потеряться решения, а тогда их уже не восстановить.

Эти два положения и составляют отличительную черту ***метода равносильных преобразований***, который предполагает оформление решения в виде цепочки равносильностей, учитывающей все нюансы вообще, в том числе и связанные с изменением ОДЗ.

9. Решите уравнение $\sqrt{49+9x|x+4|}-2x=7$.

10. Решите уравнение $2+\sqrt{25x|x-1|+4}=5x$.

1.2. Задание С1, 2003 г.

1. Демоверсия. Решите уравнение

$$2\log_{12}\left(x+\frac{6}{x-5}\right)=\log_{12}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right)+3.$$

Если привести к общему знаменателю каждое из двух выражений, стоящих под логарифмами, то можно заметить, что они очень похожи. Лучше сказать, одно из них получается из второго перевертыванием дроби. А это означает, что сами логарифмы в уравнении представляют собой просто *подобные члены*.

Р е ш е н и е.

$$2\log_{12}\left(x+\frac{6}{x-5}\right)=\log_{12}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right)+3$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{12}\frac{x(x-5)+6}{x-5}=\log_{12}\frac{3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)}+3$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{12}\frac{(x-2)(x-3)}{x-5}=\log_{12}\left(\frac{(x-2)(x-3)}{x-5}\right)^{-1}+3$$

$$\Leftrightarrow (2+1)\log_{12}\frac{(x-2)(x-3)}{x-5}=3$$

$$\Leftrightarrow \log_{12}\frac{(x-2)(x-3)}{x-5}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x-5}=12\ (>0)$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=12(x-5)\ (\Rightarrow x\neq 5\text{, иначе } 6=0)$$

$$\Leftrightarrow x^2-17x+66=0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x-11)=0$$

$$\Leftrightarrow x=6,\ 11.$$

О т в е т: $x=6,\ 11$.

Комментарий

А. ***Отбрасывание логарифмов*** в уравнениях или неравенствах происходит по правилу:

$$\text{если } a>1\text{, то } \log_a f\vee\log_a g\Leftrightarrow\begin{cases}f\vee g\\ f,g>0,\end{cases}$$

$$\text{а если } 0<a<1\text{, то } \log_a f\vee\log_a g\Leftrightarrow\begin{cases}f\wedge g\\ f,g>0,\end{cases}$$

где $\vee$ — любой из знаков (равенства или неравенства), а $\wedge$ — соответствующий обратный знак.

Само это правило, в сущности, представляет собой самую обыкновенную переформулировку свойства *возрастания* или *убывания* логарифмической функции

$$y(x)=\log_a x$$

в зависимости от основания a, а добавленные в систему неравенства

$$f,g>0$$

- во-первых, отражают факт *изменения ОДЗ* после отбрасывания логарифмов,
- во-вторых, несколько *избыточны*, т.к. одно из них, при наличии конкретной связи между f и g, заведомо

мое выражение, которое ею обозначено. Поэтому последующее возвращение к исходной переменной не требует никаких дополнительных пояснений вообще.

Б. Заметим, что далеко не всякая замена переменной действительно сокращает текст решения, поэтому прежде, чем вводить новую букву, стоит подумать, а нельзя ли обойтись старой.

Этот вопрос особенно актуален в свете того, что, по школьным правилам, замену положено делать в четыре этапа:

- ввести новое обозначение,
- переписать по-новому решаемую задачу,
- решить задачу,
- вернуться к исходным обозначениям.

Попробуйте угадать, какой *один* из перечисленных этапов по-настоящему необходим. Тогда станет понятно, что остальным действиям отводится лишь вспомогательная роль, и значит, их без необходимости не следует выпячивать в тексте решения.

3. Решите уравнение $3\log_6\left(3-\dfrac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)+3$.

4. Решите уравнение $2\log_2\left(1-\dfrac{13}{2x+7}\right)=3\log_2\left(2+\dfrac{13}{x-3}\right)+2$.

5. Решите уравнение $\sqrt{13+\dfrac{4}{\log_x 3}}=2\log_3\left(3\sqrt{x}\right)$.

В этом уравнении довольно быстро угадывается новая переменная

$$l=\log_3 x.$$

Решение.

$$\sqrt{13+\frac{4}{\log_x 3}}=2\log_3\left(3\sqrt{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13+4\frac{1}{1/l}}=2\left(1+\frac{1}{2}l\right), \text{ где } l=\log_3 x,$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13+4l}=2+l \ (\Rightarrow l\neq 0, \text{ иначе } \sqrt{13}=2)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{13+4l}=(13+4l)-5$$

$$\Leftrightarrow 4y=y^2-5, \text{ где } y=\sqrt{13+4l}\geqslant 0,$$

$$\Leftrightarrow y^2-4y-5=0 \ \Leftrightarrow (y-5)(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13+4l}=5 \ \Leftrightarrow 13+4l=25$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x=3 \ \Leftrightarrow x=27.$$

Ответ: $x=27$.

Комментарий

А. В приведенном решении мы дважды делали ***замену переменной***:

- первый раз — просто для сокращения записи,
- второй раз — чтобы как можно дольше *не возводить* уравнение в квадрат (вместо этого, мы приняли мешающийся корень за новую переменную и получили относительно нее квадратное уравнение).

Заметим, что некоторая информация о выражении в результате его переобозначений может быть потеряна, поэтому бывает полезно сразу зафиксировать ее, уже при введении новой переменной. Так, в последнем примере информация о неотрицательности значения новой переменной

$$y=\sqrt{13+4l}\geqslant 0$$

была отмечена прямо на этапе ее обозначения и использована впоследствии при отборе ее значений.

Б. Важнейшим преобразованием квадратного трехчлена следует признать его разложение на линейные множители, которое может производиться различными способами.

- *Первый*: по формуле корней квадратного трехчлена, через его дискриминант. Этот способ наиболее стандартен, но весьма трудоемок и крайне ненадежен в плане арифметики. Если и применять его на практике, то уж лучше научиться при этом обходиться одними пояснениями, не разрывая цепочки преобразований.

- *Второй*: с помощью формулы

$$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta),$$

внешне напоминающей теорему Виета, но только не для корней, а, так сказать, для *минус-корней*, каковыми и являются числа α и β. Они довольно часто легко угадываются в уме. Например, для разложения на множители *приведенного* квадратного трехчлена

$$y^2-4y-5$$

мы, выше, в уме представили число -5 в виде произведения чисел, сумма которых равна -4, т.е. чисел -5 и 1, которые и были вписаны в разложение

$$(y-5)(y+1).$$

В отличие от натуральной теоремы Виета, здесь не потребовалось ни в одном месте, ни письменно, ни устно менять какие-либо знаки на противоположные. Если, слегка потренировавшись, наловчиться в этом деле, то разложение таким способом будет занимать считанные секунды.

Уже полученное ***разложение квадратного трехчлена на множители*** совершенно не нуждается ни в каких пояснениях, поскольку оно, как правило, проверяется обыкновенным раскрытием скобок.

6. Решите уравнение $\sqrt{105-\dfrac{8}{\log_x 2}}=3\log_2\left(0{,}5x\sqrt[3]{x}\right)$.

7. Решите уравнение $\sqrt{7-\dfrac{1}{\log_x 4}}=2\log_4\left(0{,}5\sqrt{x}\right)$.

8. Решите уравнение $\sqrt{25-\dfrac{11}{\log_x 10}}=10\cdot\lg\left(10^{\frac{2}{5}}(0{,}1x)^{-0{,}1}\right)$.

9. Решите уравнение $\sqrt{1-\dfrac{16}{\log_x 5}}=8\log_5\left(5^{-0{,}125}\left(\dfrac{5}{x}\right)^{0{,}25}\right)$.

10. Решите уравнение $\log_{81}(15-7x)\cdot\log_{3-x}9=1$.

Наиболее существенное упрощение данного уравнения дает *переход к новому основанию* — лучше всего к основанию 3.

Р е ш е н и е.

$$\log_{81}(15-7x)\cdot\log_{3-x}9=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_3(15-7x)}{\log_3 81}\cdot\frac{\log_3 9}{\log_3(3-x)}=1$$

$$\Leftrightarrow\log_3(15-7x)=2\log_3(3-x)\neq0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(15-7x)=\log_3(3-x)^2\\1\neq3-x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}15-7x=(3-x)^2\ \ (\Leftrightarrow15-7x=x^2-6x+9\Leftrightarrow x^2+x-6=0)\\1\neq3-x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)(x-2)=0\\2\neq x<3\end{cases}\Leftrightarrow x=-3.$$

О т в е т: $x=-3$.

Комментарий

А. Удобной для восприятия формой записи системы из двух неравенств служит так называемое ***двойное неравенство***. Однако, не только для пары неравенств, но и для пары условий типа равенства или даже равенства с неравенством, наложенных одновременно на некоторое выражение с двух сторон, можно использовать аналогичную двойную запись.

Так, в тексте последнего решения встречались следующие двойные условия

$$\log_3(15-7x)=2\log_3(3-x)\neq 0,$$
$$1\neq 3-x>0,\ 2\neq x<3,$$

способствовавшие компактности записей и большей их наглядности.

Б. В связи с приведенным решением имеет смысл явно и последовательно прокомментировать то, как именно в нем отслеживалось изменение ***области допустимых значений*** в процессе преобразований:

- во-первых, переход к новому основанию 3 — это *абсолютное тождество*, не меняющее ОДЗ (хотя при этом переходе и появляется логарифм в знаменателе, но условие его неравенства нулю логически в точности совпадает с условием неравенства единице старого основания логарифма),
- во-вторых, после умножения на знаменатель, мы немедленно добавили в виде двойного условия требование о том, чтобы он не равнялся нулю,
- в-третьих, занеся под логарифм коэффициент 2 в виде показателя степени, мы *расширили* ОДЗ, но тут же добавили пропавшее ограничение

$$3-x>0$$

(т.е. требование положительности выражения $3-x$, прежде стоявшего под логарифмом в чистом виде, а теперь — в квадрате),

- в-четвертых, отбросив логарифмы, мы не добавили никаких условий, поскольку одно из двух равных выражений, оставшихся без логарифмов, и так положительно,
- наконец, неравенство

$$15-7x>0,$$

необходимое для ОДЗ в случае явного выписывания последнего, у нас даже не возникло, т.к. оно оказалось выполненным автоматически.

Да, экономия, конечно, получилась грошовая — всего на одном неравенстве, но ведь дело в принципе, точнее, в надежности и в возможности экономии в будущем.

11. Решите уравнение $\log_9(37-12x)\cdot\log_{7-2x}3=1$.

12. Решите уравнение $\log_{25}(34-33x)\cdot\log_{4-3x}5=1$.

13. Решите уравнение $\log_{0,25}(13-6x)\cdot\log_{3-x}0,5=1$.

1.3. Задание С1, 2004 г.

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{0,9}(2y-3x+1)=0\\ 0,5\log_2(3y-x-1,5)+\log_4(8x)=0.\end{cases}$$

Напрашивается следующий план действий:
в каждом уравнении системы избавиться от логарифмов,
с помощью первого уравнения исключить одну из двух неизвестных.

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases}\log_{0,9}(2y-3x+1)=0\\ 0,5\log_2(3y-x-1,5)+\log_4(8x)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y-3x+1=1\\ \log_4(3y-x-1,5)+\log_4(8x)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y=3x\\ \log_4((3y-x-1,5)\cdot 8x)=0\ (\Leftrightarrow\log_4(2y\cdot 12x-8x^2-12x)=0)\\ 8x>0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y=3x>0\\ \log_4(3x\cdot 12x-8x^2-12x)=0\ (\Leftrightarrow 28x^2-12x=1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 28x^2-12x-1=0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3x>0 \\ 28\left(x-\frac{14}{28}\right)\left(x+\frac{2}{28}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{4}$.

Комментарий

А. О том, как в уме раскладывать на множители приведенный квадратный трехчлен, было рассказано ранее. Теперь покажем, как можно в уме получить ***разложение неприведенного квадратного трехчлена***, например, из предыдущей задачи

$$28x^2-12x-1.$$

- Сначала свяжем с исходным квадратным трехчленом другой, как будто не имеющий к нему прямого отношения, зато приведенный

$$t^2-12t-28$$

(старший коэффициент переброшен в качестве множителя к свободному члену).

- Затем разложим его на множители, например, описанным ранее способом

$$(t-14)(t+2)$$

(напомним, что для этого достаточно в уме представить число -28 в виде произведения чисел, сумма которых равна -12, т.е. чисел -14 и 2, — их и вписать в разложение).

- Наконец, глядя на полученное разложение, запишем исходный квадратный трехчлен в преобразованном виде

$$28\left(x-\frac{14}{28}\right)\left(x+\frac{2}{28}\right)$$

(хорошо видно, в какие три места нужно вписать его старший коэффициент, чтобы получилось верное разложение).

Б. Как мы уже видели, некоторые формулы действий с логарифмами меняют ***область допустимых значений***. Так, в предложенном выше решении, применив формулу суммы логарифмов

$$\log_4(3y-x-1{,}5)+\log_4(8x)=\log_4\left((3y-x-1{,}5)\cdot 8x\right)$$

слева направо, мы также расширили ОДЗ. Чтобы обеспечить равносильность полученного перехода, мы дописали в систему неравенство

$$8x>0.$$

Будучи единственным, оно не представляет собой полного набора требований для существования исходной, левой части формулы. Однако, при наличии под знаком логарифма положительного произведения

$$(3y-x-1{,}5)\cdot 8x>0,$$

положительность одного сомножителя уже гарантирует положительность другого

$$3y-x-1{,}5>0.$$

Поэтому о выполнении последнего неравенства, выполненного автоматически, можно не беспокоиться.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x}=-5y-15x+22 \\ 25^{-2y-5x}+25=26\cdot 5^{-2y}\cdot 5^{-5x}. \end{cases}$$

Анализ данной системы показывает следующее.

- Во-первых, второе уравнение системы является квадратным относительно переменной
$$p = 5^{-2y-5x}.$$
- Во-вторых, в результате решения этого уравнения могут образоваться максимум два положительных значения переменной p.
- В-третьих, не факт, что оба эти значения дадут решения системы, поскольку какое-то из них может выйти за пределы ОДЗ первого уравнения, которая задается неравенством
$$-2y-5x \neq 0.$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x} = -5y-15x+22 \\ 25^{-2y-5x}+25 = 26\cdot 5^{-2y}\cdot 5^{-5x} \quad \left(\Leftrightarrow \left(5^{-2y-5x}\right)^2 - 26\cdot 5^{-2y-5x}+25=0\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(5^{-2y-5x}-1\right)\left(5^{-2y-5x}-5^2\right)=0 \\ \dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x} = -5y-15x+22 \ \left(\Rightarrow -2y-5x\neq 0 \Rightarrow 5^{-2y-5x}\neq 1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y-5x=2 \\ \dfrac{-y+2\cdot 5x+11}{2} = -5y-3\cdot 5x+22 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x=-2y-2 \\ -y+2(-2y-2)+11 = 2\left(-5y+3(2y+2)+22\right) \ (\Leftrightarrow -7y=49) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-7 \\ 5x=12 \ (\Leftrightarrow x=2{,}4). \end{cases}$$

Ответ: $x=2{,}4$, $y=-7$.

Комментарий

Отметим пару мелочей по поводу предложенного текста:

- отрадно, что переменная p по своему виду оказалась тесно связанной с ОДЗ, так что нам удалось уже на раннем этапе решения, не вычисляя значений неизвестных x и y, понять, какие из полученных значений p годятся, а какие нет;
- неизвестная x участвовала в условии задачи не иначе как в сочетании с множителем 5, поэтому целесообразно было как можно дольше продержать ее именно в таком состоянии, что мы и сделали в решении.

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{6y-x-6}{3y+2x-1} = 3y-x \\ 9^{3y+2x}+27 = 12\cdot 3^{3y}\cdot 3^{2x}. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{3y-2x-1}{2y+x+2} = 2x-y+5 \\ \dfrac{1}{4^{x+2y}}+8 = 6\cdot 2^{-x}\cdot 2^{-2y}. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{xy+7x}{y+5} = x+2 \\ 0{,}5\log_3 \dfrac{25x-x^3-81}{y+3} = 2-\log_9(2-x). \end{cases}$$

Зацепкой к решению данной системы может послужить тот факт, что если в первом уравнении избавиться от знаменателя, то слагаемое вида xy исчезнет, а останутся только линейные по x и по y слагаемые, что позволит выразить одну неизвестную через другую.

Решение.

$$\begin{cases}\dfrac{xy+7x}{y+5}=x+2 \ (\Rightarrow xy+7x=(x+2)(y+5)\Rightarrow 2x=2y+10)\\ 0{,}5\log_3\dfrac{25x-x^3-81}{y+3}=2-\log_9(2-x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+5\neq 0\\ \log_9\dfrac{25x-x^3-81}{x-2}+\log_9(2-x)=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y+5=x\neq 0\\ \log_9\left(\dfrac{25x-x^3-81}{x-2}\cdot(2-x)\right)=2 \ (\Leftrightarrow \log_9\left(x^3-25x+81\right)=\log_9 81)\\ 2-x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-5\\ x^3-25x+81=81 \ (\Leftrightarrow (x-5)(x+5)x=0)\\ 0\neq x<2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=-10.\end{cases}$$

Ответ: $x=-5$, $y=-10$.

Комментарий

Ограничение $y+5\neq 0$ на область допустимых значений, благодаря двойному условию $x=y+5\neq 0$ перекочевало в неравенство $x\neq 0$ и было учтено заранее, что, вместе с ограничением $x<2$ и в отсутствие ограничения $\dfrac{25x-x^3-81}{y+3}>0$ (типичного для любителей выписывать полностью ОДЗ), существенно упростило логику решения и сократило его запись.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{xy+x}{y-2}=x-3\\ \log_4(x+5)=3-0{,}5\log_2\dfrac{36x-x^3-64}{y-7}.\end{cases}$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{3xy+2x}{y-6}+4=3x\\ \log_3\dfrac{4x-x^3-81}{4-y}=4-2\log_9(2-5x).\end{cases}$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{6x-2y-7}=\dfrac{3x-y}{4}+1\\ \dfrac{x-11y-8}{3x-y-16}=x-y.\end{cases}$$

1.4. Задание С1, 2005 г.

1. **Демоверсия.** Решите уравнение $|\sin x|=\sin x\cdot\cos x$.

Имеющийся в уравнении модуль раскроем по определению, причем наиболее приятный случай его равенства нулю рассмотрим отдельно.

Решение.

Рассмотрим три случая:

1) $\sin x=0$
$\Leftrightarrow x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

2) $\begin{cases}\sin x>0\\ \sin x=\sin x\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>0\\ 1=\cos x \ (\Rightarrow \sin x=0)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$;

3) $\begin{cases}\sin x<0\\ -\sin x=\sin x\cos x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x<0\\ -1=\cos x\ (\Rightarrow \sin x=0)\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing .$

Ответ: $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Комментарий

А. Первые два из перечисленных в нашем решении случаев обычно объединяют в один, задаваемый условием

$$\sin x\geqslant 0 .$$

Такой способ раскрытия модуля — наиболее стандартный. Он, кстати, был применен и в демоверсии ЕГЭ 2005 г., где при решении этой задачи из уравнения, подчиненного указанному объединенному условию раскрытия модуля, были выведены два следствия

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=1 ,$$

давшие в совокупности правильный ответ. Однако любопытно, что проверка выполнения самого выписанного выше *условия раскрытия модуля* (очевидная для первого из этих двух следствий, но логически необходимая для второго) в тексте решения сделана не была. И только по чистой случайности, точнее, в силу следствия

$$\cos x=1\Rightarrow \sin x=0 ,$$

этот пробел в решении не привел к ошибке в ответе.

Б. Лишний раз посоветуем на будущее: чтобы не потерять условие ***раскрытия модуля***, лучше вписывать его сразу в систему, вместе с остальными требованиями задачи. Присутствие этого условия в системе, конечно, не означает, что мы советуем его непременно решать, в буквальном смысле этого слова. Было бы совершенно противоестественно, при наличии в системе уравнения, заниматься решением неравенства (в данном случае, к тому же, тригонометрического) и доведением его до ответа.

Более того, как мы видели при решении данной задачи, даже и уравнения, имеющиеся в системе, решать по отдельности не всегда полезно. Гораздо быстрее и с меньшими затратами мы пришли к ответу, взглянув на систему как на единое целое (в двух последних рассмотренных случаях).

2. Найдите все значения x, для которых точки графика функции

$$y=\frac{\log_7(10-2x)}{3-x}$$

лежат выше соответствующих точек графика функции

$$y=\frac{2}{3-x} .$$

Требование этой необычной, как будто бы графической задачи записывается в виде самого обычного неравенства, исследование которого, к тому же, упрощается тем, что знаменатели обеих его частей одинаковы.

Правда, в связи с данной постановкой задачи возникает весьма тонкий вопрос: куда девать те значения x, для которых одна функция определена, а другая — нет или, того хуже, обе не определены. Брать такие значения в ответ или нет? Например, можно ли сказать, что несуществующая точка лежит выше какой-то другой, данной точки?

- С одной стороны, кажется, что нет, выше не лежит, т.к. ее просто нет.
- Но, с другой стороны, и ниже-то она ведь тоже не лежит. Не лежит и прямо в данной точке. Значит, выходит, все-таки выше?

Чтобы отмести получившийся логический казус, толковать требование задачи, по-видимому, нужно так: ищутся такие значения x, для каждого из которых значение первой функции *определено* и при этом больше значения второй функции (которое, кстати, тогда тоже определено, что видно из сравнения двух данных формул друг с другом).

Решение.

$$\frac{\log_7(10-2x)}{3-x}>\frac{2}{3-x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_7(10-2x)-\log_7 49}{3-x}>0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(10-2x)-49}{3-x}>0\\ 10-2x>0\end{cases},\ \text{т.к.}\ (\log_7 u-\log_7 v)\sim(u-v)\ \text{при}\ u,v>0,$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+19{,}5}{x-3}>0\\ x<5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-19{,}5\\ 3<x<5.\end{array}\right.$$

Ответ: $x<-19{,}5$, $3<x<5$.

Комментарий

А. В представленном решении мы применили ***метод замены множителя***, т.е. проделали следующее:

- привели неравенство к такому виду, в котором справа стоит ноль, а слева дробь (впрочем, с равным успехом могло быть и произведение),
- заменили числитель дроби, имеющий вид

$$\log_7 u-\log_7 v,$$

более простым выражением

$$u-v$$

того же знака, причем понятие *знака* здесь вмещает три позиции — положительность, отрицательность и равенство нулю (т.е. отсутствие знака),

- зафиксировали в пояснении утверждение о совпадении знаков выражений (обозначаемое символом $\sim$), которое является ничем иным как перефразировкой свойства возрастания *логарифмической* функции с основанием, большим 1,
- наконец, добавили в систему ограничения, пропавшие в результате произведенной замены в связи с расширением ОДЗ.

Идея замены множителя распространяется и на другие монотонные функции: *показательные, степенные* (с нечетным показателем), а при некоторых ограничениях — и на многие другие. Этот метод, хотя и не прост, но очень эффективен, т.к. позволяет, устранив в неравенстве нестандартные функции, впоследствии решить его методом интервалов.

Б. Последнюю систему в первоначальном решении этой задачи можно было решить и ***методом интервалов***, поскольку сомножители левой части первого ее неравенства имеют стандартный вид

$$(x-x_0)^k,\ k\in\mathbb{Z},$$

(некоторые почему-то считают отрицательные значения k уже нестандартными). Для определения знаков такого стандартного произведения достаточно проделать следующее:

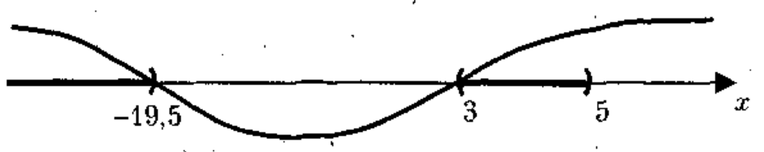
- отметить на оси все точки возможной смены его знака (для каждого сомножителя стандартного вида это будет свое число x_0),
- выяснить, какой знак имеет произведение на каждом из образовавшихся интервалов (на самом правом участке оно заведомо положительно, а при переходе справа налево через каждую из отмеченных точек x_0 оно меняет или не меняет знак в зависимости от четности степени k соответствующего стандартного множителя).

В. Так, при решении системы *методом интервалов*

$$\begin{cases}\dfrac{x+19{,}5}{x-3}>0\\ x<5\end{cases}$$

может получиться следующая ***графическая иллюстраци*** на которой:

- жирными линиями на оси отмечены включенные в отве промежутки,
- концы промежутков отмечены круглыми скобками, озн чающими, что сами они в промежутки не входят (в пр тивном случае скобки были бы квадратными),
- извилистая линия изображает знак функции f (над осью плюс, под осью — минус, на оси — нет знака).



Г. В решении этой задачи, приведенном в самом начале, ответ был получен без рисунка вообще, устно, с помощью следующих умозаключений:

- знак дроби определяется практически *по тем же правилам*, что и знак произведения (за исключением нулей знаменателя), поэтому можно считать, что последняя система имеет вид

$$\begin{cases}(x+19{,}5)(x-3)>0\\ x<5\end{cases}$$

(явно ее выписывать как раз не обязательно из-за тонкости с нулями знаменателя!),

- первое неравенство выполнено *за корнями* получившегося квадратного трехчлена, а с учетом второго неравенства получаем окончательный ответ.

Д. Для решения неравенств, подобных исходному, более распространен ***обобщенный метод интервалов***. Он позволяет организованно исследовать знак произведения (частного) по некоторой специфической информации о его сомножителях.

Отличается обобщенный метод от *стандартного* тем, что в нем сомножители не обязательно имеют стандартный вид, а могут быть любыми *элементарными* функциями. И хотя заранее известно, что каждая из них *непрерывна на всей своей области определения*, многие экзаменаторы (видимо, не знакомые с указанным фактом) требуют от школьников повторять соответствующее утверждение для конкретных элементарных функций при каждом применении метода интервалов.

План действий при использовании обобщенного метода интервалов примерно таков:

- найти нули каждого сомножителя (здесь-то и кроется основное преимущество этого метода, а именно: в нем не требуется решать неравенства — достаточно уравнений),
- найти все точки, не входящие в область определения хотя бы одного из сомножителей,
- отметить все найденные точки на числовой оси, разбив ее тем самым на интервалы,
- определить знак произведения на каждом из полученных интервалов (где любой сомножитель, в силу его непрерывности, имеет постоянный знак).

Последняя операция представляет собой самое узкое место в этом привлекательном с виду методе. Ее можно произвести чисто арифметически, путем подстановки пробных точек из соответствующих интервалов. Однако интереснее заменять выкладки логическими приемами, например, определяя знаки каждого сомножителя в отдельности.

Е. Итак, решим ту же задачу обобщенным методом интервалов.

Решение.

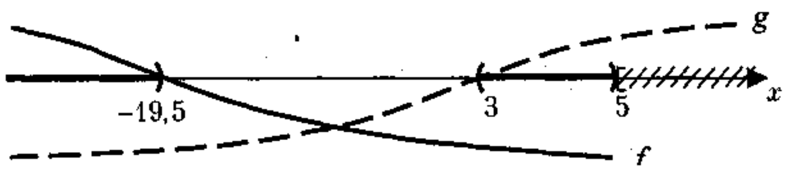
1) $$\frac{\log_7(10-2x)}{3-x}>\frac{2}{3-x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_7(10-2x)-2}{x-3}<0.$$

2) $f(x)=\log_7(10-2x)-2$,
$g(x)=x-3$:

а) $\log_7(10-2x)=2 \Leftrightarrow 10-2x=49 \Leftrightarrow x=-19{,}5$;

б) $10-2x>0 \Leftrightarrow x<5$.



Ответ: изображен на рисунке жирными линиями на оси, при этом

- зачеркнуты не входящие в ОДЗ точки правого луча, включая его конец 5 (о чем говорит квадратная скобка, относящаяся к штриховке),
- извилистые линии, соответствующие функциям f и g, показывают, какой знак имеет каждая из них,
- знак дроби на каждом из трех интервалов определяется по знакам числителя и знаменателя.

Строя чертеж, мы сначала отмечали ключевые точки на оси просто поперечными черточками, а по мере того, как определялись с интервалами, превращали черточки в соответствующие скобки.

Ж. Решать неравенство

$$\frac{\log_7(10-2x)-2}{3-x}>0$$

можно естественным и бесхитростным ***перебором случаев***, которых придется рассмотреть всего два:

1) $\begin{cases}3-x>0\\ \log_7(10-2x)>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3\\ 10-2x>49\end{cases} \Leftrightarrow x<-19{,}5$;

2) $\begin{cases}3-x<0\\ \log_7(10-2x)<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3\\ 0<10-2x<49\end{cases} \Leftrightarrow 3<x<5$.

Решение оказалось совсем несложным, но будь задача потруднее — преимущества других методов были бы убедительнее (а мы, конечно, должны рассчитывать и на более серьезные задачи).

3. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{\log_5(15-2x)}{17-4x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{3}{17-4x}$.

4. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y=-\dfrac{3}{12-4x}$.

5. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{\log^2_{0,7}(23+4x)}{45-4x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{83}{4x-45}$.

6. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{\log^2_7(23-4x)}{3x+5}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{11}{-5-3x}$.

7. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{4^x-18\cdot 2^x}{20-3x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{-32}{20-3x}$.

8. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{25\cdot 25^x-26\cdot 5^x}{42-10x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{-1}{42-10x}$.

1.5. Задание С1, 2006 г.

1. **Демоверсия.** Решите уравнение

$$4\cos x\operatorname{ctg}x+4\operatorname{ctg}x+\sin x=0.$$

Представив котангенс в виде дроби, приведем левую часть уравнения к общему знаменателю.

Решение.

$$4\cos x\operatorname{ctg}x+4\operatorname{ctg}x+\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos^2 x+4\cos x+\sin^2 x}{\sin x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}3\cos^2 x+4\cos x+1=0\\ \sin x\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3\left(\cos x+\dfrac{1}{3}\right)\left(\cos x+\dfrac{3}{3}\right)=0\\ \cos x\neq \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k,\ \text{где}\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$.

Комментарий

А. Многие относятся с определенным недоверием к знаку ***плюс-минус***, поскольку он воспринимается не всегда однозначно. Его стараются избегать, а некоторые даже запрещают, причем полностью, причем зря.

Смеем заметить, что использование этого знака в определенных ситуациях не только не опасно, но даже полезно, поскольку оно:

- математически *корректно* и не уступает по безопасности использованию многих других знаков (скажем, знака $\geqslant$, который тоже отличается некоторой двусмысленностью). Так, в решении данной задачи последняя строчка, полученная по формуле корней простейшего тригонометрического уравнения вида

$$\cos x=a,$$

- реально содержит знак плюс-минус. Он превращает записанное в ней уравнение в *совокупность* двух уравнений: одно с плюсом, другое с минусом (на самом-то деле даже не двух, а бесконечного множества уравнений, поскольку в них содержится еще и целочисленный параметр);
- весьма удобно, т.к. *сокращает* запись, как минимум, вдвое. Например, формула корней квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

записанная в виде

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

выглядит компактно, из-за чего легко запоминается и используется. К сожалению, нынешние учителя и их ученики, запуганные опасностью, якобы исходящей от знака плюс-минус, незаслуженно отвергают эту формулу, зачем-то разделяя ее (лучше сказать, размножая) на две;

- по существу отражает природу тех объектов, которые связаны с *четными* функциями. Например, в решении рассмотренной же задачи неравенство

$$\sin x\neq 0$$

превращено в неравенство

$$\cos x\neq\pm 1,$$

представляющее собой в данном случае не совокупность, а систему двух неравенств (отдельно с плюсом и с минусом). Такое, фактически ***двойное неравенство*** напрямую связано с порождающим его условием

$$\cos^2 x \neq 1 \text{ или } |\cos x| \neq 1$$

(равносильным начальному неравенству, в силу *основного тригонометрического тождества*).

Б. Решение данной задачи предполагает отбор корней тригонометрического уравнения

$$\left(\cos x + \frac{1}{3}\right)(\cos x + 1) = 0,$$

удовлетворяющих неравенству

$$\sin x \neq 0.$$

Казалось бы, нечего тут мудрить: надо решить уравнение и неравенство, а затем посмотреть, какие корни уравнения удовлетворяют неравенству. Но такой способ отбора потребует введения аж трех целочисленых параметров и, в силу уже одного только этого обстоятельства, слишком расточителен.

Мы же в приведенном решении, напротив, сразу доказали, причем, заметьте, не решая ни уравнения, ни, тем более, неравенства, что составленная из них система равносильна всего-то одному уравнению

$$\cos x = -\frac{1}{3}.$$

2. Решите уравнение $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 31 = \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 + x^2$.

Возведенный в квадрат квадратный корень дает подкоренное выражение. В результате этого уравнение резко упрощается и становится квадратным относительно переменной $\log_2 x$.

Р е ш е н и е.

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 31 = \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - 5\log_2 x + 31 = 25 - x^2 + x^2 \\ 25 - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0 \\ x^2 \leqslant 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 x - 2)(\log_2 x - 3) = 0 \\ -5 \leqslant x \leqslant 5 \ (\Rightarrow \log_2 x < 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ -5 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

О т в е т : $x = 4$.

Комментарий

Данная задача содержала, так сказать, ловушку: избавившись от квадратного корня, мы избавились и от ограничения на ***область допустимых значений***, которое он создавал.

Простейший, но далеко не самый экономный, способ борьбы с неприятностями подобного рода состоит в явном нахождении ОДЗ в самом начале решения и в ее учитывании в конце. Мы же пошли другим, более рациональным путем — вообще не искали ОДЗ, а лишь следили за ее изменением.

В частности, когда был отброшен квадратный корень и *пропало ограничение*

$$25 - x^2 \geqslant 0,$$

оно было тотчас же восстановлено в системе с полученным уравнением. И учтено оно было не по окончании решения, а в его процессе, при первой же возможности.

Зато, например, неравенство

$$x > 0,$$

также необходимое для ОДЗ, но не утраченное в процессе решения, так ни разу и не попало в поле нашего зрения.

3. Решите уравнение $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 87 = \left(\sqrt{81-x^2}\right)^2 + x^2$.

4. Решите уравнение $\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = \left(\sqrt{5-x^2}\right)^2 + x^2$.

5. Решите уравнение $3\cdot 9^x - 28\cdot 3^x + 11 = \left(\sqrt{2-2x^2}\right)^2 + 2x^2$.

6. Решите уравнение $5\cdot 25^x - 6\cdot 5^x + 1{,}2 = \left(\sqrt{0{,}2-x^2}\right)^2 + x^2$.

7. Решите уравнение $4^x - 10\cdot 2^x + 20 = \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 + x^2$.

8. Решите уравнение $\cos 7x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2$.

Это уравнение упрощается по тому же принципу, что и предыдущие, правда, в результате получается не квадратное, а тригонометрическое уравнение.

Решение.

$$\cos 7x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 1 - x^2 + x^2 \\ 1 - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 1 \\ x^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \ (\Leftrightarrow -7 \leqslant 7x \leqslant 7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{7} n, \text{ где } n = 0,\ \pm 1 \ (\text{т.к. } 6 < 2\pi < 7).$$

Ответ: $x = 0,\ \pm\dfrac{2\pi}{7}$.

Комментарий

А. В рассмотренном варианте задачи, по сравнению с остальными, добавлен один усложняющий момент, связанный с ***отбором корней тригонометрического уравнения*** (компенсирующим, по всей видимости, отсутствие квадратного уравнения). В предложенном нами решении этой задачи мы отделались легким испугом, точнее, следующими тремя наблюдениями:

- двойное неравенство

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

в данном исследовании удобнее заменить неравенством

$$-7 \leqslant 7x \leqslant 7;$$

- удвоенное число

$$\pi = 3{,}14\ldots$$

задает шаг размером где-то между 6 и 7;

- шагая от нуля в обе стороны, мы попадаем в интервал $(-7;7)$ ровно три раза, а именно, точками

$$7x = 0, \pm 2\pi,$$

соответствующими значениям

$$n = 0,\ \pm 1.$$

9. Решите уравнение

$$\sin\frac{x}{3} = \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 + x^2 - 25.$$

10. Решите уравнение

$$\cos 2{,}5x = \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 + x^2 - 10.$$

1.6. Задание С1, 2007 г.

1. Демоверсия. Найдите значение функции

$$f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{0,1}(x+5)}$$

в точке максимума.

Удивительно, но задача поставлена так, будто откуда-то заранее известно, что:

- данная функция заведомо имеет *хотя бы одну* точку максимума (должно быть, обычному школьнику достаточно одного беглого взгляда на данную формулу, чтобы сразу это понять),
- точек максимума у данной функции — *не более одной* (в самом деле, если бы нашлось две таких точки, то было бы непонятно, в которой из них нужно искать значение функции).

В связи с этим, возникает каверзный вопрос: можно ли при решении задачи пользоваться косвенной информацией, выуженной из самой ее формулировки?

Представим себе, что, решая на экзамене эту задачу, школьник в какой-то момент нашел одну точку, претендующую на то, чтобы быть объявленной точкой максимума, причем:

- то ли уже понятно, что она-то точно является точкой максимума,
- то ли у функции вообще всего одна критическая точка,
- то ли все остальные точки — заведомо не точки максимума, но не известно, попадает ли найденная точка в область определения функции (как мы увидим ниже, именно эта ситуация реализуется в решении данной задачи).

Так или иначе, но пусть у школьника не получается сразу, без дополнительного исследования, объявить ее точкой максимума. А что, если он возьмет, да и запишет в ответ значение функции в этой точке: ничего больше не изучая, поскольку, мол, в условии задачи открыто заявлено, что точка максимума

существует и единственна. Как отнесутся к такому решению проверяющие — ведь формально-то школьник будет прав?

Вернемся к поставленной задаче: чтобы ее решить, надо, разумеется, предварительно привести данную функцию к виду, удобному для дифференцирования.

Р е ш е н и е.

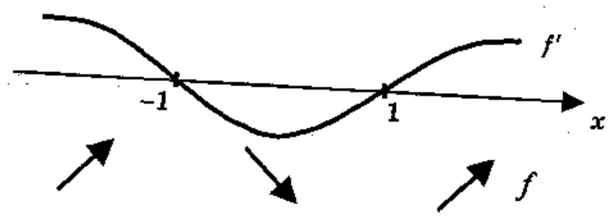
$$f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{0,1}(x+5)}=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}+\lg(x+5)}=10^{\lg(x^3-3x)}=x^3-3x$$

а) $D(f)$:

$$\begin{cases}\dfrac{x^3-3x}{x+5}>0\\ x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5\\ x\left(x^2-3\right)>0,\end{cases}$$

б) $f'(x)=(x^3-3x)'$

$$=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$



в) $-1\in D(f)$, т.к. $-1>-5$ и $-1\cdot\left((-1)^2-3\right)>0$,

г) $x=-1$ — единственная точка максимума,

д) $f(-1)=(-1)^3-3(-1)=2$.

О т в е т: 2.

Комментарий

А. С одной стороны, упрощение формулы, задающей функцию f, содержит стандартный подвох: оно приводит к изменению ее ***области допустимых значений*** (служащей, по умолчанию, област стороны, без изменения предложенной формулы трудно обойтись, т.к. иначе было бы слишком тяжело ее дифференцировать.

Поэтому нужно все-таки:

- сначала формулу упростить,
- потом ее исходную ОДЗ восстановить.

Именно так мы и поступили, решая задачу. Правда, явно эту область мы в итоге так и не указали, за ненадобностью. Зато в конце решения, после обнаружения единственной возможной точки максимума мы проверили ее на предмет вхождения в ОДЗ.

Б. При оформлении текста решения мы столкнулись с необходимостью в его пункте а) каким-то образом обозначить явно вопрос, которым мы планируем заниматься. Учитывая, что слов при этом хотелось бы писать поменьше (естественное желание любого школьника), мы создали некий ***заголовок*** этого пункта, завершившийся самым обыкновенным двоеточием, после которого и были записаны необходимые выкладки и рассуждения, посвященные нахождению области определения функции f.

Трюк с использованием заголовка зачастую бывает довольно удобен. Им можно пользоваться также и в тех случаях, когда мы не хотим повторять при каждом переходе некоторую постоянную информацию, как-то: целочисленость какой-либо переменной, ее положительность, принадлежность какому-либо промежутку и т.п. Тогда мы просто фиксируем это общее условие вначале и считаем, что оно действует после двоеточия на протяжении всего озаглавленного таким образом пункта решения.

В. При ***использовании производной*** для исследования функции, как правило, применяется целый букет приемов, которые ранее возникали только в связи с решением неравенств. Это и метод интервалов, и метод замены множителя, и применение графической иллюстрации.

Отметим особенно, что ***графическая иллюстрация***, естественно возникающая по поводу производной данной функции, имеет здесь свою специфику из-за того, что в ней изображается комплексная картина исследования:

- сначала нас интересуют сведения о *знаке* производной, точнее, промежутки ее знакопостоянства (на нашем рисунке этот знак показан извилистой линией, обозначенной символом f'),
- затем мы переносим эти сведения на монотонность самой функции, точнее, на промежутки ее *возрастания* или *убывания* (на рисунке это нижняя строка, состоящая из схематических стрелок и обозначенная буквой f).

Глядя на полученную иллюстрацию, мы делаем определенные выводы о наличии у функции точек максимума или минимума, а также о некоторых других ее свойствах.

2. Найдите точки максимума функции

$$f(x)=48x^2-3x^4-9x^3+0{,}1^{-\lg(x^3+8)}.$$

Идея решения — та же, что и в демоверсии, причем с тем же подвохом: прежде чем дифференцировать функцию, нужно упростить задающую ее формулу, при этом не упустив из виду возможное изменение области допустимых значений (придется применить *основное логарифмическое тождество*, которое хотя и тождество, но *не абсолютное*, поскольку меняет ОДЗ).

Решение.

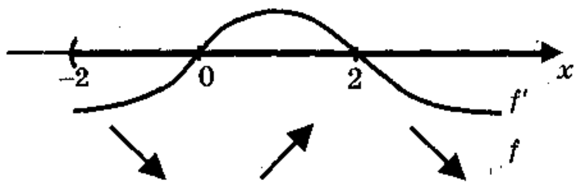
$$\begin{aligned} f(x)&=48x^2-3x^4-9x^3+0{,}1^{-\lg(x^3+8)}\\ &=-3x^4-9x^3+48x^2+10^{\lg(x^3+8)}\\ &=-3x^4-9x^3+48x^2+\left(x^3+8\right)\\ &=-3x^4-8x^3+48x^2+8\end{aligned}$$

а) $D(f)$:

$x^3+8>0 \Leftrightarrow x^3>(-2)^3 \Leftrightarrow x>-2$, б) $f'(x)=(-3x^4-8x^3+48x^2+8)'=-12x^3-24x^2+96x$

$\sim -x\left(x^2+2x-8\right)=-x\left(x+4\right)\left(x-2\right)$

$\sim -x\left(x-2\right)$, т.к. $x+4>0$,



в) $x=2$ — единственная точка максимума.

Ответ: 2.

Комментарий

А. Обратим внимание на то, что ***метод замены множителя*** при исследовании функции на монотонность с помощью производной приходится как нельзя кстати и приобретает особую ценность, поскольку:

- во-первых, интерес к производной в этом исследовании возникает именно благодаря ее знаку, а не абсолютной величине,
- во-вторых, если производная данной функции уже представлена в виде произведения, то на области определения этой функции некоторые сомножители могут оказаться имеющими вполне конкретный знак, с учетом которого они могут быть просто отброшены. Это и произошло в только что разобранном примере сначала с числом 12, а затем и с множителем $x+4$, положительном при условии
$$x>-2.$$

В итоге заметно упростились как выкладки, так и рассуждения.

Б. Результатом применения упомянутого метода оказывается ***цепочка замен*** выражения для производной в пункте б) нашего решения. В ней замены, обозначаемые символом $\sim$, перемежаются с равенствами. Но главное — эта це-

почка полностью сохраняет знак выражения, который нас здесь только и интересует.

3. Найдите точки минимума функции
$$f\left(x\right)=3x^4+3x^3-72x^2+2^{-\log_{0,5}(x^3+8)}.$$

4. Найдите точки минимума функции
$$f\left(x\right)=3x^4+3x^3-36x^2+100^{-\log_{0,01}(x^3+1)}.$$

5. Найдите точки минимума функции
$$f(x)=\left(6^{\sqrt{1-x}}+7\right)^2-4x^2-36^{\sqrt{1-x}}-14\cdot6^{\sqrt{1-x}}+0,5x^4.$$

Уничтожив часть слагаемых в формуле для данной функции, мы значительно расширим ее область допустимых значений. И это последнее обстоятельство необходимо учесть.

Решение.

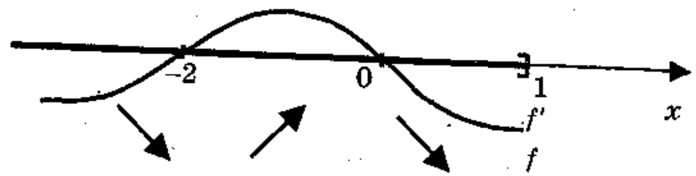
$$f(x)=\left(6^{\sqrt{1-x}}+7\right)^2-4x^2-36^{\sqrt{1-x}}-14\cdot6^{\sqrt{1-x}}+0,5x^4$$
$$=36^{\sqrt{1-x}}+14\cdot6^{\sqrt{1-x}}+49-4x^2-36^{\sqrt{1-x}}-14\cdot6^{\sqrt{1-x}}+0,5x^4$$
$$=0,5x^4-4x^2+49$$

а) $D(f)$: $1-x\geqslant0\Leftrightarrow x\leqslant1$,

б) $f'(x)=(0,5x^4-4x^2+49)'=2x^3-8x$

$\sim x\left(x^2-4\right)=x\left(x+2\right)\left(x-2\right)$

$\sim -x\left(x+2\right)$, т.к. $x-2<0$,



в) $x=-2$ — единственная точка минимума.

Ответ: -2.

ментарий

Если бы мы не учли расширения ОДЗ при произведенных
ги преобразованиях, то в ответ попало бы еще и число 2. И
я это действительно точка минимума преобразованной
ікции, но она не имеет отношения к исходной функции,
орая в ней не принимает никакого значения.

Найдите точки минимума функции

$$f(x)=\left(0{,}6^{\sqrt{0{,}5-x}}-2x\right)\left(0{,}6^{\sqrt{0{,}5-x}}+2x\right)+2x^4-0{,}36^{\sqrt{0{,}5-x}}.$$

Найдите точки максимума функции

$$f(x)=\left(7^{\sqrt{1-x}}-2\right)^2-49^{\sqrt{1-x}}+4\cdot 7^{\sqrt{1-x}}+4x^2-0{,}5x^4.$$

Найдите точки максимума функции

$$f(x)=\frac{6-6\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^2+2x^3-15x^4.$$

Заметим, что область допустимых значений данной фор-
лы неизбежно расширяется при сокращении дроби.

Решение.

$$(x)=\frac{6-6\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^2+2x^3-15x^4$$

$$=\frac{6\cos^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^2+2x^3-15x^4=-15x^4+2x^3+6x^2$$

а) $D(f)$:

$\cos(\pi x)\neq 0$

$\Leftrightarrow \pi x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$,

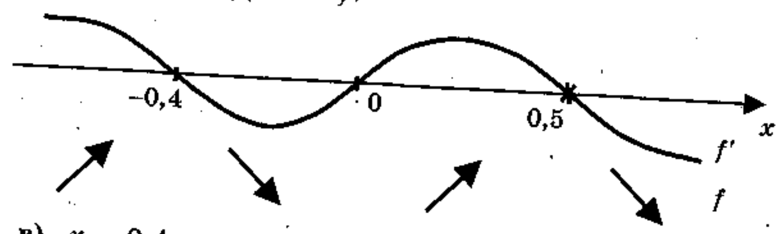
$\Leftrightarrow x\neq n+\frac{1}{2}$,

б) $f'(x)=(-15x^4+2x^3+6x^2)'$

$=-60x^3+6x^2+12x$

$\sim -x\left(10x^2-x-2\right)$

$\sim -x(x-0{,}5)(x+0{,}4)$,



в) $x=-0{,}4$ — единственная точка максимума, т.к. $0{,}5\notin D(f)$ и $-0{,}4\in D(f)$.

Ответ: $-0{,}4$.

Комментарий

Напомним еще раз, как можно быстро и в уме произвести ***разложение неприведенного квадратного трехчлена***, скажем, возникшего при исследовании производной в представленном решении

$$10x^2-x-2.$$

Для этого достаточно проделать следующее:

- сначала перебросить старший коэффициент к свободному члену в виде множителя, получив квадратный трехчлен
$$t^2-t-20,$$
- затем разложить его на линейные множители, подобрав пару чисел α и β так, чтобы их произведение равнялось свободному члену, а сумма — коэффициенту при первой степени переменной
$$\begin{cases}\alpha\cdot\beta=-20\\ \alpha+\beta=-1,\end{cases}$$

например, так

$$\begin{cases}(-5)\cdot 4=-20\\ (-5)+4=-1,\end{cases}$$

и получив разложение

$$t^2-t-20=(t-5)(t+4),$$

- наконец, записать искомое разложение на множители исходного квадратного трехчлена

$$10x^2-x-2=10\left(x-\frac{5}{10}\right)\left(x+\frac{4}{10}\right).$$

9. Найдите точки максимума функции

$$f(x)=4{,}5x^2+4x^3-\frac{15-15\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^4.$$

10. Найдите точки минимума функции

$$f(x)=15x^4-26x^3+\frac{12-12\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}\cdot x^2.$$

1.7. Задание С1, 2008 г.

1. Демоверсия. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\left|\sqrt{1-x^2}-2\right|+\sqrt{1-x^2}+x^3-3x^2.$$

Если не особо вникать в данную формулу, то, увидев в ней знак модуля, можно подумать, что указанную функцию дифференцировать нельзя. Однако на тех интервалах, где модуль раскрывается с определенным знаком, она все-таки дифференцируема.

Если же попробовать еще и определить, когда и как раскрывается модуль, то можно заметить, что оказывается, под знаком модуля стоит однозначно отрицательное число (при условии, конечно, что это и впрямь число).

Решение.

$$f(x)=\left|\sqrt{1-x^2}-2\right|+\sqrt{1-x^2}+x^3-3x^2$$
$$=2-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}+x^3-3x^2,\ \text{т.к.}\ \sqrt{1-x^2}\leqslant 1<2,$$
$$=x^3-3x^2+2.$$

а) $D(f)$:

$1-x^2\geqslant 0\Leftrightarrow x^2\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$,

б) $f'(x)=(x^3-3x^2+2)'=3x^2-6x$

$\sim x(x-2)$

$\sim -x$, т.к. $x<2$,

в) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, причем в точке 0 производная меняет знак с плюса на минус,

г) $f_{наиб}=f(0)=2$.

Ответ: 2.

Комментарий

А. Преобразовав формулу для данной функции к виду, удобному для дифференцирования, мы расширили ее ***область допустимых значений***. Однако, своевременно вспомнив об этом изменении, мы сразу же получили единственную критическую точку, в которой функция, как оказалось, не только имеет максимум (*локальный*), но и принимает свое наибольшее значение.

Б. Для сравнения, приведем *решение* этой задачи, взятое прямо из опубликованной демоверсии.

Решение.

1. Функция f определена только при $-1\leqslant x\leqslant 1$. При этих значениях x $\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$, и поэтому $\sqrt{1-x^2}-2<0$. Следовательно,

$$f(x)=\left|\sqrt{1-x^2}-2\right|+\sqrt{1-x^2}+x^3-3x^2=x^3-3x^2+2.$$

2. Найдем наибольшее значение функции $f(x)=x^3-3x^2+2$ на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$.

$$f'(x)=3x^2-6x;\ f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;\\x=2.\end{array}\right.$$

Но $x=2$ не лежит на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Сравним числа $f(-1)=-2$, $f(0)=2$ и $f(1)=0$. Наибольшее из них 2. Значит,

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} f(x)=2.$$

Ответ: 2.

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=(2x+4)^5-4(2x+4)^4$$

при $|x+2|\leqslant 1$.

В отличие от предыдущих задач, отрезок, на котором функция исследуется на минимум, задан несколько завуалированно, с помощью неравенства с модулем (решение которого здесь возникает не как самостоятельная задача, а как мелкая составляющая более крупного исследования).

Конечно же, эту задачу можно решить самым незатейливым способом — дифференцированием данной функции. На него и рассчитывали, прежде всего, ее составители.

Решение.

а) $|x+2|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant x+2\leqslant 1\Leftrightarrow -3\leqslant x\leqslant -1$,

б) $f'(x)=((2x+4)^5-4(2x+4)^4)'$
$=5(2x+4)^4\cdot 2-4\cdot 4(2x+4)^3\cdot 2=4(5x+2)(2x+4)^3$
$\sim -(2x+4)^3$, т.к. $5x+2\leqslant -5+2<0$,
$\sim -(x+2)$,

в) $x=-2$ — единственная критическая точка, точка максимума (т.к. в ней производная меняет знак с плюса на минус),

г) $f(-1)=(-2+4)^5-4(-2+4)^4=32-64=-32$,

д) $f(-3)=(-6+4)^5-4(-6+4)^4=-32-64=-96$.

Ответ: -96.

Комментарий

А. Техническую часть решения можно заметно упростить, перейдя, например, к новой переменной

$$t=2x+4$$

и к новой функции

$$F(t)=f(x)=t^5-4t^4$$

при $|t/2|\leqslant 1$

$$\Leftrightarrow -2\leqslant t\leqslant 2,$$

после чего гораздо менее хлопотно считается и производная новой функции

$$F'(t)=5t^4-16t^3=(5t-16)t^3$$

$$\sim -t,\ \text{т.к. } 5t-16\leqslant 5\cdot 2-16<0,$$

и значения функции на концах отрезка

$$F(2)=32-4\cdot 16=-32,$$

$$F(-2)=-32-4\cdot 16=-96.$$

Б. ***Нахождение наименьшего значения*** данной функции можно было провести и еще более изящно, указав для нее на данном отрезке

$$|x+2|\leqslant 1$$

точную оценку снизу с помощью ***цепочки соотношений*** (равенств и неравенств)

$$f(x)=(2x+4)^5-4(2x+4)^4$$
$$=(2(x+2)-4)(2(x+2))^4=2^5((x+2)-2)(x+2)^4$$
$$\geqslant 32\cdot(-1-2)\cdot 1^4 \text{ (т.к. } x+2\geqslant -1 \text{ и } 0\leqslant (x+2)^4\leqslant 1)$$
$$=-96$$
$$=f(-3),$$

доказывающей, что

$$f_{наим}=-96.$$

Анализ единственного неравенства в предложенной цепочке показывает, что точка

$$x=-3,$$

в которой достигается наименьшее значение функции, определяется равенством

$$x+2=-1.$$

3. Найдите наибольшее значение функции
$$f(x)=3(2x-4)^4-(2x-4)^5$$
при $|x-2|\leqslant 1$.

4. Найдите наибольшее значение функции
$$f(x)=50(0{,}5x-1)^2-(0{,}5x-1)^4$$
при $|x-3|\leqslant 3$.

5. Найдите наибольшее значение функции
$$f(x)=32(0{,}5x-3)^2-(0{,}5x-3)^4$$
при $|x-7|\leqslant 3$.

6. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x(2x-3)^6$ при $|x-1{,}5|\leqslant 0{,}5$.

7. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=x(0{,}5x+4)^6$ при $|x+8|\leqslant 2$.

8. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{-5x}{x^2+4}$ при $|x+3{,}5|\leqslant 2{,}5$.

9. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+16}$ при $|x+5{,}5|\leqslant 2{,}5$.

10. Найдите наибольшее значение функции
$$f(x)=0{,}25(x-3)(x+3)(x^2+9)-2x^2$$
при $|x-1{,}5|\leqslant 1{,}5$.

1.8. Задание С2, 2005 г.

1. **Демоверсия. Найдите нули функции**
$$y=\ln^2(x^2-3x-9)+\sqrt{x^3-8x-8}.$$

Напомним, что *нули* функции y — это, по определению, корни уравнения $y(x)=0$.

Поэтому задание состоит в том, чтобы, приравняв правую часть данного равенства к нулю, решить полученное уравнение.

Решение.

$$y=\ln^2(x^2-3x-9)+\sqrt{x^3-8x-8}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(x^2-3x-9\right)=0 \\ x^3-8x-8=0 \end{cases} \text{ (т.к. } \ln^2\left(x^2-3x-9\right)\geqslant 0 \text{ и } \sqrt{x^3-8x-8}\geqslant 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-9=1 \ \left(\Leftrightarrow (x+2)(x-5)=0\right) \\ x^3-8x-8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-2\text{, т.к. } (-2)^3-8\cdot(-2)-8=0 \text{ и } 5^3-8\cdot 5-8\neq 0.$$

Ответ: $x=-2$.

Комментарий

А. В самом первом переходе предложенной цепочки из одного только первого равенства, в силу заложенной в нем ***экстремальной ситуации***, было выведено сразу два.

В связи с этим переходом возникает вопрос: сколь подробно нужно объяснять на экзамене, что *сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда оба они равны нулю.* По идее, в качестве обоснования этого утверждения мы должны привести следующие два аргумента:

- если оба слагаемых равны нулю, то и их сумма — тоже,
- если же какое-то из них отлично от нуля, то, вследствие его неотрицательности, оно сразу положительно, а коль скоро и другое слагаемое всегда неотрицательно, то их сумма также положительна, а значит, не равна нулю.

Однако этот нестандартный трюк — уже с давних пор отчасти стандартен и потому не требует до такой степени подробных пояснений. В решении задачи мы ограничились лишь упоминанием о том, что оба слагаемых неотрицательны. Все остальное подразумевается.

Б. Для решения полученной в самом начале системы мы применили ***метод проверки***:

- решили только первое уравнение системы

$$\ln\left(x^2-3x-9\right)=0,$$

сводимое к квадратному

$$(x+2)(x-5)=0,$$

- проверили полученные корни подстановкой во второе (кубическое) уравнение

$$x^3-8x-8=0,$$

так и не решив его до конца.

Для решения задачи этого оказалось вполне достаточно.

В. Однако можно было поступить и по-другому, менее рационально, а именно: решить оба уравнения исходной системы и, сравнив полученные корни, включить в ответ только их общие для обоих уравнений значения. Для этого пришлось бы дополнительно найти все корни второго уравнения:

$$x^3-8x-8=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2, x_1, x_2\text{, где } x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+4}=1\pm\sqrt{5}.$$

Чтобы подобрать хотя бы один (если, конечно, он есть) ***рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами***, достаточно поискать его среди делителей свободного члена, на худой конец, — деленных на какие-нибудь делители старшего коэффициента.

Наконец, ***разложение кубического многочлена на множители***, при заранее известном одном корне, легко ищется прямо в уме: крайние коэффициенты квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c,$$

записанного в искомом разложении в скобках, находятся мгновенно из равенств

$$x\cdot ax^2=x^3, \qquad 2\cdot c=-8,$$

а единственный *неопределенный* коэффициент при x — например, путем нехитрой выкладки

$$2\cdot x^2+x\cdot bx=0 \Rightarrow b=-2.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{26+3x-5x^2}=x-1.$$

Под знаком первого корня стоит полный квадрат, причем в аккурат того самого выражения, что записано в правой части уравнения. Поэтому корень можно извлечь, получив модуль этого выражения с надеждой на его последующее взаимное уничтожение с правой частью.

Решение.

$$\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{26+3x-5x^2}=x-1\ (\Rightarrow x-1\geqslant 0,\ \text{т.к. } \sqrt{a}\geqslant 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geqslant 0\ (\Rightarrow \sqrt{1-2x+x^2}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=x-1) \\ x-1+\sqrt{26+3x-5x^2}=x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1 \\ 5x^2-3x-26=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1 \\ 5\left(x-\dfrac{13}{5}\right)\left(x+\dfrac{10}{5}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2{,}6.$$

Ответ: $x=2{,}6$.

Комментарий

А. Обсудим одну типичную, хотя и довольно тонкую логическую ошибку, за которую на экзамене непременно должна быть снижена оценка.

Если просто воспользоваться вытекающим из исходного уравнения неравенством

$$x-1\geqslant 0,$$

то можно подумать, что полученное уравнение окажется равносильным исходному. Однако это неверно: оно будет лишь следствием.

Действительно, как выяснилось в нашем решении, полученное впоследствии квадратное уравнение имеет пару корней

$$x=\frac{13}{5}=2{,}6 \text{ и } x=-\frac{10}{5}=-2.$$

Однако второй из них не удовлетворяет исходному уравнению (в нашем решении он был отброшен, как не удовлетворяющий указанному неравенству).

Б. Для того чтобы не забыть в решении об упомянутом выше неравенстве и избежать подобной ошибки, необходимо рассуждать чуточку тоньше, чем обычно, например, каким-либо из следующих трех способов.

- Разобрать два случая:
  1) *первый*, когда указанное неравенство не выполнено — этот случай невозможен, и его можно рассмотреть в уме, отбросив сразу же, без выписывания (фактически он был отвергнут нами в скобках);
  2) *второй*, когда оно выполнено — именно этот-то случай и рассмотрен в нашем решении подробно.
- *Приписать в систему к уравнению следствие из него.* В нашем решении — это неравенство, выведенное в скобках как следствие из исходного уравнения. С ним и переход получается равносильным, и модуль раскрывается однозначно.
- ***Воспользоваться следствием, а затем действовать методом проверки.*** Это значит, что можно сначала, пользуясь выведенным из уравнения неравенством, раскрыть в уравнении модуль

$$\sqrt{1-2x+x^2}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=x-1$$

и решить полученное следствие, а затем проверить *все* его корни, отобрав из них, путем подстановки, только те, которые удовлетворяют неравенству (или прямо исходному уравнению). При этом мы заведомо обрекаем себя на то, что наше решение разобьется на этапы и, тем самым, не выстроится в одну цепочку. Зато не будет ошибки.

3. Решите уравнение $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4$.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2-17x+15}=2-x.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{\left(3^x-4\right)^2}+\sqrt{\left(3^x-6\right)\left(3^x+9\right)}=3^x-4.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{\left(3-6^x\right)^2}+\sqrt{\left(6+6^x\right)\left(11-6^x\right)}=6^x-3.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt{(\sin 3x-2)^2}-\sqrt{9\sin^2 3x-24\sin 3x+16}=-4.$$

В этом уравнении оба корня извлекаются, поскольку под ними (где открыто, а где и завуалированно) записаны полные квадраты. Правда, если их извлечь, то, возможно, придется повозиться с раскрытием образующихся при этом модулей.

Решение.

$$\sqrt{(\sin 3x-2)^2}-\sqrt{9\sin^2 3x-24\sin 3x+16}=-4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(s-2)^2}-\sqrt{(3s-4)^2}=-4\text{, где } s=\sin 3x,$$

$$\Leftrightarrow |s-2|-|3s-4|=-4$$

$$\Leftrightarrow (2-s)-(4-3s)=-4\text{, т.к. } s<2 \text{ и } 3s<4,$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x=-1$$

$$\Leftrightarrow 3x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n\text{, где } n\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n,\quad n\in\mathbb{Z}$.

Комментарий

Иногда при ***раскрытии модуля*** неверно пользуются высказыванием

$$|a|=\pm a,$$

совершенно справедливо утверждающим, что для любого числа верно *хотя бы одно* из равенств

$$|a|=a \text{ или } |a|=-a.$$

Подчеркнем, для положительных значений — конкретно первое равенство, а для отрицательных — второе, но не оба сразу (разве только для нуля).

Если этого не понимать, то можно получить такое, с позволения сказать, решение разбираемой задачи:

$$|s-2|-|3s-4|=-4$$

$$\Leftrightarrow \pm(s-2)\mp(3s-4)=-4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(s-2)-(3s-4)=-4\\ -(s-2)-(3s-4)=-4\\ (s-2)+(3s-4)=-4\\ -(s-2)+(3s-4)=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2s=6\\ 4s=10\\ 4s=2\\ 2s=-2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow s=\frac{1}{2},-1\text{, т.к. } s\in[-1;1].$$

Вроде бы, здесь все верно, и даже произведен отбор корней, попадающих в область значений синуса. Однако ошибка есть. И кроется она именно в том, что модуль каждого выражения раскрыт и с плюсом, и с минусом, независимо от знака самого выражения (который, кстати, был вполне определенным).

А в результате из исходного уравнения выведено всего лишь следствие: как мы видели, одно из полученных в нем значений лишнее. Такое решение, конечно, можно спасти с помощью проверки полученных значений — но уже, например, подстановкой их в исходное уравнение.

8. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin^2 0{,}5x-6\sin 0{,}5x+9}+\sqrt{(2\sin 0{,}5x-5)^2}=8.$$

1.9. Задание С2, 2006 г.

1. **Демоверсия.** При каких значениях x соответственные значения функций

$$f(x)=\log_2 x \text{ и } g(x)=\log_2(3-x)$$

будут отличаться меньше, чем на 1?

Задача легко переводится на язык неравенств: тот факт, что два числа отличаются меньше, чем на 1, означает, что *их разность по модулю меньше* 1.

Решение.

$$\left|\log_2 x-\log_2(3-x)\right|<1$$

$$\Leftrightarrow -1<\log_2 x-\log_2(3-x)<1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x<\log_2(3-x)+1\\ \log_2 x+1>\log_2(3-x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x<\log_2(2(3-x))\\ \log_2(2x)>\log_2(3-x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0<x<2(3-x)\ (\Rightarrow 3-x>0)\\ 2x>3-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1<x<2.$$

Ответ: $1<x<2$.

Комментарий

А. Решать исходное неравенство можно было, раскрывая модуль по определению, т.е. рассматривая два случая: когда выражение под модулем неотрицательно или, наоборот, отрицательно.

Мы же в предложенном решении поступили по-другому, более экономно, воспользовавшись ***геометрическим смыслом модуля*** данного числа как *расстояния* на числовой оси от соответствующей этому числу точки *до нуля*. Благодаря та-

кой интерпретации модуля, можно сделать следующие простейшие заключения:

- $|a|=1 \Leftrightarrow a=\pm1$,
- $|a|<1 \Leftrightarrow -1<a<1$,
- $|a|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a>1\\ a<-1\end{array}\right.$

(для их обоснования достаточно, взглянув на числовую прямую, ответить на вопрос, какие ее точки удалены от нуля ровно на 1, меньше, чем на 1, и больше, чем на 1, соответственно). Разумеется, в тексте решения такие утверждения никакими рисунками сопровождать не надо. Все это давно и хорошо всем известно.

Б. А теперь заметим как раз обратное: неравенство с модулем, равносильное требованию задачи и выдаваемое в нашем решении за исходное, на самом-то деле наоборот, само является продуктом геометрической интерпретации модуля и представляет собой просто лишний, бесполезный шаг в решении.

Оказывается, без упоминания о модуле можно было вполне и обойтись. Ведь уже только геометрический смысл происходящего дает возможность сформулировать требование задачи, например, сразу в виде двойного неравенства

$$\log_2(3-x)-1<\log_2 x<\log_2(3-x)+1.$$

Оно означает, что точка

$$\log_2 x$$

на числовой оси удалена от точки

$$\log_2(3-x)$$

и вправо, и влево меньше, чем на 1.

А тот факт, что это же неравенство с помощью модуля записывается короче, безусловно, любопытен, но принципиального значения не имеет, да и текст решения не укорачивает.

2. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x)=0{,}5\cdot 7^{4x+9} \text{ и } g(x)=2$$

меньше, чем 1,5.

Хотя эта задача по смыслу довольно близка к предыдущей (из демоверсии), но сформулирована она корректнее по следующим позициям:

- слово *соответственные* заменено более правильным словом *соответствующие*,
- в прежней формулировке числа *отличались* меньше, чем на 1, а в теперешней — расстояние между точками меньше, чем 1,5 (т.е. теперь стало ясно, что они могут и совпадать, тогда как раньше можно было предположить, что они должны, по условию, именно отличаться друг от друга).

Решение.

$$2-1{,}5<0{,}5\cdot 7^{4x+9}<2+1{,}5$$
$$\Leftrightarrow 1<7^{4x+9}<7 \Leftrightarrow 0<4x+9<1 \Leftrightarrow -9<4x<-8$$
$$\Leftrightarrow -\frac{9}{4}<x<-2.$$

Ответ: $-\dfrac{9}{4}<x<-2$.

Комментарий

В связи с приведенным решением, еще раз подчеркнем положительную роль ***двойного неравенства***, которое представляет собой:

- с одной стороны, более компактную запись системы неравенств (в решении мы обошлись сплошь двойными неравенствами, от чего текст только выиграл),
- с другой стороны, одну из возможных форм записи окончательного ***ответа*** (записанное в ответе двойное неравенство, по определению, как раз и задает интервал).

3. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x)=0{,}2\cdot 2^{3x+5} \text{ и } g(x)=4{,}8$$

меньше, чем 1,6.

4. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x)=0{,}3\cdot 2^{3x-13} \text{ и } g(x)=14{,}4$$

меньше, чем 4,8.

5. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x)=\log_9(8x-7) \text{ и } g(x)=2{,}5$$

меньше, чем 0,5.

6. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x)=\log_{\sqrt{2}}(5x+14) \text{ и } g(x)=10$$

меньше, чем 2.

7. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x)=\frac{x+1}{2x-2} \text{ и } g(x)=1$$

меньше, чем 0,5.

8. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x)=\frac{7x-3}{2x-3} \text{ и } g(x)=4$$

меньше, чем 0,8.

1.10. Задание С2, 2007 г.

1. Демоверсия. Решите уравнение

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x .$$

Первое слагаемое в данном уравнении упрощается за счет его сокращения на выражение $\cos x$, неявно фигурирующее и в числителе, и в знаменателе. После этого уравнение становится квадратным относительно переменной $\sin x$.

Решение.

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{2}{2}\right) = 0 \\ \sin x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n \text{, где } n \in Z .$$

Ответ: $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Комментарий

Приведенное решение отличается тем, что в нем, благодаря грамотной замене условия

$$\cos x \neq 0$$

равносильным ему двойным неравенством

$$\sin x \neq \pm 1 ,$$

удалось не рассматривать отдельно два случая

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ или } \sin x = 1 ,$$

а сразу оставить только один из них, первый.

2. Решите уравнение

$$\sin^2\frac{2x}{5} - 10\sin\frac{2x}{5}\sin\frac{x}{5} + 25 = 25\cos^2\frac{x}{5} .$$

Это уравнение с помощью основного тригонометрического тождества сводится к однородному уравнению второй степени относительно переменных

$$\sin\frac{2x}{5} \text{ и } \sin\frac{x}{5} .$$

Более того, его коэффициенты неспроста напоминают полный квадрат.

Решение.

$$\sin^2\frac{2x}{5} - 10\sin\frac{2x}{5}\sin\frac{x}{5} + 25 = 25\cos^2\frac{x}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{2x}{5} - 10\sin\frac{2x}{5}\sin\frac{x}{5} + 25\sin^2\frac{x}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{2x}{5} - 5\sin\frac{x}{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5} - 5\sin\frac{x}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{5}\left(\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{5} = 0 \text{, т.к. } \cos\frac{x}{5} < \frac{5}{2} ,$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{5} = \pi n \text{, где } n \in \mathbb{Z} ,$$

$$\Leftrightarrow x = 5\pi n .$$

Ответ: $x = 5\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Комментарий

Стандартным способом решения *однородного уравнения* от двух переменных считается его деление на соответствующую степень одной из них.

Например, данное уравнение, приводимое к виду

$$\sin^2\frac{2x}{5} - 10\sin\frac{2x}{5}\sin\frac{x}{5} + 25\sin^2\frac{x}{5} = 0 ,$$

в результате деления на выражение

$$\sin^2\frac{x}{5}$$

превращается в квадратное

$$t^2-10t+25=0$$

относительно выражения

$$t=\frac{\sin\dfrac{2x}{5}}{\sin\dfrac{x}{5}}=\frac{2\sin\dfrac{x}{5}\cos\dfrac{x}{5}}{\sin\dfrac{x}{5}}=2\cos\frac{x}{5}.$$

Да только, вот незадача, чтобы совершить эту операцию, нужно заранее исключить случай равенства

$$\sin^2\frac{x}{5}=0,$$

в котором уравнение, как раз наоборот, выполнено. Так что если в этой ситуации, не рассмотрев указанный случай отдельно, легкомысленно произвести деление, то корни уравнения неминуемо будут потеряны.

3. Решите уравнение $\sin^2 x+6\sin x\sin\dfrac{x}{2}+9=9\cos^2\dfrac{x}{2}$.

4. Решите уравнение $\sin^2\dfrac{2x}{3}+8\sin\dfrac{2x}{3}\sin\dfrac{x}{3}+16=16\cos^2\dfrac{x}{3}$.

5. Решите уравнение $x^2+1=0{,}5\left(2+6x+4\sqrt{2x^2-6x+5}\right)$.

Стандартный способ решения уравнений такого типа состоит в том, чтобы, уединив корень квадратный в одной части уравнения, возвести обе части в квадрат. Однако в данном случае описанный способ сопряжен с определенными трудностями, т.к. после возведения уравнения в квадрат получается многочлен четвертой степени.

Присмотримся к выражениям, стоящим под корнем и вне него. Их сравнение, после небольшой перегруппировки слагаемых, показывает, что коэффициенты как при x^2, так и при

x внутри корня вдвое больше, чем снаружи. Это наблюдение позволяет понизить степень введением новой переменной.

Р е ш е н и е.

$$x^2+1=0{,}5\left(2+6x+4\sqrt{2x^2-6x+5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x=2\sqrt{2x^2-6x+5}\Leftrightarrow 2x^2-6x-4\sqrt{2x^2-6x+5}=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-4y-5=0\text{, где } y=\sqrt{2x^2-6x+5}\geqslant 0,$$

$$\Leftrightarrow (y-5)(y+1)=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-6x+5}=5$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x+5=25\Leftrightarrow x^2-3x-10=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2,\ 5.$$

О т в е т: $x=-2,\ 5$.

Комментарий

Если уж в решении заведомо приходится делать ***замену переменной***, то не надо останавливаться на полпути. Лучше вобрать в новую неизвестную побольше всяких неприятностей, с тем, чтобы уж заодно и как можно ощутимее упростить техническую сторону решения.

В данной задаче самая первая приходящая на ум замена

$$t=x^2-3x,$$

конечно, решает все проблемы: новое уравнение оказывается иррациональным

$$t=2\sqrt{2t+5}$$

и доводится до ответа возведением в квадрат.

Однако эффект от указанной замены значительно повысится, если еще и переобозначить

$$y=\sqrt{2t+5}.$$

Именно это и было сделано в приведенном решении (правда, за один прием, а не за два). Уравнение относительно неизвестной y получилось просто квадратным, причем один из двух его корней был сразу отброшен по причине его отрицательности. А возводить уравнение в квадрат, конечно же, существенно приятнее в конце решения, когда численное значение корня квадратного уже определено.

6. Решите уравнение $x^2+x=0{,}6\left(x+3-\sqrt{5x^2+2x+1}\right)$.

7. Решите уравнение $x^2+x=0{,}5(6-x)+\sqrt{2x^2+3x+2}$.

8. Решите уравнение $2-3x+x^2=2(x-1)\sqrt{x}$.

Данное уравнение после возведения в квадрат будет иметь четвертую степень. Ничего не упрощает и обозначение корня через новую переменную, создающее в уравнении четвертую степень прямо сразу, безо всякого возведения.

Зато левая часть уравнения раскладывается на множители, один из которых совпадает с множителем, стоящим перед корнем в правой части. И этим обстоятельством, конечно, надо воспользоваться.

Решение.

$$2-3x+x^2=2(x-1)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=2(x-1)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=0\\ x\ge 0\end{cases}\\ \sqrt{x}=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\left(1+\sqrt{3}\right)^2\ (=4+2\sqrt{3}),\quad \text{т.к. } 1<\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=1;\ 4+2\sqrt{3}$.

Комментарий

А. Обратим внимание на то, что в нашем решении при расщеплении уравнения был использован один из возможных вариантов оформления ***перебора случаев*** — а именно, в виде совокупности.

Б. Бытует ошибочное мнение, будто для того, чтобы произведение равнялось нулю, необходимо и достаточно равенство нулю хотя бы одного из сомножителей. Неправда, недостаточно: нужно еще потребовать, чтобы все остальные сомножители при этом *имели смысл.*

Именно с этой целью, например, в приведенном решении в случае равенства нулю первого сомножителя

$$x-1=0$$

мы приписали неравенство

$$x\geqslant 0,$$

обеспечивающее существование второго сомножителя.

9. Решите уравнение

$$40-14x+x^2=2(x-4)\sqrt{x}.$$

10. Решите уравнение

$$6-5x+x^2=4(x-2)\sqrt{x}.$$

1.11. Задание С2, 2008 г.

1. **Демоверсия.** Решите уравнение

$$\log_{3-4x^2}\left(9-16x^4\right)=2+\frac{1}{\log_2\left(3-4x^2\right)}.$$

Сразу видно, что выражение, стоящее в правой части уравнения, преобразуется в логарифм по тому же основанию, что и в левой. Этим надо воспользоваться, но без спешки.

Решение.

$$\log_{3-4x^2}\left(9-16x^4\right)=2+\frac{1}{\log_2\left(3-4x^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2}\left(\left(3+4x^2\right)\left(3-4x^2\right)\right)=2+\log_{3-4x^2}2$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2}\left(3+4x^2\right)+1=2+\log_{3-4x^2}2$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2}\left(3+4x^2\right)=\log_{3-4x^2}\left(3-4x^2\right)+\log_{3-4x^2}2$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2}\left(3+4x^2\right)=\log_{3-4x^2}\left(2\left(3-4x^2\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 3+4x^2=2\left(3-4x^2\right)\ (\Rightarrow 3-4x^2>1,\ \text{т.к. } 3+4x^2>2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=\pm\frac{1}{2}$.

Комментарий

А. Хотя *область допустимых значений* данного уравнения и менялась в процессе нашего решения, нам не пришлось ни решать, ни вписывать в систему к уравнению ни одного неравенства, связанного с ОДЗ. И это потому, что мы просто:

- аккуратно следили за ее изменением,
- путем рассуждений убеждались в равносильности преобразований.

Б. Приводим, для сравнения, *решение* той же задачи из опубликованной демоверсии.

1) $$\log_{3-4x^2}\left(9-16x^4\right)=2+\frac{1}{\log_2\left(3-4x^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+\log_{3-4x^2}\left(3+4x^2\right)=2+\log_{3-4x^2}2\\ 3-4x^2>0\\ 3-4x^2\neq 1.\end{cases}$$

2) $$\begin{cases}\log_{3-4x^2}\dfrac{3+4x^2}{2}=1\\ |x|<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ |x|\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+4x^2=2\left(3-4x^2\right)\\ |x|<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ |x|\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=\dfrac{1}{2}\\ |x|<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ |x|\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}.$$

2. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения

$$\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg}2x} \text{ и } \frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\operatorname{tg}2x}$$

принимают равные значения.

Несмотря на относительную витиеватость формулировки задания, в нем от выпускников требуется не что иное, как просто решить уравнение с данными выражениями в левой и правой части.

Возникает естественный вопрос: зачем составителю задачи понадобилось столь длинно и неуклюже формулировать то, что с давних пор однозначно определяется словами *решить уравнение*? Похоже, как раз для того, чтобы абитуриенты и потрудились распознать указанные слова в задании или, возможно, чтобы вызвать смятение в их рядах, заставив их искать (причем безнадежно) в задаче какой-либо подвох.

Решение.

$$\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg}2x}=\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\operatorname{tg}2x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin 2x\cos 2x-\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{\operatorname{tg}2x}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin 2x\cos 2x-\cos 2x=0\\ \operatorname{tg}2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\sin 2x-1/2)\cos 2x=0\\ \sin 2x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1/2$ $\left(\Rightarrow \cos 2x \neq 0,\ \text{т.к. } \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1\right)$

$\Leftrightarrow 2x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$\Leftrightarrow x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2} n.$

Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Комментарий

А. Очень легко упустить из виду, что возникающее в процессе решения неравенство

$$\operatorname{tg} 2x \neq 0,$$

помимо прямого ограничения

$$\sin 2x \neq 0,$$

подразумевает еще и менее заметное, косвенное условие

$$\cos 2x \neq 0$$

существования самого тангенса.

Б. Заметим, что ни одно из перечисленных выше неравенств не решалось в явном виде:

- во-первых, это не понадобилось, поскольку все они с той или иной степенью очевидности вытекали из равенства

$$\sin 2x = \frac{1}{2},$$

- во-вторых, если бы мы их, чего доброго, решили, то они превратились бы в неравенства с параметрами (хотя бы и целочисленными), которые пришлось бы учитывать в ответе, также содержащем параметр, — а это уже серьезная работа, требующая много сил и времени, не говоря уже о квалификации.

3. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$ и $\dfrac{\sqrt{2}\sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos^4 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$ принимают равные значения.

4. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $9^{\log_7\left(9-25x^2\right)}$ и $9^{\log_7(3-5x)+\log_7\left(10x^2-6x+6\right)}$ принимают равные значения.

5. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $6^{\log_3\left(9-4x^2\right)}$ и $6^{\log_3(2x+3)+\log_3\left(2x^2+3x+6\right)}$ принимают равные значения.

6. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $4x+14$ *и* $\dfrac{11\sqrt{16x^2-2x-5}}{\sqrt{8x-5}}$ принимают равные значения.

7. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $3x^2\log_3(2+3x) - 6x\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2+3x}$ и $3x^2+2x$ принимают равные значения.

Уравнение, получаемое в этом задании, содержит довольно разнородные выражения: и логарифмы, и радикалы, и многочлены. Одна надежда — найти удачное разложение на множители.

Решение.

$3x^2\log_3(2+3x) - 6x\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2+3x} = 3x^2+2x$

$\Leftrightarrow 3x^2\log_3(2+3x) - 6x\cdot\dfrac{1/3}{-1}\log_3(2+3x) = 3x^2+2x$

$\Leftrightarrow (3x^2+2x)(\log_3(2+3x)-1)=0$

$\Leftrightarrow x(3x+2)(\log_3(2+3x)-\log_3 3)=0$ $(\Rightarrow 2+3x\neq 0)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad (\Rightarrow 2+3x>0) \\ 2+3x=3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=0,\ 1/3.$

Ответ: $x=0,\ 1/3$.

Комментарий

Заметим, что в приведенном решении:

- случай

$$3x+2=0$$

не был даже выписан, т.к. соответствующий ему множитель $3x+2$ стоит в уравнении еще и под логарифмом, а значит, заведомо положителен;

- необходимое для ОДЗ неравенство

$$2+3x>0$$

так и не было включено во множество условий, подлежащих решению, поскольку всякий раз, когда возникал вопрос о его вписывании, оно вытекало из остальных уравнений.

8. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $x^2\log_2(3x+1)-x\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{3x+1}$ и $3x^2+x$ принимают равные значения.

9. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $5\sqrt{x}\cdot 49^x-30\cdot 49^x$ и $14\sqrt{x}\cdot 7^{x-1}-84\cdot 7^{x-1}$ принимают равные значения.

10. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $12\sqrt{x}\cdot 9^x+6\cdot 3^{x+1}$ и $\sqrt{x}\cdot 3^{x+1}+24\cdot 3^{2x+1}$ принимают равные значения.

Глава 2

УМЕНИЕ МЫСЛИТЬ И РАССУЖДАТЬ

2.1. Задание С2, 2002 г.

1. **Демоверсия.** Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение

$$x^3+5x^2+ax+b=0$$

с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.

На первый взгляд, задача кажется не совсем корректной. Ведь сформулированное в ней условие на параметр a, строго говоря, зависит еще и от выбора значения b и, тем самым, имеет, по меньшей мере, двоякое толкование. Действительно, ищется наибольшее значение a, при котором рассматриваемое уравнение удовлетворяет требованию задачи:

- то ли *для любого значения* b,
- то ли *хотя бы для одного значения* b.

Однако, если проанализировать условие задачи (фактически приступив к ее решению), то можно заметить, что эта проблема снимается требованием, чтобы данное уравнение имело корень

$$x_1=-2,$$

т.е. чтобы при подстановке вместо неизвестной x числа -2 уравнение превращалось в верное равенство. Оно-то как раз и задает зависимость b от a, полностью определяя значение параметра b значением параметра a.

И еще: требование задачи о том, чтобы данное уравнение имело три корня, несколько расплывчато, т.к. если уравнение имеет, скажем, четыре корня, то три корня оно тоже имеет.

Нужно определиться с условием задачи — так сколько же должно быть корней:

- или ровно три,
- или как минимум три?

Ответ, опять-же, лежит на поверхности. Правда, только для тех, кто знает, что кубическое уравнение не может иметь более трех корней. Поэтому оба варианта прочтения в действительности эквивалентны.

Решение.

1. $p(-2)=0$, где $p(x)=x^3+5x^2+ax+b$,
   $\Leftrightarrow (-2)^3+5(-2)^2+a(-2)+b=0 \Leftrightarrow b=2a-12$.

2. $\begin{cases} a\in\mathbb{Z} \\ b=2a-12 \end{cases} (\Rightarrow b\in\mathbb{Z})$:
   $p(x)=x^3+5x^2+ax+(2a-12)$
   $=x^2(x+2)+3x(x+2)+(a-6)(x+2)=(x+2)\left(x^2+3x+(a-6)\right)$.

3. Уравнение имеет три корня тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен
   $$q(x)=x^2+3x+(a-6)$$
   имеет два различных корня, отличных от -2:
   $$\begin{cases} D>0 \\ q(-2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2-4(a-6)>0 \\ (-2)^2+3(-2)+(a-6)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<8\frac{1}{4} \\ a\neq 8 \end{cases}$$
   $\Leftrightarrow a=7$ (т.к. $a\in\mathbb{Z}$).

   Ответ: $a=7$.

Комментарий

А. На последнем этапе решения задачи мы сразу привели и необходимое, и достаточное условие того, что уравнение имеет три различных корня. Но оно же могло возникнуть и последовательно.

- Во-первых, квадратный трехчлен
  $$q(x)=x^2+3x+(a-6)$$

должен иметь два различных корня x_2 и x_3, т. е. его дискриминант должен быть положительным:

$$D>0 \Leftrightarrow a<8\frac{1}{4}.$$

Наибольшее целое число a, удовлетворяющее последнему неравенству, равно 8.

- Во-вторых, как мы уже знаем, утверждение о том, что значение $a=8$ и есть искомое, — преждевременно и, более того, не верно, поскольку при нем не все три корня x_1, x_2, x_3 многочлена $p(x)$ попарно различны:
  $$p(x)=(x+2)(x^2+3x+2)=(x+2)^2(x+1).$$

Поэтому наибольшее возможное значение параметра, удовлетворяющее всем условиям задачи, не превосходит 7.

- В-третьих, при $a=7$ оба корня квадратного трехчлена $q(x)=x^2+3x+1$ с дискриминантом $D=(-3)^2-4=5$ различны и иррациональны (коль скоро в формуле для них содержится число $\sqrt{5}$), а значит, отличны от -2. Стало быть, при этом значении параметра уравнение действительно имеет три различных корня.

Заметим, что рассуждение из приведенного ранее решения более изящно. В нем, в частности, вопрос об иррациональности числа $\sqrt{5}$ даже и не возник.

Б. Заметим, что в тексте решения важнее всего показать не то, как мы додумывались до решения задачи (это, на самом деле, вообще не важно), а то, почему полученный нами ответ правилен.

В связи с этим зададимся вопросом: какая цель ставится перед текстом решения математической задачи, какими свойствами должно обладать решение, и вообще, зачем оно нужно? Наиболее популярные версии ответа на этот вопрос таковы:

- решение призвано объяснить, как получался ответ (тогда годится ли, например, объяснение, что ответ был списан у соседа?),
- решение школьник пишет для того, чтобы показать, что он решил задачу самостоятельно (разве при этом неважно, верен ли ответ?),
- решение должно быть правильным, т.е. не содержать ошибок (но ведь тогда оно может быть и пустым, лишь бы ответ был верен?).

Ни один из перечисленных ответов не отражает существа дела. В действительности, ***решение*** математической задачи — это *доказательство* того, что полученный ответ правилен.

К сожалению, с этой истиной не знакомы не только школьники (что простительно), но и сами составители ЕГЭ, которые и по сей день, с завидным постоянством, в инструкции по выполнению экзаменационной работы предлагают тестируемым писать

- к задачам С1 и С2 — решения,
- к задачам С3, С4 и С5 — *обоснованные решения*.

Как будто решение, т.е. доказательство, или даже лучше сказать, обоснование, может быть обоснованным или необоснованным. Прелесть, что за постановка!

В. Серьезная проблема, возникающая в связи с данным определением решения, состоит в том, что понятие доказательства — не есть абстрактное, его содержание зависит от того, кому оно адресовано. Так, чтобы изложить решение задачи девятикласснику, требуется гораздо больше слов и действий, чем одиннадцатикласснику, а тем более учителю (математики) или экзаменатору.

Но даже и после такого разъяснения не все абсолютно ясно. Среди большинства экзаменаторов ЕГЭ бытует мнение, что и им нужно умышленно разжевывать решение так, как будто

они — девятиклассники, т.е. как будто они впервые слышат о математических объектах и фактах, изучавшихся в 10–11 классах (поскольку, мол, программа экзамена охватывает период обучения именно за эти классы).

Это обстоятельство еще более усложняет положение выпускников на Едином государственном экзамене.

Г. По определению, число x_0 является:

- *корнем многочлена* $p(x)$, если он делится на двучлен $x-x_0$;
- корнем уравнения $p(x)=0$, если подстановка $x=x_0$ обращает уравнение в верное равенство $p(x_0)=0$.

Применительно к многочлену, эти понятия эквивалентны. И все же между ними есть едва заметная разница, которая проявляется только при попытке определить *кратность* корня. Многочлен может и второй раз разделиться на двучлен $x-x_0$, а в итоге разделиться и на его квадрат $(x-x_0)^2$. А вот, уравнение уже не может второй раз иметь корнем число x_0 (по крайней мере, при буквальном толковании определения). Например:

- многочлен $x^2=(x-0)(x-0)$ имеет два корня $x_1=x_2=0$, участвующие в его разложении на множители,
- уравнение $x^2=0$ имеет ровно один корень — нулевой, никакая другая подстановка, кроме подстановки $x=0$, не обращает это уравнение в равенство.

В этом смысле, с формальной точки зрения, даже упоминание в тексте самого задания о *различности корней* уравнения является излишним: если три корня не различны, то их просто не три, а меньше.

Д. Механизм вынесения за скобки какого-либо множителя (в нашем случае — двучлена $x+2$) на экзамене мало кого интересует. Его можно не разъяснять при условии, что полученное разложение на множители проверяется в обратную сторону обыкновенным *раскрытием скобок*, и особенно, если это делается просто в уме. Между прочим, так же, как и при разложении на множители квадратного трехчлена.

Е. Для нахождения корней x_2 и x_3 можно было вообще не делить многочлен $p(x)$ на двучлен $x+2$, а воспользоваться *теоремой Виета*. Она утверждает, в частности, что сумма трех корней приведенного кубического многочлена равна его коэффициенту при второй степени, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену, взятому также с противоположным знаком:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-5 \\ x_1x_2x_3=-(2a-12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2+x_3=-3 \\ x_2x_3=a-6. \end{cases}$$

Отсюда снова получаем, что искомые числа x_2 и x_3 представляют собой пару корней ранее найденного квадратного трехчлена $q(x)$.

Ж. Найденная в нашем решении зависимость $b=2a-12$ гарантирует, что как только число a целое, то и число b также целое, и значит, факт целочисленности коэффициентов многочлена не требует какой-либо дополнительной проверки.

Кстати, в официальном решении, опубликованном в демоверсии ЕГЭ 2002 г. и призванном быть написанным с иголочки, напротив, это формально нигде не проверено, что следует признать логической неточностью.

2. Найдите множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in[\operatorname{arctg}0{,}5;\ \operatorname{arctg}3]$.

Казалось бы, здесь все просто: чтобы найти множество значений заданной функции на заданном отрезке, достаточно найти ее значения на концах отрезка и, сравнив эти значения друг с другом по величине, образовать из них отрезок.

Однако первое впечатление — как обычно, обманчиво: оно было бы оправданным, если бы функция

$$y=\sin 2x$$

на отрезке $[\operatorname{arctg}0{,}5;\ \operatorname{arctg}3]$ была монотонной. И хотя оба значения

$$\operatorname{arctg}0{,}5 \text{ и } \operatorname{arctg}3$$

лежат в первой четверти, где синус возрастает, но удвоенные-то значения

$$2\operatorname{arctg}0{,}5 \text{ и } 2\operatorname{arctg}3$$

лежат уже в разных четвертях, а именно, в первой и во второй, где синус сначала возрастает, а потом убывает.

Дополнительная трудность при решении данной задачи возникает из-за того, что значения x на концах отрезка заданы не явно, а как арктангенсы каких-то чисел. Необходимо научиться вычислять $\sin 2x$, зная $\operatorname{tg}x$. Для этого лучше всего применить формулу *универсальной подстановки*

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}.$$

Решение.

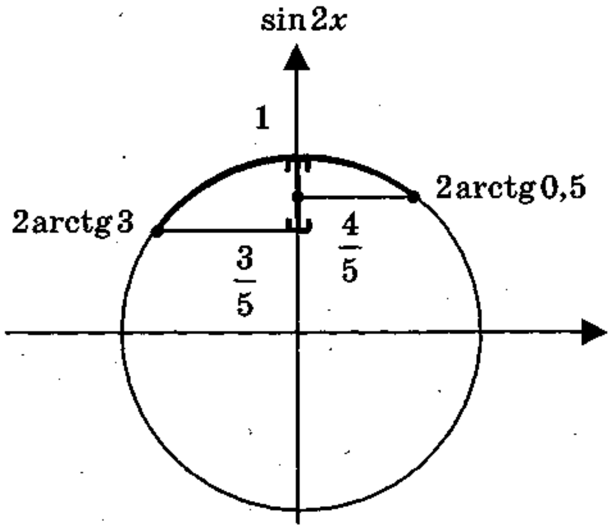
1. $x\in[\operatorname{arctg}0{,}5;\operatorname{arctg}3]$
$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}0{,}5\leqslant x\leqslant\operatorname{arctg}3 \Leftrightarrow 2\operatorname{arctg}0{,}5\leqslant 2x\leqslant 2\operatorname{arctg}3.$

2. $0<\operatorname{arctg}0{,}5<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow 0<2\operatorname{arctg}0{,}5<\frac{\pi}{2}<2\operatorname{arctg}3<\pi.$

3. $y(x)=\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$:

а) $y(\operatorname{arctg}0{,}5)=\frac{2\cdot 0{,}5}{1+0{,}5^2}=\frac{4}{5}$, б) $y(\operatorname{arctg} 3)=\dfrac{2\cdot 3}{1+3^2}=\dfrac{3}{5}$,

в) $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=1$,



г) $E(y)=[0{,}6;\ 1]$.

О т в е т : $[0{,}6;\ 1]$.

Комментарий

Существенную роль в задачах по тригонометрии может сыграть ***тригонометрический круг.*** Он представляет собой наиболее естественную модель, демонстрирующую непосредственно по определению все первичные свойства тригонометрических функций.

Глядя на круг, несложно сообразить, что наименьшее значение данной функции совпадает с ее значением на одном из концов данного отрезка, чего нельзя сказать про ее наибольшее значение, которое принимается при $2x=\dfrac{\pi}{2}$ и равно 1.

3. Найдите множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in\left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3};\operatorname{arctg} 2\right]$.

4. Найдите множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in\left[\arccos 0{,}8;\dfrac{5\pi}{12}\right]$.

5. Найдите множество значений функции

$$y=\log_{0,2}\frac{80}{13+\log_5\left(125+x^4\right)}.$$

Р е ш е н и е.

1. $y(x)=\log_{0,2}\dfrac{80}{13+\log_5\left(125+x^4\right)}$

$$=\log_{5^{-1}}\left(\frac{13+\log_5\left(125+x^4\right)}{80}\right)^{-1}=\log_5\frac{13+\log_5\left(125+x^4\right)}{80}.$$

2. $E(x^4)=[0;\infty)$

$\Rightarrow E(125+x^4)=[125;\infty)$.

$\Rightarrow E\left(\log_5\left(125+x^4\right)\right)=[\log_5 125;\infty)\ =[3;\infty)$

$\Rightarrow E\left(13+\log_5\left(125+x^4\right)\right)=[13+3;\infty)\ =[16;\infty)$

$\Rightarrow E\left(\dfrac{13+\log_5\left(125+x^4\right)}{80}\right)=\left[\dfrac{16}{80};\infty\right)\ =\left[\dfrac{1}{5};\infty\right)$

$\Rightarrow E(y)=E\left(\log_5\dfrac{13+\log_5\left(125+x^4\right)}{80}\right)=\left[\log_5\dfrac{1}{5};\infty\right)=[-1;\infty)$.

О т в е т : $[-1;\infty)$.

Комментарий

А. Для исследования области значений функции $y(x)$ мы сначала упростили задающую ее формулу, а затем мысленно представили её как результат последовательного применения (композиции) шести функций:

$$f_1(x)=x^4\,, \qquad f_4(x)=13+x\,,$$

$$f_2(x)=125+x\,, \qquad f_5(x)=\frac{x}{80}\,,$$

$$f_3(x)=\log_5 x\,, \qquad f_6(x)=\log_5 x\,.$$

Все перечисленные функции, кроме первой, — возрастающие (что очевидно, и посему мы в решении этого явно не отметили). Зная область значений $[0;\infty)$ первой из них, легко проследить за ее изменением под действием каждой следующей функции.

Б. Первый пункт нашего решения не был необходимым. Он был внесен в решение исключительно из соображений удобства: после того, как формула для функции $y(x)$ была преобразована, все составляющие ее функции (кроме первой) оказались возрастающими.

Если бы мы работали с исходной формулой, то две из функций, а именно,

$$f_5(x)=\frac{80}{x} \text{ и } f_6(x)=\log_{0,2} x\,,$$

были бы другими. Но, что гораздо хуже, — они были бы убывающими. Это доставило бы определенные неудобства, т.к. пришлось бы дважды поломать себе голову, оборачивая получающийся промежуток.

В. Считается, что факт возрастания всех перечисленных выше составляющих функций (разумеется, начиная со второй) не вызывает сомнений. Всех, кроме *логарифмической*.

По мнению составителей заданий, использование логарифмической функции (равно как и показательной) требует

каких-то дополнительных пояснений на экзамене, поскольку она, дескать, проходится в старших классах. По этой причине, в частности, они предлагают при всяком удобном случае явно писать, что эта функция возрастает, т.к. ее основание, мол, больше единицы. На худой конец, считают они, можно ограничиться простейшим пояснением

$$5>1\,.$$

Парадоксально, но, например, деление на 80 их совершенно не смущает и, по их мнению, не требует пояснений, хотя и опирается на неравенство

$$80>0$$

(неужели оно им более очевидно, чем предыдущее?).

Г. Второй пункт нашего решения можно было бы резко упростить, если сразу объявить, что функция

$$f(t)=\log_5\frac{13+\log_5(125+t)}{80}\,,$$

представляющая собой композицию перечисленных выше неограниченно возрастающих функций $f_2,\ldots,f_6$, неограниченно возрастает, поэтому

$$E(y)=E(f(x^4))=[f(0);\infty)=\left[\log_5\frac{13+\log_5 125}{80};\infty\right)=[-1;\infty)$$

Д. Довольно часто утверждение

$$E(y)=[-1;\infty)$$

обосновывают с помощью одной лишь оценки

$$y(x)\geqslant -1\,.$$

Этот вывод логически ошибочен. Формально, из одной лишь оценки указанное утверждение не вытекает, подобно тому, как, скажем, из верных оценок

$$-2<\sin x<2$$

не вытекает неверное равенство

$$E(\sin x)=(-2;2)\,.$$

Однако если экзаменатор к проверке такого решения отнесется неформально, без придирок, то, конечно же, сможет понять его автора правильно и, надеемся, все-таки найдет возможность оценить этот момент решения положительно.

Е. Наконец, еще одно довольно тонкое обстоятельство нужно учитывать при нахождении области значений функции, получаемой применением очередной функции к области значений, полученной на предыдущем шаге.

Пусть, к примеру, мы действуем функцией

$$f_2(x)=125+x\ ,$$

на луч $[0;\infty)$. Тогда рассуждаем мы следующим образом: когда переменная x пробегает все значения от 0 до бесконечности, то переменная

$$y=125+x$$

также возрастает от значения 125 до бесконечности. На основании чего же мы можем утверждать, что она пробегает именно все эти значения, все подряд, без пропусков? Для положительного ответа на этот вопрос недостаточно знания одного лишь возрастания функции f_2 — здесь необходимо еще и ***использование непрерывности.***

А вот нужно ли явным образом ссылаться на непрерывность этой функции на экзамене при записи решения этой задачи? Скорее всего, нет, и вот по каким причинам:

- на письменном экзамене не нужно обосновывать все абсолютно. Наличие и у самого проверяющего предварительных сведений по сдаваемому предмету все же можно предполагать;
- в приведенном примере положительный ответ кажется и без того очевидным, опирающимся на интуицию;
- все школьные функции, по умолчанию, непрерывны, поскольку общеизвестно, что любая *элементарная* (т.е. задаваемая одной формулой с помощью стандартных операций над стандартными функциями из школьной программы) функция — непрерывна на всей своей области определения;

- точным определением непрерывности функции школьники все равно не владеют;
- если требовать упоминать непрерывность здесь, то можно указать и другие типы рассуждений (скажем, при использовании метода интервалов, при взятии обратных функций, при обосновании существования корней уравнений и т.п.), в которых неявно также используется непрерывность функций. Тогда и во всех остальных местах также потребуется подобная ссылка. Не слишком ли схоластичным станет школьный предмет *математика*, если указанное требование будет реализовано на практике?

6. Найдите множество значений функции

$$y=\log_{0,1}\frac{300}{1+\lg\left(100+x^2\right)}.$$

7. Найдите множество значений функции

$$y=\log_{0,5}\frac{24}{11+\sqrt{1+|\ln x|}}.$$

8. Найдите множество значений функции

$$y=\log_{0,25}\frac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2}.$$

9. Найдите множество значений функции

$$y=\frac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0,125}(\cos x-\sin x)\right).$$

Для исследования множества значений выражения под знаком арккосинуса понадобится его преобразовать с помощью *вспомогательного угла.*

Решение.

1. $y=\dfrac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0,125}(\cos x-\sin x)\right)$

$$=\frac{3}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)\right)$$

$$=\frac{3}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{2}(\cos\varphi\cos x-\sin\varphi\sin x)\right),\text{ где }\varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$=\frac{3}{\pi}\arccos\frac{\cos(x+\varphi)}{2}.$$

2. $E(\cos(x+\varphi))=[-1;1]$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\cos(x+\varphi)}{2}\right)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow E\left(\arccos\frac{\cos(x+\varphi)}{2}\right)=\left[\arccos\frac{1}{2};\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{3}{\pi}\arccos\frac{\cos(x+\varphi)}{2}\right)=\left[\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3};\frac{3}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3}\right]=[1;2].$$

Ответ: $[1;2]$.

Комментарий

Единственная тонкость во всем решении, кажется, состоит в том, что арккосинус — убывающая функция. Поэтому мы и переставили местами концы отрезка, к которому она применялась. Опять же, никаких специальных объяснений в решении это не требует, т.к. функция стандартная, ее свойства хорошо изучены и применены правильно.

Если бы мы попытались соответствующий переход подробно объяснить, то ничего нового и содержательного, кроме констатации того факта, что переход произведен правильно, у нас не получилось бы. Например, можно было бы добавить фразу: *по свойствам функции арккосинус получаем...* Только какую такую важную информацию мы сообщили бы экзаменатору этим добавлением? Кроме того, похожую фразу следовало бы тогда написать и при каждом из остальных наших переходов. Чем эта-то функция лучше остальных?

10. Найдите множество значений функции

$$y=\frac{9}{\pi}\arccos\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}.$$

11. Найдите множество значений функции

$$y=\frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-0,25\right).$$

12. Найдите множество значений функции

$$y=\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(0,25(\sqrt{3}\sin x-\cos x+2)\right).$$

13. Найдите множество значений функции $y=\frac{3x}{|x|}+2^{|x|}$, если $x\geqslant-2$.

В этом варианте задачи, в отличие от предыдущих, формулу для данной функции не удается представить в виде такой последовательности функций, по которой сразу вычислялась бы ее область значений.

Решение.

1. $y=\frac{3x}{|x|}+2^{|x|}=\begin{cases}3+2^x, & x>0,\\ -3+2^{-x}, & -2\leq x<0.\end{cases}$

2. Рассмотрим два случая:

а) $x>0$:
$E(2^x)=(2^0;\infty)=(1;\infty)\Rightarrow E(3+2^x)=(3+1;\infty)=(4;\infty)$;

б) $-2\leq x<0$:
$E(2^{-x})=(2^0;2^2]=(1;4]$
$\Rightarrow E(-3+2^{-x})=(-3+1;-3+4]=(-2;1]$.
$\Rightarrow E(y)=(-2;1]\cup(4;\infty)$.

Ответ: $(-2;1]\cup(4;\infty)$.

Комментарий

А. Решая эту задачу, мы были вынуждены рассмотреть два случая:

$$x>0 \text{ и } -2\leqslant x<0.$$

И это не случайно. Область определения данной функции, из-за выколотой точки 0 в ней, оказалась состоящей из двух независимых частей, лежащих справа и слева от этой точки. Как мы увидели позже, и область ее значений также оказалась состоящей из двух частей.

Так что ***перебор случаев*** — в этой задаче мера вынужденная, а не дефект метода нашего решения.

Б. Что же касается разницы в монотонности функций

$$2^x \text{ и } 2^{-x},$$

то мы в решении ее учли, причем учли правильно. И вряд ли нужно дополнительно в тексте решения объяснять экзаменатору, что мы воспользовались известными свойствами этих функций.

14. Найдите множество значений функции $y=\dfrac{5x}{|x|}+3^{|x|}$,

если $x\geqslant-1$.

15. Найдите множество значений функции $y=3^{|x|}-\dfrac{4x}{|x|}$,

если $x\leqslant1$.

2.2. Задание С2, 2003 г.

1. **Демоверсия.** При каких значениях параметра n уравнение $15\cdot10^x-20=n-n\cdot10^{x+1}$ не имеет корней?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, можно попросту решить данное уравнение, ну или хотя бы попробовать решить.

Решение.

1. $15\cdot10^x-20=n-n\cdot10^{x+1}$

$\Leftrightarrow 15\cdot10^x+10n\cdot10^x=n+20 \Leftrightarrow 10^x=\dfrac{n+20}{15+10n}$.

2. $E(10^x)=(0;\infty)$, поэтому требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда:

а) либо $\dfrac{n+20}{15+10n}\leqslant0 \Leftrightarrow \dfrac{n+20}{n+1{,}5}\leqslant0 \Leftrightarrow -20\leqslant n<-1{,}5$;

б) либо $\dfrac{n+20}{15+10n}$ — не имеет смысла

$\Leftrightarrow 15+10n=0 \Leftrightarrow n=-1{,}5$.

Ответ: $-20\leqslant n\leqslant-1{,}5$.

Комментарий

А. На вопрос, когда уравнение $10^x=\dfrac{n+20}{15+10n}$ (относительно x) не имеет решений, хочется дать естественный ответ: когда его правая часть не попадает в область значений левой. Однако при этом необходимо хорошо себе представлять, что, в частности, под последнюю формулировку подпадает и ситуация, когда правая часть не принимает никакого значения вообще, т.е. попросту *не имеет смысла*.

Нечеткость в этом вопросе может в данном случае привести к потере в ответе значения $n=-1{,}5$.

Б. Для решения задачи можно было поступить и принципиально иначе. Например, выразить не x через n, а наоборот, n через x:

$$15\cdot10^x-20=n-n\cdot10^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{15\cdot10^x-20}{1-10^{x+1}}.$$

Тогда для ответа на поставленный вопрос достаточно потребовать, чтобы значение параметра n не попало в область значений правой части полученного уравнения, которую можно преобразовать ***выделением целой части***

$$f(x)=\frac{15\cdot 10^x-20}{1-10^{x+1}}=\frac{1{,}5\cdot 10^{x+1}-20}{1-10^{x+1}}=\frac{-1{,}5\cdot(1-10^{x+1})-20+1{,}5}{1-10^{x+1}}$$
$$=-1{,}5+\frac{18{,}5}{10^{x+1}-1}$$

(кстати, здесь целая часть оказалась равной нецелому числу $-1{,}5$).

Для нахождения же области значений последнего выражения можно, считая его функцией

$$g(t)=-1{,}5+\frac{18{,}5}{t-1},\ \text{где}\ t=10^{x+1}>0,$$

исследовать ее отдельно на двух множествах

$$0<t<1 \ \text{и}\ t>1,$$

на каждом из которых она убывает: в первом случае получится область $(-\infty;-20)$, а во втором — $(-1{,}5;\infty)$.

Конечно, указанный подход в данной задаче не так удобен, как использованный в нашем решении, но кто знает, какой подход будет удобнее в другой задаче?

2. Найдите все значения p, при которых уравнение
$4\sin x+9=p(1+\operatorname{ctg}^2 x)$
имеет хотя бы один корень.

Перенесем обе части исходного уравнения в одну сторону, скажем влево, и рассмотрим левую часть полученного уравнения как функцию

$$F(s)=4s+9-\frac{p}{s^2}$$

переменной

$$s=\sin x\in[-1;1],$$

зависящую от параметра p. Тогда задача сведется к нахождению таких значений p, для которых функция F имеет на отрезке $[-1;1]$ хотя бы один нуль.

Возьмем производную

$$F'(s)=4-\frac{-2p}{s^3}\sim\frac{s^3-(-p/2)}{s^3}\sim\frac{s-\sqrt[3]{-p/2}}{s},\ \text{т.к.}\ s^3-t^3\sim s-t.$$

Итак, производная F' меняет знак в точках

$$s=-\sqrt[3]{p/2},\ 0,$$

расположенных на оси в некотором порядке, который зависит от знака параметра p.

Разберем два случая:

- если $p\leqslant 0$, то функция F не имеет нулей, т.к. она просто положительна;
- если же $p>0$, то точки перечислены выше в порядке их возрастания, и тогда исследование функции зависит от того, попадает или нет первая из них в отрезок $[-1;1]$, т.е. какое из неравенств выполнено: $p\leqslant 2$ или $p>2$.

Понятно, что решение доводится до конца, но исследование, похоже, слишком утомительно, и прежде всего из-за зависимости самой функции от параметра. Стоит попробовать избавиться от этой зависимости.

Если уравнение сразу умножить на знаменатель $\sin^2 x$ (разумеется, не забыв, что и после умножения он не должен равняться нулю), то оно примет вид

$$4\sin^3 x+9\sin^2 x=p,$$

а поставленный в задаче вопрос зазвучит так: какие значения p попадают в область значений функции

$$f(s)=4s^3+9s^2\ \text{при}\ \begin{cases}-1\leqslant s\leqslant 1\\ s\neq 0\end{cases}?$$

Получение ответа на такой вопрос представляется уже вполне реальным.

Р е ш е н и е .

1. $4\sin x + 9 = p(1+\mathrm{ctg}^2 x)$

$\Leftrightarrow 4s+9=\dfrac{p}{s^2}$, где $s=\sin x$, ($\Rightarrow p\neq 0$, иначе $s=-\dfrac{9}{4}<-1$)

$\Leftrightarrow 4s^3+9s^2=p\neq 0$ ($\Rightarrow s\neq 0$, иначе $p=4s^3+9s^2=0$).

2. $f(s)=4s^3+9s^2$, где $s\in[-1;1]$:

а) $f'(s)=12s^2+18s\sim s(s+1{,}5)\sim s$ (т.к. $s+1{,}5>0$);

б) $f'(s)=0\Leftrightarrow s=0$,

в) $E(f)$:

- $f(1)=4+9=13$,
- $f(-1)=-4+9=5$,
- $f(0)=0$,
- $f_{наиб}=13$, $f_{наим}=0$,
- $E(f)=[0,\ 13]$.

3. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$\begin{cases} p\in E(f)\\ p\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leqslant p\leqslant 13\\ p\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<p\leqslant 13$.

О т в е т : $0<p\leqslant 13$.

Комментарий

А. Решая эту задачу, легко сделать следующую, весьма и весьма соблазнительную логическую ошибку: если продолжить начатое в решении преобразование уравнения

$$4s+9=\frac{p}{s^2}\Leftrightarrow\begin{cases}4s^3+9s^2=p\\ s\neq 0,\end{cases}$$

то в полученной системе из неравенства $s\neq 0$ можно сразу получить

$$p=4s^3+9s^2\neq 4\cdot 0^3+9\cdot 0^2=0\Rightarrow p\neq 0.$$

Как будто бы все логично. Но оказывается, нет, не все, точнее — не логично. Вот, из равенства $s=0$ действительно следовало бы равенство

$$p=4s^3+9s^2=4\cdot 0^3+9\cdot 0^2=0\ \ \Rightarrow p=0,$$

а из неравенства — неравенство, наоборот, формально не следует (ведь нулевое значение функции p могло бы приниматься еще и при другом значении s, отличном от нуля).

Чтобы все же вывести это следствие в решении задачи, нам понадобилась более детальная информация о возможных значениях переменной s. Фактически мы заметили, что при условии

$$p=4s^3+9s^2=4s^2\left(s+\frac{9}{4}\right)$$

неравенства

$$s\neq 0 \text{ и } p\neq 0$$

равносильны. Поэтому запретить нулевое значение s — это то же самое, что запретить нулевое значение p, после чего уже рассуждение становится гораздо проще.

Б. Другой вариант решения той же задачи, логически попроще, но технически посложнее, состоит в исследовании *области значений функции*

$$f(s)=4s^3+9s^2$$

на том же отрезке, но уже сразу с выколотой точкой

$$s\in[-1;0)\cup(0;1].$$

На каждом из двух промежутков $[-1;0)$ и $(0;1]$ производная

$$f'(s)=12s(s+1{,}5)$$

знакопостоянна, и функция f монотонна. А множества ее значений на этих промежутках, соответственно, равны

$$\big(f(0);f(-1)\big]=(0;5] \text{ и } \big(f(0);f(1)\big]=(0;13].$$

Отсюда окончательно находим область значений рассматриваемой функции

$$E(f)=(0{,}5]\cup(0{,}13]=(0{,}13].$$

3. Найдите все значения p, при которых уравнение $7-2\cos x = p(1+\operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

4. Найдите все значения p, при которых уравнение $3-2\cos x = p(1+\operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

5. При каких значениях p уравнение $\cos 2x + \dfrac{p}{\sin x} = -7$ имеет решения?

6. При каких значениях p уравнение $3\cos 2x + \dfrac{2p}{\sin x} = -17$ имеет решения?

7. Найдите все значения p, при которых уравнение $4\cos^3 x + p = 7\cos 2x$ не имеет корней.

8. Найдите все значения p, при которых уравнение $4\sin^3 x = p - 3\cos 2x$ не имеет корней.

2.3. Задание С2, 2004 г.

1. **Демоверсия.** Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

Приведенное задание, по своей некорректности, продолжает лучшие традиции некоторых предыдущих: понять его можно, только перебрав различные варианты толкования условия. Итак, попробуем *разобраться в тексте задания*.

После того как через данный прямоугольник провели описанное в задаче семейство всех прямых, каждая из которых

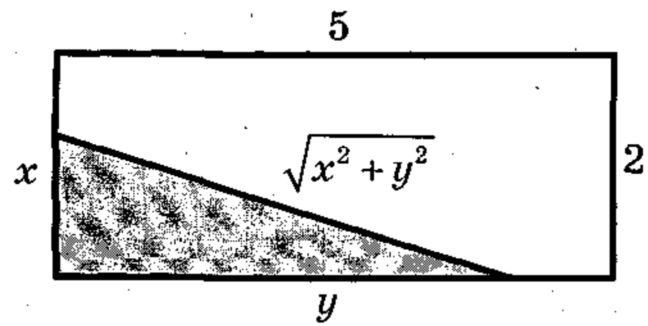
отсекла от него треугольник периметром 8, в прямоугольнике, возможно, еще и осталось живое место. И в задаче, по всей видимости, как раз требуется найти площадь этой самой *оставшейся части прямоугольника*. Да только, вот незадача, ищется почему-то ее *наименьшее значение*... В каком смысле наименьшее, в зависимости от чего?

Видимо, мы что-то тут не так поняли. Скорее всего, прямые еще не *провели* (хотя именно так сказано в условии), а только собираются провести. Тогда каждая прямая отсечет от прямоугольника свой треугольник, который задаст свою оставшуюся часть прямоугольника. А значит, можно будет поискать и наименьшее возможное значение площади оставшейся части.

Теперь понятно: из всех описанных в задаче прямых нужно выбрать ту, которая отсекает от прямоугольника треугольник наибольшей площади.

Р е ш е н и е.

1. x и y — стороны треугольника Δ:



$$P_\Delta = x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 8$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 8 - x - y \Rightarrow x^2+y^2 = 8^2 - 2\cdot 8(x+y) + (x+y)^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2 = 64 - 16x - 16y + x^2 + 2xy + y^2$$
$$\Rightarrow 2xy - 16y = 16x - 64 \Rightarrow y = \frac{16x-64}{2x-16} = \frac{8(x-4)}{x-8}.$$

2. $S_{\vartriangle} = \dfrac{1}{2}xy = \dfrac{1}{2}x \cdot \dfrac{8(x-4)}{x-8} = \dfrac{4x(x-4)}{x-8}$

$= \dfrac{4(x^2-4x)}{x-8} = S(x)$ при $0 < x \leqslant 2$:

а) $S'(x) = \left(\dfrac{4(x^2-4x)}{x-8}\right)' = 4 \cdot \dfrac{(x^2-4x)' \cdot (x-8) - (x^2-4x) \cdot (x-8)'}{(x-8)^2}$

$= 4 \cdot \dfrac{(2x-4)(x-8) - (x^2-4x)}{(x-8)^2} \sim 2x^2 - 20x + 32 - x^2 + 4x$

$= x^2 - 16x + 32 = (x - x_1)(x - x_2)$,

где $x_{1,2} = 8 \pm 4\sqrt{2}$, $8 - 4\sqrt{2}$ $(> 8 - 4 \cdot 1{,}5 = 2)$,

~ 1,

б) $S'(x) > 0$, $\Rightarrow S$ — возрастает,

в) $S_{наиб} = S(2) = \dfrac{4 \cdot 2(2-4)}{2-8} = \dfrac{8}{3}$.

3. $x = 2$:

$y = \dfrac{8(2-4)}{2-8} = \dfrac{8}{3} < 5$.

4. $S_{иском} = S_{прямоуг} - S_{наиб} = 2 \cdot 5 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{22}{3}$.

Ответ: $\dfrac{22}{3}$.

Комментарий

А. В связи с приведенным решением возникла еще одна неясность в формулировке задачи.

Точка, через которую проводится прямая, отсекающая от прямоугольника треугольник, по условию должна лежать *на его меньшей стороне.* У нас же оказалось, что эта точка совпала непосредственно с вершиной прямоугольника.

При этом не совсем ясно, можно ли считать, что вершина прямоугольника лежит на той его стороне, концом которой она служит. Если да, то мы решили задачу правильно. А если нет, то наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника в действительности не принимается вовсе, т.е. его просто нет. Но тогда и мы, записав в ответе вполне определенное число, решили задачу неправильно!

Хорошо, что обсуждаемый вариант задачи — всего лишь демонстрационный. Иначе что было бы делать выпускникам, если бы такое случилось на экзамене?

Б. Существенным, причем довольно тонким, моментом решения следует признать проверку того, что в случае

$$x = 2$$

выполнено двойное неравенство

$$0 < y \leqslant 5,$$

без которого описанное в задаче построение было бы невозможным. Действительно, если это неравенство не выполнено, то прямая либо отсекает от прямоугольника четырехугольник вместо треугольника либо вообще ничего от него не отсекает. Отсутствие такой проверки является самой настоящей логической ошибкой, которую делают практически все школьники (и не только).

У читателя, возможно, возникнет недоумение: а разве доказанное в нашем решении равенство

$$S_{наиб} = S(2)$$

уже само по себе не доказывает, что наибольшее значение функции $S(x)$ или, что то же, площади отсекаемого треугольника, равно $S(2)$? Что наибольшее значение функции — да, действительно доказывает, а что наибольшее значение площади — как раз нет.

Дело в том, что значение указанной функции только тогда соответствует значению реальной площади треугольника, когда выполнены все необходимые ограничения на параметры x и y. Поэтому, пока эти ограничения не проверены, можно гарантировать лишь то, что при выполнении условий задачи площадь треугольника не может превышать число $S(2)$, и больше ничего.

В. Можно было заранее, с самого начала, полностью выяснить, при каких значениях $0<x\leqslant 2$ реализуется описанная в задаче конфигурация. Она предполагает выполнение двойного неравенства

$$0<y\leqslant 5 \Leftrightarrow 0<\frac{8(x-4)}{x-8}\leqslant 5 \Leftrightarrow 8(x-4)\geqslant 5(x-8) \Leftrightarrow 3x+8\geqslant 0\,,$$

но последнее, а с ним и первое, справедливо при всех рассматриваемых значениях x.

Г. В решении задачи нам понадобилось доказать, что корни квадратного трехчлена $f(x)=x^2-16x+32$ лежат на числовой оси правее точки 2.

- Для этого пришлось установить неравенство $8-4\sqrt{2}>2$, которое мы доказали с помощью *цепочки* оценок.
- Обычно же это делают более громоздко, проводя ***цепочку сравнений***:

$$8-4\sqrt{2}\vee 2 \Leftrightarrow 6\vee 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 3\vee 2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 9\vee 8 \text{ — верно, когда } \vee \text{ есть } >,$$
$$\Rightarrow 8-4\sqrt{2}>2\,.$$

- Однако арифметически еще гораздо проще было бы проверить, что число 2 лежит не между корнями (а тогда, конечно же, слева, а не справа от них). Для этого достаточно установить, что значение функции f в точке 2 положительно, т.е. выполнено неравенство

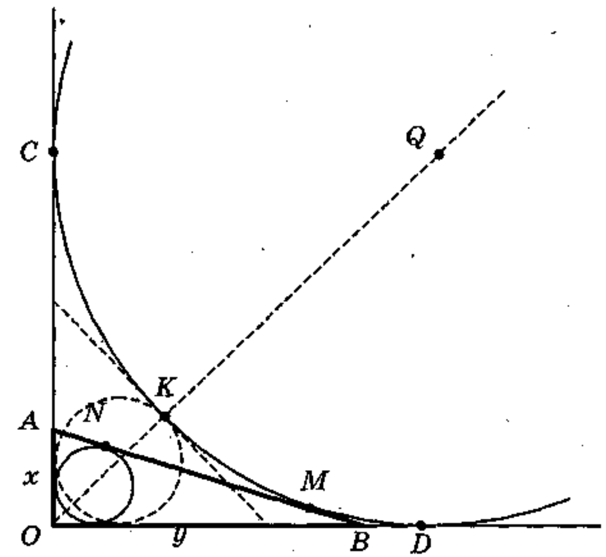
$$f(2)=2^2-16\cdot 2+32=4>0\,.$$

Таким образом, свойства квадратного трехчлена иногда позволяют даже и упрощать выкладки.

Д. Задача допускает решение и полным ***сведением к планиметрии***, основанным на следующих двух идеях.

- Все треугольники AOB фиксированного периметра, отсекаемые от данного угла COD, касаются некоторой фиксированной окружности с центром Q, вписанной в данный угол, но *вневписанной* по отношению к каждому из этих треугольников. Действительно, на рисунке, пользуясь свойством касательных, проведенных из одной точки, имеем

$$AM=AC\,,\ BM=BD\,,\ OC=OD$$
$$\Rightarrow P_{OAB}=OA+OB+AB=(OA+AM)+(OB+BM)$$
$$=OC+OD=2OC\,,$$



поэтому периметр треугольника AOB постоянен тогда и только тогда, когда постоянна длина касательной OC, иными словами, когда постоянен центр Q вневписанной окружности.

- Площадь S треугольника AOB фиксированного полупериметра p тем больше, чем больше радиус r вписанной в него окружности, т.к.

$$S=pr\,.$$

В частности эта площадь максимальна, когда вписанная окружность касается вневписанной, т.е. когда точки M и N сливаются в одну точку K. Но пока выполнено неравенство

$$x<y,$$

с увеличением радиуса вписанной окружности увеличивается и величина x.

В нашем случае:

- угол AOB — прямой, что облегчает выражение периметра треугольника AOB через его катеты,
- периметр треугольника AOB равен 8, следовательно, радиус вневписанной окружности равен 4,
- максимальное значение площади треугольника AOB, при отсутствии искусственных ограничений на переменную x, достигалось бы только, когда

$$x=y \Rightarrow x+x+\sqrt{x^2+x^2}=8 \Rightarrow x\left(2+\sqrt{2}\right)=8$$

$$\Rightarrow x=\frac{8}{2+\sqrt{2}}=\frac{8\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=4\left(2-\sqrt{2}\right)$$

(кстати, последнее значение совпадает с найденной ранее точкой экстремума функции $S(x)$),

- в силу ограничения $x\leqslant 2$, наибольшее значение площади треугольника AOB достигается при $x=2$.

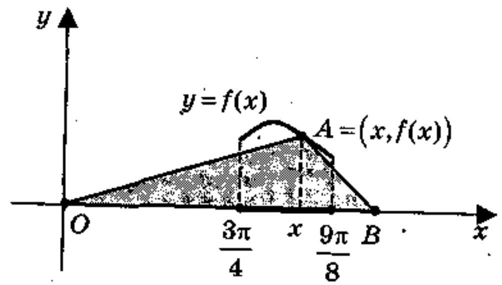
Таким образом, использование геометрических идей позволило решить ту же задачу почти без вычислений.

2. Точка A лежит на графике функции $y=f(x)$, точка B — на оси Ox, и ее абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A. Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB, где точка O — начало координат и

$$f(x)=\sqrt{7+3\sin x-(3x+1)\cos x},$$

$$\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{9\pi}{8}.$$

Решение.



1. $S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot f(x)\cdot 4f(x)=2\left(f(x)\right)^2$

$=2\left(7+3\sin x-(3x+1)\cos x\right)=S(x)$, где $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{9\pi}{8}$:

а) $S'(x)=2\left(7+3\sin x-(3x+1)\cos x\right)'$
$=2\left(3\cos x-3\cos x+(3x+1)\sin x\right)=2\left(3x+1\right)\sin x$
$\sim\sin x$, т.к. $3x+1>0$,

б) $S'(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi$, причем в точке π производная меняет знак с плюса на минус.

2. $S_{наиб}=S(\pi)=2\left(7+(3\pi+1)\right)=6\pi+16$.

Ответ: $6\pi+16$.

Комментарий

А. В данной задаче максимум функции f оказывается тесно связанным с максимумом функции S. Однако дифференцировать функцию f вместо функции S — не только труднее из-за наличия в формуле для нее знака корня, но и математически безграмотно (если только перед этим не объяснить, какая между ними связь и почему их точки максимума совпадают).

Тем не менее, многие школьники, поняв, что решение задачи предполагает ***использование производной***, и увидев функцию, заданную формулой, сразу же ее дифференцируют.

забыв обо всем на свете (в частности, и о том, чту именно спрашивается в задаче).

Б. Еще один довольно скользкий вопрос возникает в связи с самой постановкой рассматриваемой задачи.

Дело в том, что когда пишут

$$f(x)=\sqrt{7+3\sin x-(3x+1)\cos x}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{9\pi}{8},$$

то, конечно, имеют в виду, что после формулы для вычисления значений функции указана область ее определения — функции, а не формулы. Это особенно важно, если области определения у них не одинаковы. Так, например:

- запись $f(x)=\sqrt{3-x}\ ,\ x<1$,

  означает, что область определения функции f содержит не все вообще числа, не превосходящие 3, а только меньшие 1,
- запись $f(x)=\sqrt{3-x}\ ,\ 0<x<5$,

  просто некорректна, т.к. не все числа от 0 до 5 можно подставлять в приведенную для функции f формулу,
- запись $f(x)=\sqrt{3-x}$

  корректна, хотя область определения функции f явно и не указана, — здесь подразумевается, что она совпадает с естественной областью определения данной формулы, т.е. с областью $x\leqslant 3$.

Поскольку в формулировке обсуждаемого задания применен именно описанный в первом примере оборот, возникает следующий вопрос: придерживается ли автор задачи стандартной точки зрения или он считает, что запись во втором из перечисленных трех примеров также корректна? Вопрос принципиальный, т.к. школьнику важно заранее, до сдачи работы на экзамене, знать, требуется или нет, по существу самого задания, проверять, что при всех значениях

$$\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{9\pi}{8}$$

данная формула принимает осмысленное значение.

Есть предположение (причем документально подтвержденное), что на реальном экзамене 2004 года отсутствие такой проверки в экзаменационной работе, к сожалению, влекло за собой снижение оценки.

В. Надо ли, решая задачу, специально пояснять, что в формуле для площади треугольника AOB

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)\cdot 4f(x)$$

величины $f(x)$ и $4f(x)$ положительны, или это и так ясно?

По всей видимости, не надо, т.к.:

- факт выписывания нами этой формулы в таком виде говорит сам за себя — вместо высоты и основания треугольника следует подставить именно выражения $f(x)$ и $4f(x)$ соответственно (если бы было сомнение в правомерности такой подстановки, мы бы, из осторожности, взяли эти величины по модулю);
- судя по данной в условии формуле для функции (равной корню из чего-то), она уже принимает неотрицательные значения, так что модуль от этой величины брать просто нелепо;
- наконец, непосредственно в тексте условия задачи сам автор дает нам понять, что обе величины положительны. Иначе, как он мог, описывая точку B, говорить, что *ее абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A*? Разве можно сказать, например, что число -4 в четыре раза больше числа 1 (когда первое на самом деле не больше, а меньше второго) или что число 4×0 в четыре раза больше числа 0 (когда они на самом деле равны друг другу)?

Впрочем, на экзамене лучше такие нюансы в тексте решения демонстрировать явно. Т.е. в данном случае безопаснее было бы непосредственно после применения указанной формулы для площади все-таки добавить пояснение типа:

$$\text{т.к. } f(x)\geqslant 0 .$$

Действительно, даже при условии, что мы сейчас правы и никакого пояснения можно не писать, беды в таком добавлении все равно не будет. Гораздо хуже будет, если проверяющий снизит оценку за отсутствие пояснений. Тогда отстаивать свою точку зрения придется уже на апелляции. А это дело хлопотное, и еще не факт, что оно удастся. Слишком риск велик!

3. Точка A лежит на графике функции $y=f(x)$, точка B — на оси Ox, и ее абсцисса в два раза больше ординаты точки A. Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB, где точка O — начало координат и
$f(x)=\sqrt{(7x+3)\sin x+7\cos x+8}$, $\frac{\pi}{5}\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{5}$.

4. Точка A лежит на графике функции $y=f(x)$, точка B — на оси Ox, и ее абсцисса в два раза больше ординаты точки A. Найдите наименьшее значение площади треугольника AOB, где точка O — начало координат и
$f(x)=\sqrt{6x+3\sin 2x-13\sin x+17}$, $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{6\pi}{7}$.

5. Найдите наибольшее значение площади треугольника OPK, где O — начало координат, P — точка на графике функции $y=64x^5e^{6-4x}+\frac{5}{x}$, $0{,}7\leqslant x\leqslant 2$, а K — точка на оси Ox, абсцисса которой равна абсциссе точки P.

6. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и диагональю OP, где O — начало координат, а P — точка на графике функции $y=30x^2e^{3-6x}+\frac{6}{x}$, $0{,}3\leqslant x\leqslant 2$.

7. Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю OM, где O — начало координат, а M — точка на графике функции $y=1-3\ln(0{,}25x-2)$, $9\leqslant x\leqslant 11{,}5$.

2.4. Задание С3, 2002 г.

1. **Демоверсия.** При каком $x\in\{1,2,3,\ldots,98,99\}$ значение выражения
$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$
ближе всего к 73?

Можно заметить, что в данном выражении во всех числителях и во всех знаменателях участвуют только две устойчивых комбинации
$$x \text{ и } x+2,$$
кстати, положительных (правда, только при данном в задаче ограничении на x). Так что квадратные корни из них имеет смысл обозначить новыми буквами, после чего выражение будет выглядеть существенно проще.

Решение.

1. $x\in\{1,2,3,\ldots,98,99\}$:
$$f(x)=\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$
$$=\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right):\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$
$$=\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)},$$
где $a=\sqrt{x+2}$, $b=\sqrt{x}$, причем $a>b>0$,
$$=\frac{a\left(a^2-b^2\right)}{\left(a^2-2ab+b^2\right)(a+b)}=\frac{a(a-b)(a+b)}{(a-b)^2(a+b)}=\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{x+2+\sqrt{(x+2)x}}{(x+2)-x}=\frac{x+2+\sqrt{x^2+2x}}{2}.$$

2. $x^2 < x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

$\Rightarrow x+1 = \dfrac{x+2+x}{2} < f(x) = \dfrac{x+2+\sqrt{x^2+2x}}{2} < \dfrac{x+2+x+1}{2} = x+1{,}5$

$\Rightarrow x+1 < f(x) < x+1{,}5$.

3. Рассмотрим три случая:

а) $x = 72$:
$73 < f(x) = f(72) < 73{,}5$
$\Rightarrow 0 < f(x) - 73 < 0{,}5 \Rightarrow |f(x) - 73| < 0{,}5$;

б) $x < 72$:
$f(x) \leqslant f(71) < 72{,}5$
$\Rightarrow f(x) - 73 < -0{,}5 \Rightarrow |f(x) - 73| > 0{,}5$;

в) $x > 72$:
$f(x) \geqslant f(73) > 74$
$\Rightarrow f(x) - 73 > 1 \Rightarrow |f(x) - 73| > 1$.

О т в е т.: 72.

Комментарий

В решении доказано, что данная функция удовлетворяет условию

$$f(x) \in (x+1; x+1{,}5),\ x \in \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}.$$

Из всех перечисленных здесь интервалов ближайшим к числу 73 является интервал $(73; 73{,}5)$, который получается при $x = 72$,

более точно:

- любая его точка лежит к числу 73 ближе, чем на 0,5.
- любая точка любого из остальных интервалов удалена от числа 73 дальше, чем на 0,5.

Таким образом, точка $f(72)$ — ближайшая к числу 73. Строгое же обоснование полученного вывода проведено *перебором случаев* в пункте 3 предложенного решения.

2. При каком целом положительном x значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49}$$ ближе всего к 0,7?

Как и в демоверсии, заданное выражение содержит устойчивые комбинации, которых здесь набирается целых четыре

$$x \pm 3 \text{ и } x \pm 7.$$

Однако для того чтобы упростить это выражение целиком, желательно заранее знать, что каждая из этих комбинаций принимает только неотрицательные значения.

Р е ш е н и е.

1. $x \in \mathbb{N}$ $(\Rightarrow x+3 > 0)$:

$$F(x) = \sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49}$$

$$= \sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{(x-3)\sqrt{(x+3)(x-7)}-(x-3)(x+3)}{(x+7)(x-7)-(x+7)\sqrt{(x+3)(x-7)}}$$

$\left(\Rightarrow x \geqslant 7\text{, т.к. } \dfrac{x-7}{x+3} \geqslant 0\right)$

$$= \frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{x-3}{x+7} \cdot \frac{\sqrt{x-7}\sqrt{x+3}-(x+3)}{(x-7)-\sqrt{x-7}\sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{x-3}{x+7} \cdot \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-7}} \cdot \frac{\sqrt{x-7}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-7}-\sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{x-3}{x+7} = 1 - \frac{10}{x+7} = f(x).$$

2. $x \geqslant 7$: $f_1(x) = x+7$ — положительна и возрастает

$\Rightarrow f_2(x) = \dfrac{10}{x+7}$ — убывает

$\Rightarrow f_3(x) = -\dfrac{10}{x+7}$ — возрастает

$\Rightarrow f(x) = 1 - \dfrac{10}{x+7}$ — возрастает.

3. Рассмотрим три случая:

а) $x=26\ (\in D(F))$:

$$0{,}7-F(x)=0{,}7-f(26)=0{,}7-\left(1-\frac{10}{26+7}\right)$$

$$=\frac{10}{33}-\frac{3}{10}=\frac{100-99}{330}=\frac{1}{330};$$

б) $26>x\in D(F)$:

$$0{,}7-F(x)>0{,}7-f(26)=\frac{1}{330};$$

в) $27\leqslant x\in D(F)$:

$$F(x)-0{,}7\geqslant f(27)-0{,}7=\left(1-\frac{10}{27+7}\right)-0{,}7=\frac{3}{10}-\frac{10}{34}$$

$$=\frac{102-100}{340}=\frac{1}{170}>\frac{1}{330}.$$

Ответ: $x=26$.

Комментарий

А. Читателю могло показаться, что упоминания области определения $D(F)$ заданного выражения разбросаны по тексту нашего решения несколько хаотично. Внесем ясность:

- естественные области определения функций

$$F(x)=\sqrt{\frac{x-7}{x+3}}\cdot\frac{9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49}\ \text{ и }\ f(x)=1-\frac{10}{x+7},$$

судя по их формулам, различны — точнее, вторая область существенно шире первой,

- область определения функции F в решении не искалась просто за ненадобностью (хотя можно было бы ее явно и указать),
- однако почленное извлечение корня из произведения $\sqrt{x^2-4x-21}=\sqrt{(x+3)(x-7)}=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-7}$

предполагает неотрицательность каждого из его сомножителей, но первый из них заведомо положителен (т.к. переменная x принимает только натуральные значения), а второй, в силу неотрицательности произведения, — неотрицателен,

- чтобы доказать, что значение $F(26)$ — ближайшее к числу $0{,}7$, необходимо, кроме всего прочего, проверить условие

$$26\in D(F),$$

поскольку оно не гарантируется существованием числа $f(26)$, заменившим исследуемое значение в пункте 3 а),

- наконец, условие

$$x\in D(F),$$

было добавлено в пунктах 3 б) и 3 в), поскольку без него можно было бы подумать, что функция F определена вообще при всех

$$x<26\ \text{ и }\ x\geqslant 27$$

(последнее-то, кстати, верно, но и его доказывать ни к чему).

Б. Возрастание функции f в пункте 2 решения можно было доказать и с помощью производной.

Однако если уж мы в предыдущем пункте догадались о ***выделении целой части*** в формуле, задающей *дробно-линейную* функцию f, то совершенно нелогично после этого дифференцировать эту функцию, поскольку ее возрастание становится и без того совершенно ясным.

В. В приведенном решении нет никаких объяснений того, откуда взялись числа 26 и 27.

С одной стороны, этот момент, с точки зрения логики, не влияет на математическую правильность решения и потому в объяснении не нуждается.

С другой стороны, конечно, ошибки не будет, если к решению (например, между пунктами 2 и 3) добавить следующий пункт, от которого, к тому же, логика решения станет естественнее и яснее:

$$f(x)=0{,}7 \Leftrightarrow 1-\frac{10}{x+7}=0{,}7 \Leftrightarrow 0{,}3=\frac{10}{x+7}$$

$$\Leftrightarrow x+7=\frac{10}{0{,}3}\left(=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x=26\frac{1}{3}\ldots$$

Г. Решение станет еще естественнее и еще яснее, если его завершающую часть, после добавления указанного фрагмента, оформить следующим образом:

$\ldots \Rightarrow F(26)<0{,}7<F(27)$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in D(F)}|F(x)-0{,}7|=\min\{0{,}7-F(26);F(27)-0{,}7\}=0{,}7-F(26)$,

т.к.

а) $0{,}7-F(26)=0{,}7-\left(1-\frac{10}{26+7}\right)=\frac{100-99}{330}=\frac{1}{330}$,

б) $F(27)-0{,}7=\left(1-\frac{10}{27+7}\right)-0{,}7=\frac{102-100}{340}=\frac{1}{170}>\frac{1}{330}$.

К сожалению, для такого компактного оформления решения понадобились удобные, но непривычные школьному глазу обозначения:

- $\min\limits_{x\in X} a(x)$ — *наименьшее значение* $a_{наим}$ функции $a(x)$, когда её аргумент x пробегает множество X,
- $\min\{a_1,\ldots,a_n\}$ — *наименьший элемент* множества $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$, т.е. просто наименьшее из чисел $a_1,\ldots,a_n$ (впрочем, не обязательно чисел).

3. При каком целом положительном x значение выражения
$\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\cdot\frac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9}$ ближе всего к 0,66?

4. При каком целом положительном x значение выражения
$\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}\cdot\frac{x^2+(2-x)\sqrt{x^2-3x-10}-4}{x^2-(x+5)\sqrt{x^2-3x-10}-25}$ ближе всего к $-0{,}7$?

5. При каких значениях a сумма
$\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$
равна 1 хотя бы при одном значении x?

Итак, в задаче спрашивается: при каких значениях a уравнение

$$\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=1$$

имеет хотя бы одно решение? Если в этом уравнении избавиться от логарифмов, то оно станет квадратным относительно $\cos^2 x$. Но ведь хорошо известно, что квадратное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, каковое требование как будто и представляет искомое ограничение на параметр a.

К сожалению, не все так просто:

- на параметр a нужно наложить еще и условие $0<a\neq 1$, поскольку он стоит в основании логарифма;
- неотрицательность дискриминанта, разумеется, необходима для наличия корней, но не достаточна. Нужно еще, чтобы хотя бы один из этих корней соответствовал реальному значению величины $\cos^2 x$, т.е. чтобы он принадлежал отрезку $[0;1]$ (в противном случае корни квадратного уравнения хотя и найдутся, но ни один из них не даст значений x, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению).

Р е ш е н и е.

1. $\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=1$
$\Leftrightarrow \log_a((c+1)(c+5))=\log_a a$, где $c=\cos^2 x\geqslant 0$,
$\Leftrightarrow (c+1)(c+5)=a$ $(\Rightarrow 0<a\neq 1$, т.к. $c\geqslant 0)$
$\Leftrightarrow c^2+6c+5=a \Leftrightarrow (c+3)^2-4=a$.

2. $E(\cos x)=[-1;1]$

$\Rightarrow E(c)=[0;1]\Rightarrow E(c+3)=[3;1+3]=[3;4]$

$\Rightarrow E\left((c+3)^2\right)=\left[3^2;4^2\right]=[9;16]$

$\Rightarrow E\left((c+3)^2-4\right)=[9-4;16-4]=[5;12]$.

3. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда $a\in[5;12]$.

Ответ: $5\leqslant a\leqslant 12$.

Комментарий

А. При решении задачи можно было ввести функцию

$$f(x)=\cos^4 x+6\cos^2 x+5$$

и искать область ее значений с ***использованием производной***. Конечно, работа сильно упростится, если это же выражение рассмотреть как функцию $g(t)=t^4+6t^2+5$ переменной $t=\cos x$, на отрезке $-1\leqslant t\leqslant 1$.

Далее, для нахождения области значений этой функции придется совершить следующие действия:

- найти производную данной функции,
- найти нули производной,
- отобрать те из них, которые принадлежат данному отрезку,
- вычислить значения функции в отобранных точках и на концах отрезка,
- выбрать наибольшее и наименьшее значения функции — это и будут концы искомого отрезка.

Одно лишь перечисление этих действий представляет собой достаточно утомительное занятие.

Б. Заметим, что прежнее же выражение для функции f, но рассматриваемое как функция $h(c)=c^2+6c+5$ переменной $c=\cos^2 x$, уже есть квадратный трехчлен, заданный, правда, не на всей числовой прямой, а только на отрезке $0\leqslant c\leqslant 1$.

Для нахождения области его значений без использования производной можно подключить полный арсенал школьных средств для исследования квадратичной функции, проделав следующее:

- найти абсциссу вершины параболы,
- разбить данный отрезок на промежутки возрастания и убывания функции,
- найти значения на концах этих промежутков,
- сформировать из этих значений искомый отрезок.

Мы же в нашем решении обошлись совсем элементарными средствами. По существу, всего лишь одним приемом — ***выделением полного квадрата*** в квадратном трехчлене, после чего исследование превратилось в приятное наблюдение за изменением области значений выражения при добавлении к нему очередной простейшей функции. Кстати, этот процесс можно было бы и несколько сократить, добавляя функции не по одной, а по нескольку штук, а то и все сразу.

В. Развивая предыдущую мысль, заметим, что один из способов сделать решение более наглядным и естественным состоит в том, чтобы привлечь ***графическую иллюстрацию***. С нее вообще часто бывает удобно начинать исследование задачи, особенно если не сразу понятно, как к ней подступиться.

Так, график функции h из левой части уравнения

$$c^2+6c+5=a$$

представляет собой параболу, которую можно изобразить, зная, что абсцисса ее вершины равна

$$c_0=-\frac{6}{2}=-3$$

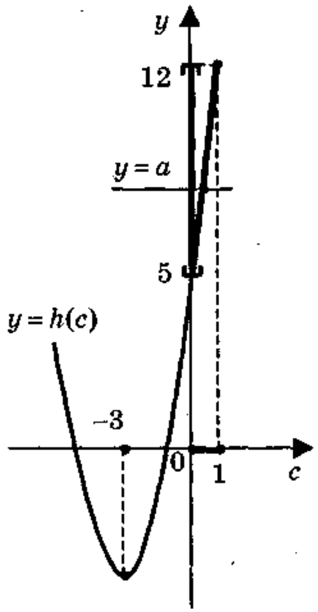
и что ее ветви направлены вверх. Тогда для ответа на вопрос, при каких значениях a, удовлетворяющих условию

$$1\neq a>0,$$

уравнение имеет решение, достаточно определить, какие горизонтальные прямые вида

$$y=a$$

пересекают ту часть графика функции h, которая лежит над отрезком $[0;1]$ оси абсцисс. При этом монотонность функции h на указанном отрезке уж и впрямь очевидна (из свойств параболы), а крайние точки искомого множества значений a можно найти, как значения этой функции в точках 0 и 1.



Г. Бывает, что школьники, не зная, как правильно найти область значений данной функции на данном отрезке, делают это путем простой подстановки в нее концов отрезка. Например, для нахождения области значений функции h на отрезке $[0;1]$ рассуждают так:

$$h(0)=5,\ h(1)=12 \Rightarrow E(h)=[5;12].$$

Как следует оценивать такое рассуждение? Не положительно: приведенный вывод логически неверен, поскольку в нем доказано лишь включение

$$E(h)\supset[5;12]$$

(действительно, вместе со значениями 5 и 12 область значений непрерывной функции h содержит и весь отрезок $[5;12]$), тогда как для доказательства равенства

$$E(h)=[5;12]$$

нужно получить еще и обратное включение

$$E(h)\subset[5;12].$$

И хотя оно в данном случае, в силу монотонности функции h, также выполнено, получить полный балл за решение с таким пробелом на экзамене, скорее всего, не удастся.

Д. Лобовой способ решения такой задачи состоит в следующем: вычислим *корни квадратного уравнения*

$$c^2+6c+5-a=0$$

прямо по известной формуле

$$c_{1,2}=-3\pm\sqrt{3^2-(5-a)}=-3\pm\sqrt{4+a}$$

и потребуем, чтобы хотя бы один из них принадлежал отрезку $[0;1]$, т.е. чтобы выполнялась совокупность двойных неравенств

$$0\leqslant-3\pm\sqrt{4+a}\leqslant1$$
$$\Leftrightarrow 0\leqslant-3+\sqrt{4+a}\leqslant1 \ (\text{т.к. } -3-\sqrt{4+a}<0)$$
$$\Leftrightarrow 3\leqslant\sqrt{4+a}\leqslant4 \Leftrightarrow 9\leqslant4+a\leqslant16 \Leftrightarrow 5\leqslant a\leqslant12.$$

Обычно исследование формулы корней квадратного трехчлена сопряжено с определенными трудностями, особенно существенными, когда в полученной формуле радикалы не исчезают. Но в данном случае эти трудности удалось преодолеть безболезненно.

6. При каких значениях a сумма $\log_a(\sin x+2)$ и $\log_a(\sin x+3)$ равна 1 хотя бы при одном значении x?

7. При каких значениях a сумма $\log_a \frac{3+2x^2}{1+x^2}$ и $\log_a \frac{5+4x^2}{1+x^2}$ будет больше единицы при всех x?

8. При каких значениях a сумма $\log_a \frac{4+3|x|}{1+|x|}$ и $\log_a \frac{6+5|x|}{1+|x|}$ будет больше единицы при всех x?

9. При каких значениях a сумма $\log_a \frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ и $\log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ не равна единице ни при каких значениях x?

10. При каких значениях a сумма $\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)$ и $\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+7\right)$ будет меньше единицы при всех допустимых значениях x?

11. При каких значениях a выражение $1+\sin x(3\sin x+a\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, достаточно приравнять данное выражение к нулю и найти все значения параметра, при которых полученное уравнение не имеет решений.

Решение.

1. $1+\sin x(3\sin x+a\cos x)=0$
$\Leftrightarrow 2+3\cdot(1-\cos 2x)+a\cdot\sin 2x=0 \Leftrightarrow 5=3\cos 2x-a\cdot\sin 2x$
$\Leftrightarrow 5=\sqrt{9+a^2}\left(\frac{3}{\sqrt{9+a^2}}\cos 2x-\frac{a}{\sqrt{9+a^2}}\sin 2x\right)$
$\Leftrightarrow 5=\sqrt{9+a^2}\cos(2x+\varphi)$, где $\varphi=\arcsin\frac{a}{\sqrt{9+a^2}}$.

2. $E(\cos(2x+\varphi))=[-1;1]$
$\Rightarrow E\left(\sqrt{9+a^2}\cos(2x+\varphi)\right)=\left[-\sqrt{9+a^2};\sqrt{9+a^2}\right]$.

3. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда $5\notin\left[-\sqrt{9+a^2};\sqrt{9+a^2}\right]$
$\Leftrightarrow 5>\sqrt{9+a^2} \Leftrightarrow 25>9+a^2 \Leftrightarrow 16>a^2 \Leftrightarrow -4<a<4$

Ответ: $-4<a<4$.

Комментарий

А. Для упрощения правой части уравнения в решении задачи мы применили ***метод вспомогательного угла.***

С его помощью линейная комбинация

$$3\cos 2x-a\sin 2x$$

синуса и косинуса (одного и того же аргумента) свертывается в один косинус (как, впрочем, и в один синус)

$$\sqrt{9+a^2}\cos(2x+\varphi),$$

но со специально подобранной амплитудой

$$\sqrt{3^2+a^2}=\sqrt{9+a^2}$$

и со сдвигом аргумента на специально подобранный угол φ, называемый *вспомогательным* и определяемый системой

$$\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{9+a^2}}\\ \cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{9+a^2}}\end{cases}$$

(существование такого угла обеспечивается тем, что сумма квадратов ее правых частей равна 1).

Заметим, что при попытке явного задания вспомогательного угла нельзя действовать наобум. Если бы правые части выписанной системы были положительными, то можно было бы задать этот угол как арксинус или как арккосинус соответствующего значения (а при необходимости — даже как арктангенс, все равно).

В рассматриваемом же случае его косинус действительно положителен, а вот синус имеет неопределенный знак. Поэтому если бы мы определили вспомогательный угол равенством

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{9+a^2}},$$

то он принадлежал бы отрезку $[0;\pi]$, а значит, его синус не мог бы быть отрицательным, что для нас нежелательно. Мы же в решении определили этот угол как арксинус, поэтому его косинус положителен, что как раз и требовалось.

Б. Для решения задачи можно было свести ее к ***однородному уравнению*** относительно двух переменных

$$s = \sin x \text{ и } c = \cos x,$$

которое, в принципе, сводится к уравнению от одной переменной

$$t = \frac{s}{c} = \operatorname{tg} x.$$

При таком подходе к задаче получилось бы следующее решение:

1. $1+\sin x(3\sin x + a\cos x) = 0$

   $\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin^2 x + a\sin x\cos x = 0$

   $\Leftrightarrow 4\sin^2 x + a\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

   ($\Rightarrow \cos x \neq 0$, иначе $\sin x = 0 = \cos x$)

   $\Leftrightarrow 4t^2 + at + 1 = 0$, где $t = \operatorname{tg} x$.

2. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда $D < 0$.

   $\Leftrightarrow a^2 - 4\cdot 4 < 0 \Leftrightarrow |a| < 4$.

Полученное решение оказалось даже проще приведенного ранее.

12. При каких значениях a выражение

$3+\cos x(a\cos x + 4\sin x)$

не равно нулю ни при каких значениях x?

13. При каких значениях a выражение

$3+\sin x(2\sin x + a\cos x)$

будет равно -1 хотя бы при одном значении x?

14. При каких значениях a выражение

$2+\cos x(5\cos x + a\sin x)$

будет равно 1 хотя бы при одном значении x?

15. При каких значениях a выражение $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}$

больше выражения $0{,}25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$

при всех допустимых значениях x?

Если записать описанное в условии задачи неравенство (призванное быть выполненным при всех допустимых значениях неизвестной), то от обеих его частей можно взять логарифм по основанию 4. Тогда неизвестная величина будет содержаться не иначе как в выражении

$$l = \log_4(1-x^2),$$

относительно которого само неравенство будет квадратным.

Решение.

1. $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4} > 0{,}25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$

   $\Leftrightarrow \log_4(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4} > \log_4 0{,}25^{1-|a|-\log_4(1-x^2)}$

   $\Leftrightarrow (l-a^4)l > (1-|a|-l)\cdot(-1)$, где $l = \log_4(1-x^2)$,

   $\Leftrightarrow l^2 - (a^4+1)l + (1-|a|) > 0$.

2. $E(l) = E(\log_4(1-x^2))$

   $= (-\infty;\log_4 1]$, т.к. $E(1-x^2) = (-\infty;1] \supset (0;1]$,

   $= (-\infty;0]$.

3. $f(l) = l^2 - (a^4+1)l + (1-|a|)$, $l \le 0$:

   а) l^2 — убывает,

б) $-\left(a^4+1\right)l$ — убывает (т.к. $a^4+1>0$),

в) $f(l)$ — убывает,

г) $f_{наим}=f(0)=1-|a|$.

4. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда $f_{наим}>0$.
$\Leftrightarrow 1-|a|>0 \Leftrightarrow |a|<1 \Leftrightarrow -1<a<1$.

Ответ: $-1<a<1$.

Комментарий

При беглом взгляде на записанное в решении задачи квадратное неравенство

$$l^2-\left(a^4+1\right)l+\left(1-|a|\right)>0$$

создается впечатление, что для его выполнения при всех значениях неизвестной l необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был отрицательным

$$\left(a^4+1\right)^2-4\left(1-|a|\right)<0:$$

- полученное неравенство восьмой степени относительно неизвестной $|a|$, похоже, не решается, каковой факт служит первым признаком того, что мы избрали неверный путь,
- сформулированное утверждение было бы верным, но только если бы указанная неизвестная принимала все вообще действительные значения — однако ведь в том-то и вся загвоздка, что она принимает не все, а только неотрицательные значения. Отрицательность дискриминанта в данном случае является лишь *достаточным* условием, но не необходимым.

Поэтому в приведенном решении мы, как и следовало, рассуждали точнее, а именно: записанное неравенство выполнено при всех значениях

$$l\leqslant 0$$

тогда и только тогда, когда все значения функции

$$f(l)=l^2-\left(a^4+1\right)l+\left(1-|a|\right),\ l\leqslant 0,$$

положительны, или, что то же, когда положительно ее наименьшее значение, совпадающее с числом

$$f(0)=1-|a|.$$

16. При каких значениях a выражение $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях x?

17. При каких значениях a выражение $(\sin x)^{\lg\sin x-a^2}$ больше выражения $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x)+\log_7 a}$ при всех допустимых значениях x?

18. При каких значениях a выражение $(\cos x)^{\log_3(\cos x)-|a|}$ больше выражения $3^{\log_9(1-\sin^2 x)+a(a-2)}$ при всех допустимых значениях x?

2.5. Задание С3, 2005 г.

1. **Демоверсия.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x}=-5y-15x+22\\ 25^{-2y-5x}+25=26\cdot 5^{-2y}\cdot 5^{-5x}.\end{cases}$$

Для данной демоверсии был взят вариант задачи С1 из комплекта заданий 2004 года. Не будем повторять здесь решение этой задачи, поскольку она уже решена в соответствующем разделе.

Однако, учитывая, что уровень задачи, похоже, повысился по сравнению с 2004 годом (была — С1, а стала — С3), советуем еще раз разобрать основные моменты ее решения, чтобы понять, как она предваряет (да и предваряет ли, кстати, вообще) реальную задачу 2005 года.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b=9^a+3^{2+a}-1$ и $c=3^{2-a}-9^{-a}-5$ меньше 9.

Обозначим через $\max\{b,c\}$ наибольшее из двух чисел b и c. Тогда требование задачи будет выражаться одним неравенством

$$\max\{b,c\}<9,$$

и первое, что в связи с ним приходит на ум, это попытаться проделать ровно то, что в нем предлагается:

- сначала выяснить, какое из чисел b или c является наибольшим (конечно, в зависимости от значения переменной a),
- затем потребовать, чтобы именно оно и было меньше 9.

В результате задача сведется к решению совокупности следующих двух систем

$$\begin{cases} b\geqslant c \\ b<9 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} b<c \\ c<9. \end{cases}$$

Здесь случай равенства

$$b=c$$

подключен к одному из неравенств (к первому, хотя можно было и ко второму). Впрочем, правомерность такого действия вызывает некоторое сомнение: разве существует *наибольшее* из двух *равных* чисел? И не правильнее ли было бы назвать это число как-то по-другому, например, просто *бо́льшим* из двух чисел? Ответ здесь, с точки зрения русского языка, очевиден — среди двух равных чисел:

- большего-то как раз и нет (какое из них больше другого?),
- любое годится в качестве наибольшего (т.е. самого большого, больше которого среди них уже нет).

Так что терминология в задаче совершенно корректная.

Однако чтобы выяснить, которое из двух данных чисел больше, придется решить, например, неравенство

$$b<c \Leftrightarrow 9^a+3^{2+a}-1<3^{2-a}-9^{-a}-5$$

$$\Leftrightarrow \left(9^a+9^{-a}\right)+9\left(3^a-3^{-a}\right)+4<0.$$

Это, конечно, в принципе возможно, но для решения потребуется сделать следующее:

- завести стандартную новую переменную

$$x=3^a-3^{-a}$$

  и выразить через нее первую сумму

$$9^a+9^{-a}=\left(3^a-3^{-a}\right)^2+2=x^2+2,$$

  получив квадратное неравенство

$$x^2+9x+6<0;$$

- найти корни $x_{1,2}$ соответствующего квадратного трехчлена, которые окажутся иррациональными, и записать двойное неравенство

$$x_1<3^a-3^{-a}<x_2;$$

- решить последнее неравенство, сводимое к системе из двух квадратных неравенств относительно переменной

$$y=3^a,$$

  правда, с заведомо сложными коэффициентами.

Да, перспектива не из приятных! Лучше поискать другой выход из создавшегося положения, например, постараться как-нибудь обойтись вообще без сравнения чисел b и c друг с другом. Оказывается, в данной задаче это можно сделать с помощью следующего *ключевого утверждения*

$$\max\{b,c\}<9 \Leftrightarrow \begin{cases} b<9 \\ c<9. \end{cases}$$

Догадаться до него, по правде сказать, нелегко, нужно сообразить. Зато уж теперь каждое из двух полученных неравенств

$$b<9 \Leftrightarrow 9^a+3^{2+a}-1<9 \text{ и } c<9 \Leftrightarrow 3^{2-a}-9^{-a}-5<9$$

(а с ними и система) легко решается как квадратное относительно неизвестной

$$y=3^a \text{ или } y=3^{-a}.$$

Впрочем, можно обойтись и одной заменой для обоих неравенств сразу.

Решение.
$\max\{b,c\}<9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b<9 \\ c<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^a+3^{2+a}-1<9 \\ 3^{2-a}-9^{-a}-5<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^a+9\cdot 3^a-10<0 \\ 9^{-a}-9\cdot 3^{-a}+14>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(3^a-1\right)\left(3^a+10\right)<0 \\ \left((3^a)^{-1}-2\right)\left((3^a)^{-1}-7\right)>0 \ (\Leftrightarrow \left(3^a-1/2\right)\left(3^a-1/7\right)>0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1/2<3^a<1 \\ 3^a<1/7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\log_3 2<a<0 \\ a<-\log_3 7. \end{array}\right.$$

Ответ: $a<-\log_3 7$, $-\log_3 2<a<0$.

Комментарий

А. Итак, мы воспользовались следующим утверждением: наибольшее из двух чисел меньше 9 тогда и только тогда, когда каждое из них меньше 9.

После того как оно уже сформулировано, доказать его не составляет никакого труда. Действительно:

- с одной стороны, если оба числа меньше 9, то и наибольшее из них — тоже,
- с другой стороны, если хотя бы одно из двух чисел больше или равно 9, то наибольшее из них — тем более.

По сути, доказательство этого утверждения состоит в его непосредственном произнесении поочередно то в одну, то в другую сторону. Надо ли было его доказывать в экзаменационной работе? Нет, на экзамене его не требовалось дополнительно ни доказывать, ни обосновывать, ни аргументировать: уж если школьник такое придумал, то ведь как-то он сам себе это объяснял!

Б. Разумеется, решение задачи можно было оформить и по-другому, разбив на следующие этапы:

- решить отдельно первое неравенство системы относительно неизвестной a;
- аналогично, решить второе неравенство;
- найти пересечение полученных множеств решений и записать его в ответ.

Приведем текст решения, который мог бы получиться в результате разбиения на такие этапы.

Решение.

1. $b<9$

$$\Leftrightarrow 9^a+3^{2+a}-1<9 \Leftrightarrow 9^a+9\cdot 3^a-10<0 \Leftrightarrow \left(3^a-1\right)\left(3^a+10\right)<0$$

$$\Leftrightarrow 3^a<1 \Leftrightarrow a<0.$$

2. $c<9$

$$\Leftrightarrow 3^{2-a}-9^{-a}-5<9 \Leftrightarrow 9^{-a}-9\cdot 3^{-a}+14>0 \Leftrightarrow \left(3^{-a}-2\right)\left(3^{-a}-7\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{-a}<2 \\ 3^{-a}>7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a<\log_3 2 \\ -a>\log_3 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>-\log_3 2 \\ a<-\log_3 7. \end{array}\right.$$

3. Наибольшее из чисел b и c меньше 9 тогда и только тогда, когда каждое из них меньше 9, т.е. когда

$$\begin{cases} b<9 \\ c<9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\log_3 2<a<0 \\ a<-\log_3 7. \end{array}\right.$$

Ответ: $a<-\log_3 7$, $-\log_3 2<a<0$.

В. Последний текст практически буквально совпадает с тем, что давался экспертам на экзамене. Это решение раздроблено, конечно, достаточно искусственно, что сделано исключительно для того, чтобы удобнее было оценивать отдельные его части в экзаменационных работах (которые, кстати, в них в основном только и присутствовали).

В упомянутом тексте для экспертов, в первых двух его пунктах, на самом деле, присутствовали еще и ***пояснения***:

- *пользуясь возрастанием функции* $y=3^x$,
- *т.к.* $3^a+10>0$,

считавшиеся необходимыми для полного решения (точнее, для полной оценки в 4 балла). На фоне ключевого, но принятого без доказательства, рассуждения из третьего пункта этого решения такие пояснения смотрятся особенно смешно и, вместе с тем, грустно. Ведь касаются они совершенно стандартных и свежепройденных школьниками свойств показательной функции, которые, в отличие от ключевого утверждения, действительно не нуждаются в пояснениях. Более того, если принять за основу тот уровень подробности, который они задают, то в тексте не хватает еще пары поясняющих фраз того же сорта:

- *пользуясь свойствами степеней* — при преобразовании степенных выражений в начале первых двух пунктов,
- *т.к.* $-\log_3 2<0$ — при объединении в третьем пункте ответов, полученных в предыдущих пунктах.

Почему же предложенные фразы не включены в текст решения? Они же касаются материала тех же старших классов. Скорее всего потому, что решение о том, какие моменты пояснять, а какие нет, принимается, не исходя из объективной математической необходимости, а в соответствии со вкусами отдельных методистов и педагогов, авторов учебников и учебных пособий, членов медальных и экспертных комиссий и т.п.

Нельзя не согласиться с тем, что когда учащийся впервые проходит соответствующий материал в школе, он и вправду нуждается в обосновании таких моментов. Но когда материал уже пройден и выпускник имеет возможность бегло использовать приобретенные им навыки, совершенно нелепо заставлять его комментировать каждый свой шаг, отвлекаясь от куда более существенных идей, действительно необходимых для решения задачи. Неужели на экзамене нельзя действовать по пройденным правилам свободно, не формулируя их заново в полном объеме и не доказывая всякий раз их правомерность?

Г. Отметим, что последний текст решения, как и большинство решений в настоящем пособии, основан на ***методе равносильных преобразований***. Кое-кто из экспертов, изучавших в свое время этот текст, засомневался в справедливости уже самого первого содержавшегося в нем утверждения

$$b<9 \Leftrightarrow 9^a+3^{2+a}-1<9,$$

объясняя свое сомнение тем, что, дескать, равносильность неравенств, по определению, означает совпадение множеств их решений, которого здесь якобы не наблюдается.

Так вот, заметим, прежде всего, что в обозначениях задачи, т.е. при условии, что выполнено равенство

$$b=9^a+3^{2+a}-1,$$

указанные два неравенства относительно переменной a все-таки равносильны.

Далее, *равносильность* неравенств или равенств, как и любых других высказываний (с переменными, с неизвестными или без них, все равно) — это общематематическое, точнее, логическое понятие, означающее справедливость *следствий* в обе стороны. Так, сформулированное выше ключевое утверждение содержит знак равносильности $\Leftrightarrow$. То же утверждение сформулировано в шаге 3 из обсуждаемого текста с помощью речевого оборота «тогда и только тогда, когда», который вполне можно заменить оборотом «если и только если» или даже «для того чтобы..., необходимо и достаточно чтобы...».

Наконец, равносильными могут быть также утверждения, не содержащие никаких неизвестных или переменных, и вообще, неалгебраической природы. Вот примеры таких равносильностей:

- *числовая функция нечетна тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно начала координат;*
- *четырехугольник есть квадрат, если и только если он есть одновременно и ромб, и прямоугольник,*
- *для того чтобы натуральное число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось одновременно и на 2, и на 3.*

Таким образом, совпадение множеств решений равносильных неравенств, обычно принимаемое в учебниках за определение, — это лишь скромный частный случай равносильности, в котором оба неравенства содержат одну и ту же переменную.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b=4^a+2^{3+a}-3$ и $c=2^{3-a}-4^{-a}-9$ меньше 6.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b=9^{-a}+3^{2-a}-4$ и $c=3^{2+a}-9^a-8$ не превосходит 6.

5. Найдите положительные значения a, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=6a^2(2a^{-2}-a)-a^6$ и $c=a^{-6}-6a^{-3}+1$ не меньше -4.

6. Найдите положительные значения a, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=a^4(1-5a^{-2})-1$ и $c=a^{-3}(5a-a^{-1})-1$ больше -7.

7. Найдите все значения a, бо́льшие 1, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=2\log_a 27a-\log_a^2 3+1$ и $c=\log_3^2 a-\log_3 9a^6+6$ больше -4.

8. Найдите все значения a, бо́льшие 1, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=\log_3^2 a-\log_3(9a^5)-1$ и $c=8-\log_a(243a)-\log_a^2 3$ не меньше -7.

2.6. Задание С3, 2006 г.

1. **Демоверсия.** Для монтажа оборудования необходима подставка объемом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а ее задняя стенка — в стену цеха. Для соединения подставки по ребрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

Попробуем, обозначив буквами размеры подставки и связав их данной величиной ее объема, выразить через них длину сварочного шва и исследовать полученную функцию на минимум.

Р е ш е н и е .

1. Пусть x и y — сторона основания и высота подставки (в дм).

Тогда ее объем равен

$$x^2y=1296 \Rightarrow y=\frac{1296}{x^2},$$

а общая длина сварки равна

$$L=3x+2y=3x+2\cdot\frac{1296}{x^2}=3\left(x+\frac{2\cdot432}{x^2}\right)=L(x),\ x>0:$$

а) $L'(x)=3\left(x+\frac{2\cdot432}{x^2}\right)'=3\left(1-\frac{2\cdot2\cdot432}{x^3}\right)$

$\sim x^3-12^3$ (т.к. $x>0$)

$\sim x-12$,

б) $L'(x)=0 \Leftrightarrow x=12$,

причем в точке 12 производная меняет знак с минуса на плюс,

в) $L(x)=L_{наим} \Leftrightarrow x=12$.

2. $x=12$:

$$y=\frac{1296}{x^2}=\frac{12\cdot 108}{12^2}=9.$$

О т в е т : 12 дм, 12 дм и 9 дм.

Комментарий

Поиск наименьшего значения функции

$$L(x)=3\left(x+\frac{2\cdot 432}{x^2}\right),\ x>0,$$

возможен и без производной.

Например, можно использовать ***неравенство для средних***

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$$

в случае *трех* неотрицательных чисел

$$a,b,c\geqslant 0$$

(левая часть называется их *средним арифметическим*, а правая — *средним геометрическим*). Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все эти числа одновременно *равны друг другу*, т.е. когда

$$a=b=c.$$

Кстати, аналогичное утверждение справедливо и для n неотрицательных чисел

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n},$$

однако наиболее часто оно используется в случае именно двух неотрицательных чисел

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Для нахождения наименьшего значения с помощью этого неравенства достаточно (но это далеко не всегда просто дела-

ется) разложить данное выражение в сумму таких трех слагаемых, чтобы:

- они были неотрицательными,
- их произведение равнялось константе,
- они могли все одновременно равняться друг другу.

Эта идея реализуется здесь следующим образом:

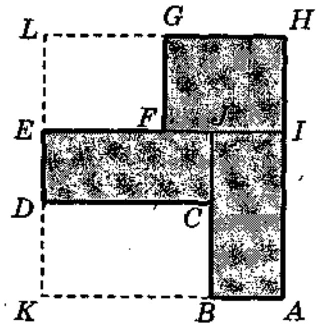
$$\frac{L(x)}{3}=x+\frac{2\cdot 432}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{2\cdot 432}{x^2}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{2\cdot 432}{x^2}}$$

$$=3\sqrt[3]{216}=3\cdot 6=18,$$

причем равенство в этой цепочке достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=\frac{2\cdot 432}{x^2}\Leftrightarrow x^3=12^3\Leftrightarrow x=12.$$

2. Требуется разметить на земле участок $ABCDEFGH$ площадью 1800 м^2, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где $FG=EF=10$ м, $BC=15$ м и $CD\geqslant 40$ м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, LH и CD, при которых периметр является наименьшим.



Обычно, когда ищут наименьшее значение какой-либо величины при заданных условиях, пытаются представить эту величину в виде функции от какой-либо переменной, чтобы затем исследовать ее на минимум. Попробуем так и поступить.

Прежде всего, изучаемая величина — это периметр P участка. А вот переменные, от которых она реально зависит, стоит выбрать так, чтобы они наиболее удобно связывали данные задачи с величинами, непосредственно включенными в ее вопрос. Наиболее естественными кажутся как раз искомые переменные:

$$KL = x\,,\ LH = y \text{ и } CD = z$$

(все длины измерены в метрах).

Теперь переведем условие задачи на язык выбранных переменных:

- площадь участка равна $1800 = x \cdot y - 10 \cdot 10 - 15 \cdot z$,
- $z \geqslant 40$;
- ищется наименьшее значение периметра участка, который, если его расправить (т.е. вывернуть вогнутые участки границы наружу), совпадет с периметром окружающего участок большого прямоугольника размером $x \times y$, и значит, будет равен $P = 2(x+y)$;
- ищутся также и значения переменных x, y, z, при которых периметр достигает своего минимума.

Итак, по существу, требуется найти наименьшее значение суммы $x + y$ при заданном произведении xy, которое, в силу данного условия на площадь участка, равно

$$S = xy = 1800 + 10 \cdot 10 + 15z\,,$$

т.е. оно все же не совсем задано, а некоторым образом зависит от параметра z.

Что-то знакомое припоминается в связи со сложившейся ситуацией, а именно: *из всех прямоугольников с данной площадью S наименьший периметр P имеет квадрат.* Более того, интуиция подсказывает, что чем меньше значение S этой самой площади, тем меньше окажется и периметр P соответствующего квадрата. Поэтому площадь надо минимизировать, для чего значение параметра z надо взять как можно меньше, а именно,

$$z = 40\,,$$

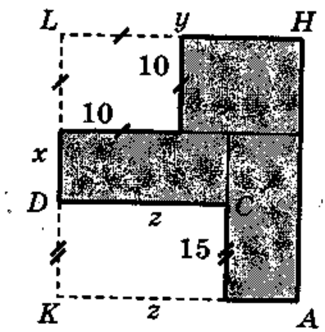
и тогда произведение будет равно $xy = 50^2$,

а наименьшая сумма получится при $x = y = 50$.

Теперь остается все задуманное оформить в виде математического текста.

Р е ш е н и е.

1. Пусть $KL = x$, $LH = y$, $CD = z$.



Тогда $z \geqslant 40$ и площадь прямоугольника $KLHA$ равна

$$xy = 1800 + 10 \cdot 10 + 15z$$

$$\geqslant 1800 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 40 = 2500 \Rightarrow y \geqslant \frac{2500}{x},$$

а периметр участка равен

$$P = P_{KLHA} = 2(x+y) \geqslant 2\left(x + \frac{2500}{x}\right).$$

2. $p(x) = x + \dfrac{2500}{x}$, $x > 0$:

а) $p'(x) = \left(x + \dfrac{2500}{x}\right)' = 1 - \dfrac{2500}{x^2}$

$\sim x^2 - 50^2$ (т.к. $x > 0$)

$= (x-50)(x+50)$

$\sim x - 50$ (т.к. $x > 0$);

б) $p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 50$,

причем в точке 50 производная меняет знак с минуса на плюс;

в) $p_{наим} = p(50) = 50 + \dfrac{2500}{50} = 100$.

$\Rightarrow P \geqslant 2p_{наим} = 200$.

3. $x = 50$, $z = 40$:

$y = \dfrac{2500}{50} = 50$,

$P = 2(50 + 50) = 200$.

Поэтому $P_{наим} = 200$.

Ответ: 200 м; 50 м, 50 м, 40 м.

Комментарий

А. С точки зрения логики, решение задачи на ***нахождение наименьшего значения*** какой-либо величины, как правило, представляет собой доказательство (явное или неявное) в *точности двух утверждений:*

- во-первых, что все значения данной величины оцениваются снизу неким числом,
- во-вторых, что само это число служит одним из значений данной величины.

Шутки ради, можно подытожить сказанное так: наименьшее значение — это, во-первых, наименьшее, а во-вторых, значение.

В нашем случае эти утверждения превращаются в следующие два:

- в условиях задачи непременно выполнено неравенство

$$P \geqslant 200\,;$$

- в некоторой ситуации при выполнении условий задачи имеет место равенство

$$P = 200\,.$$

Доказательству первого из перечисленных утверждений посвящены шаги 1 и 2 решения (в шаге 1, правда, еще и создается математическая модель задачи), а доказательству второго — шаг 3.

Было бы ошибочным думать, что исследованием функции p на минимум в шаге 2 решение задачи автоматически заканчивается, поскольку, мол, к этому моменту оказывается найденным наименьшее значение функции p, а с ней и периметра P. Нет, остается еще один нерешенный вопрос: а вдруг найденное значение функции не соответствует никакому реальному (точнее, реализуемому в условиях задачи) значению периметра? Так что требуется еще доказать существование такой тройки чисел x, y, z, на которой достигается полученное значение периметра. Это и делается в шаге 3.

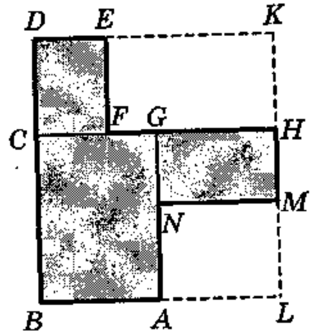
Б. Внимательный читатель, наверное, уже усмотрел в формулировке задачи один, хоть и незначительный, но все-таки дефект. А именно: в задаче требуется найти *какие-либо* значения трех перечисленных в ней длин, для которых периметр минимален, в то время как на самом деле эти длины определяются абсолютно однозначно (и это можно увидеть, тщательно проанализировав приведенное решение).

Указанный дефект был внесен в формулировку сознательно.

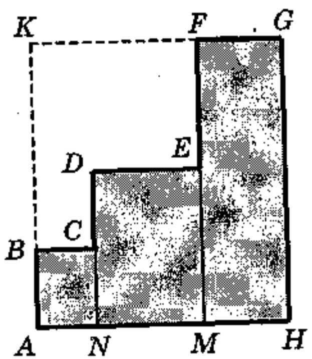
- С одной стороны, если бы в задаче требовалось *найти все* тройки чисел x, y, z, на которых достигается наименьшее значение периметра, то выпускники вынуждены были бы провести некое дополнительное исследование и, скорее всего, подавляющее их большинство просто не стали бы этого делать.
- С другой стороны, если бы в задаче вообще не спрашивались размеры участка с наименьшим периметром, то, как это ни странно, задача значительно усложнилась бы, причем на самом первом своем шаге, где как раз и происходит *выбор переменных*. Таким образом, уточняющий вопрос задачи в действительности служит не лишней загвоздкой, а наоборот, незаметной подсказкой школьнику.

В. В шаге 2 решения можно было обойтись и вовсе без производной, если просто воспользоваться ***неравенством***

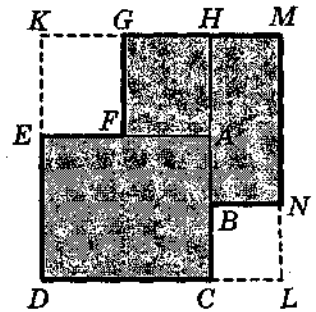
3. Требуется разметить на земле участок $ABDEFHMN$ площадью $2300\,\text{м}^2$, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где $EF = MN = 20\,\text{м}$, $FH = 35\,\text{м}$ и $AN \geqslant 30\,\text{м}$. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, BL и AN, при которых периметр является наименьшим.



4. Требуется разметить на земле участок площадью $3700\,\text{м}^2$, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму многоугольника $ABCDEFGH$, изображенного на рисунке, где $BC = 25\,\text{м}$, $DE = 40\,\text{м}$, $EF = 30\,\text{м}$ и $CD \geqslant 30\,\text{м}$. Найдите наименьший периметр такого участка и укажите какие-нибудь значения длин KG, KA и CD, при которых его периметр является наименьшим.



5. Требуется разметить на земле участок площадью $1050\,\text{м}^2$, который состоит из трех прямоугольных частей и имеет форму многоугольника $BCDEFGMN$, изображенного на рисунке, где $EF = FG = 20\,\text{м}$, $BN = 10\,\text{м}$ и $BC \geqslant 15\,\text{м}$. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KD, KM и BC, при которых его периметр является наименьшим.



2.7. Задание С3, 2007 г.

1. **Демоверсия.** Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a$ при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1;2)$.

Приглядимся к данному неравенству.

- С одной стороны, оно — квадратное относительно неизвестной x (почти при всех значениях параметра a). А найти требуется все такие решения неравенства, которые годятся сразу для всех значений параметра из данного промежутка. На этом пути пока ничего не приходит в голову, кроме лобового способа: решив неравенство для каждого из указанных значений параметра, отобрать общие решения.
- С другой стороны, относительно *неизвестной a* это неравенство, наоборот, — линейное при каждом значении *параметра x* (а почему бы и нет, разве кто-нибудь нам ска-

зал, что в условии задачи неизвестная обязательно x, а параметр обязательно a?). Тогда, уже в этом новом смысле, требуется найти те значения параметра, при каждом из которых решения неравенства заполняют весь данный промежуток. Да, в такой трактовке как будто и вопрос выглядит естественнее, и неравенство решается проще.

Решение.

1. $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a \Leftrightarrow (2x^2-x-3)a+(-x^2-x)<0$
$\Leftrightarrow f(a)<0$,
где
$f(a)=(2x^2-x-3)a+(-x^2-x)$ — линейная функция.

2. Неравенство выполнено при всех $1<a<2$
тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

а) $\begin{cases} f(1)\leqslant 0 \\ f(2)\leqslant 0 \end{cases}$ (f — на обоих концах меньше или равна нулю)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2-x-3)\cdot 1+(-x^2-x)\leqslant 0 \\ (2x^2-x-3)\cdot 2+(-x^2-x)\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3\leqslant 0 \\ 3x^2-3x-6\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)\leqslant 0 \\ (x-2)(x+1)\leqslant 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 2$,

б) $\left[\begin{array}{l} f(1)\ne 0 \\ f(2)\ne 0 \end{array}\right.$ (f — не обнуляется сразу на обоих концах)

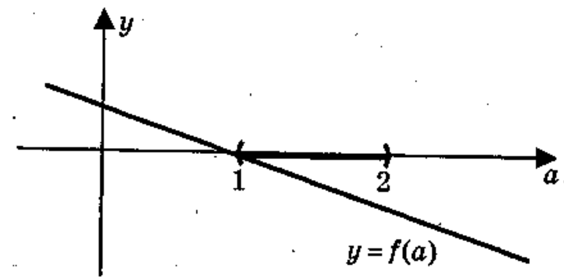
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+1)\ne 0 \\ (x-2)(x+1)\ne 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\ne -1.$$

3. $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2 \\ x\ne -1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow -1<x\leqslant 2$.

Ответ: $-1<x\leqslant 2$.

Комментарий

А. Чтобы пояснить происхождение нашего решения, используем ***графическую иллюстрацию***: представим себе прямую, которая служит графиком некоторой *линейной* функции $y=f(a)$.



Для того чтобы на этом графике всем значениям абсциссы

$$a\in(1;2)$$

соответствовали неположительные ординаты, необходимо и достаточно, чтобы график проходил на координатной плоскости ниже интервала $(1;2)$, отложенного на оси абсцисс. Но чтобы обеспечить такое его расположение, достаточно лишь потребовать, чтобы он проходил ниже *концов* этого интервала, т.е. точек 1 и 2 на оси абсцисс, а уж между ними он автоматически окажется ниже оси абсцисс. Уточним: график не обязан проходить *строго* ниже этих концов, может и прямо по ним, но тогда уж только по одному из них (иначе он пройдет целиком по всему интервалу).

Б. Поскольку условия из пунктов а) и б) решения должны выполняться одновременно, их можно записать и в виде одной системы

$$\begin{cases} f(1)\leqslant 0 \\ f(2)\leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(1)\ne 0 \\ f(2)\ne 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

и решать ее как единое целое. Однако особого выигрыша от этого не получается:

- во-первых, итоговая система выглядит неоправданно громоздко,
- во-вторых, решать ее по частям чуточку удобнее, т.к., решив одну ее часть можно не дублировать те же выкладки во второй части,
- в-третьих, даже и объяснять происхождение самих условий удобно не сразу, а постепенно, по мере их появления.

В. Как ни странно, реализация обсуждавшегося выше лобового решения этой задачи не требует титанических усилий. И прежде всего, из-за того, что ***разложение квадратного трехчлена***

$$p(x)=(2a-1)x^2-(a+1)x-3a$$

на множители производится сравнительно просто, например, одним из следующих способов.

- Заметим, что число

$$x_1=-1$$

является корнем квадратного трехчлена $p(x)$. Значит, второй находится по *теореме Виета*, согласно которой, их произведение равно

$$x_1\cdot x_2=-\frac{3a}{2a-1}$$

(т.е. свободному члену *приведенного* квадратного трехчлена). Это объяснение обладает тем (мелким) дефектом, что в нем сразу же молчаливо используется неравенство

$$2a-1\neq 0,$$

которое для непосредственного разложения на множители, на самом деле, роли не играет.

- Воспользуемся формулой корней квадратного трехчлена

$$x_{1,2}=\frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)^2+4\cdot(2a-1)\cdot 3a}}{2(2a-1)}$$
$$=\frac{a+1\pm\sqrt{25a^2-10a+1}}{2(2a-1)}=\frac{a+1\pm(5a-1)}{2(2a-1)}=-1,\ \frac{3a}{2a-1}$$

(имеем тот же мелкий дефект, что и выше).

- Проведя какие-либо из предыдущих рассуждений или правильно сгруппировав слагаемые, разложим выражение на множители так, как будто нас просто *осенило*:

$$(2a-1)x^2-(a+1)x-3a=(x+1)\big((2a-1)x-3a\big).$$

Напомним, что главное в решении — доказать, что разложение правильное. Это доказательство производится именно в обратную сторону, путем обыкновенного раскрытия скобок в полученном разложении. При этом и объяснять никому ничего не надо, и дефекты никакие не возникают.

Г. Приведем текст лобового решения в полном объеме, тем более что часть преподавателей отдавала предпочтение именно ему.

Решение.

1. $1<a<2$:
$(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$
$\Leftrightarrow(2a-1)x^2-(a+1)x-3a<0\Leftrightarrow(x+1)\big((2a-1)x-3a\big)<0$
$\Leftrightarrow(x+1)\left(x-\frac{3a}{2a-1}\right)<0$ (т.к. $2a-1>2-1>0$)
$\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)<0$,
где $x_1(a)=-1$, $x_2(a)=\frac{3a}{2a-1}$, $1<a<2$:

а) $x_2(a)=\frac{3(a-1/2)+3/2}{2(a-1/2)}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2(2a-1)}$, б) $x_2(a)$ убывает, т.к. $x(a)=2a-1$ — положительна и возрастает,

в) $E(x_2)=(x_2(2);x_2(1))=(2;3)$,

г) $x_2(a)>x_1(a)=-1$.

2. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда при всех

$$a\in(1;2)$$

выполнено неравенство

$$x_1(a)<x<x_2(a),$$

т.е. когда

$$-1<x\leqslant 2.$$

Ответ: $-1<x\leqslant 2$.

Д. На последнем этапе последнего решения было взято пересечение всех интервалов $(x_1(a);x_2(a))$ с фиксированным левым концом и плавающим правым концом, заполняющим интервал $(2;3)$. В результате получился промежуток, как раз *содержащий* свой правый конец — точку 2, входившую в каждый из пересекаемых интервалов.

Для нахождения этого правого конца достаточно было бы найти наименьшее значение функции $x_2(a)$. Но, к сожалению, его нет, поскольку единственный мыслимый кандидат на такое значение — это число

$$x_2(2)=2,$$

которое, однако, функцией не достигается, т.к. точка 2 не входит в область ее определения. В высшей математике такое, возможно не принимаемое, наименьшее значение имеет специальное название: *точная нижняя грань* (или *инфимум*, в отличие от обыкновенного *минимума*) множества значений.

2. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-3;-1]$ значение выражения x^4-8x^2-2 не равно значению выражения ax^2.

Заметим, что если ввести новую переменную

$$t=x^2,$$

то требование задачи сводится к тому, чтобы некоторый квадратный трехчлен от этой переменной (с зависящими от параметра коэффициентами) не имел корней на некотором, вполне определенном, промежутке.

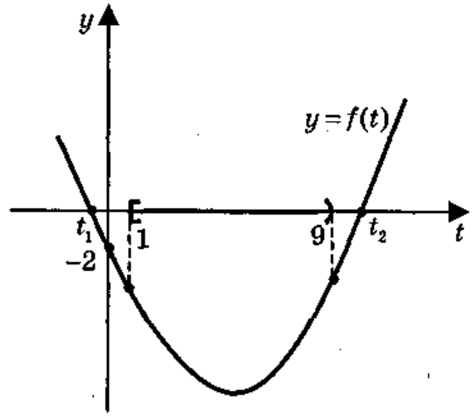
Решение.

1. $\begin{cases}x^4-8x^2-2\neq ax^2\\-3<x\leqslant-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-(a+8)x^2-2\neq 0\\(-1)^2\leqslant x^2<(-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(t)\neq 0\\1\leqslant t<9,\end{cases}$

где
$t=x^2$ и $f(t)=t^2-(a+8)t-2$.

2. $y=f(t)$, $t\in\mathbb{R}$:

а) график — парабола, ветвями вверх,



б) корни:
$t_1<0<t_2$, т.к. $f(0)=-2<0$.

3. $f(t) \neq 0$ — выполнено при всех

$$1 \leqslant t < 9$$

тогда и только тогда, когда

$$t_2 \notin [1;9)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_2 < 1 \\ t_2 \geqslant 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) > 0 \\ f(9) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1^2 - 1(a+8) - 2 > 0 \\ 9^2 - 9(a+8) - 2 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -9 \\ a \geqslant 7/9. \end{array}\right.$$

Ответ: $a < -9$, $a \geqslant 7/9$.

Комментарий

А. Можно было до экзамена предвидеть, что вопрос о том, включать или не включать концевые точки

$$a = -9,\ 7/9$$

в ответ, вызовет определенные затруднения у школьников. Так и случилось. Однако ошибки, связанные с путаницей в употреблении строгих и нестрогих неравенств в ответе, на экзамене карались не очень сильно (всего в один балл из четырех).

Б. У читателя, возможно, создалось впечатление, что мы в первом пункте приведенного решения несколько перемудрили. Зачем мы исследовали систему, состоящую из заданного неравенства и заданных ограничений на неизвестную? Разве нельзя было ту же мысль выразить как-нибудь попроще? Например, так:

- при тех же обозначениях имеем

$$x^4 - 8x^2 - 2 \neq ax^2 \Leftrightarrow f(t) \neq 0,$$

- причем

$$-3 < x \leqslant -1 \Leftrightarrow 1 \leqslant t < 9.$$

С виду все прилично, рассуждение кажется логичным и последовательным. В нем все разложено, как говорится, по полочкам: сначала разобрались с самим неравенством, потом с ограничениями на неизвестные.

Но, несмотря на внешнюю привлекательность, приведенная фраза не выражает нужную мысль. Более того, первая ее часть, действительно, хороша и справедлива, а вторая — просто *неверна*, по крайней мере, в одну сторону. Исправленный ее вариант выглядел бы так:

$$1 \leqslant t < 9 \Leftrightarrow 1 \leqslant |x| < 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x < 3 \\ -3 < x \leqslant -1, \end{array}\right.$$

но он нам не подходит, поскольку не имеет значения, выполнено или не выполнено данное неравенство при положительных значениях x, не входящих в заданный промежуток.

А может быть, тогда и в приведенном выше решении соответствующее рассуждение также неверно? К счастью, там все верно (для проверки этого достаточно уточнить, что если второй системе удовлетворяет некоторое положительное значение неизвестной, то и противоположное ему отрицательное — тоже).

В. Предложенное решение хотя и не самое простое из всех возможных, но обладает рядом достоинств.

- Удачной заменой переменной задача свелась к исследованию квадратичной функции на некотором промежутке.
- Использование свойств параболы позволило быстро определить, существуют ли в принципе и где находятся корни квадратного трехчлена.
- Требование расположения положительного корня вне заданного промежутка переформулировано на удобном для исследования языке, в терминах значений функции в концах промежутка. Подчеркнем, что без информации о наличии у квадратного трехчлена еще и отрицательного корня это было бы сделать намного труднее.

Г. При решении этой задачи многие выпускники, обученные при всяком появлении квадратного трехчлена непременно, не задумываясь, вычислять его *дискриминант* и *корни*, столкнулись с довольно утомительными выкладками.

- Они вычисляли корни по формуле

$$t_{1,2}=\frac{a+8\pm\sqrt{(a+8)^2+4\cdot 2}}{2}=\frac{a+8\pm\sqrt{a^2+16a+72}}{2};$$

причем положительность

$$a^2+16a+72>0$$

содержащегося в ней дискриминанта устанавливалась ими вовсе не в процессе его вычисления, а через отрицательность, в свою очередь, его собственного дискриминанта.

- Далее, они, например (рассуждая от противного), выписывали ровно две логически возможных ситуации, при которых только и не выполнялось требование задачи

1) $\Leftrightarrow\dfrac{-2}{10}<a-1\leqslant\dfrac{-2}{100}$,

2) $1\leqslant\dfrac{a+8-\sqrt{(a+8)^2+4\cdot 2}}{2}<9$,

затем решали все четыре выписанных неравенства и, исходя из полученных решений, формировали окончательный ответ на поставленный в задаче вопрос. В действительности же мало кто из них справился с решением выписанных здесь неравенств: в частности, во второй ситуации (которая, как мы теперь знаем, не реализуется) у них, как правило, получались содержательные условия на параметр.

Д. Говоря о применении ***графической иллюстрации*** в решении данной задачи, нельзя не упомянуть еще, по меньшей мере, о трех *модификациях* этого метода. В них вопрос, адресованный к неравенству, в котором описанная выше замена переменной пусть уже произведена, звучит всегда одинаково: *при каких значениях a графики его левой и*

правой частей, суженных на промежуток $[1; 9)$, *не пересекаются.*

- *Первая* модификация: не меняем исходное неравенство

$$t^2-8t-2\neq at,$$

тогда график левой части есть фиксированная парабола, а график правой — прямая, проходящая через начало координат. Чтобы ответить на поставленный вопрос, нужно уметь аккуратно объяснять, почему эти графики в правой полуплоскости пересекаются всегда только в одной точке (ведь характер их монотонности местами одинаков). Нетрудно проследить за движением этой самой точки при повороте прямой вида

$$y=at$$

вокруг начала координат. При этом крайние (из искомых) положения прямой визуально определяются по картинке и несложно вычисляются.

- *Вторая* модификация: делим обе части неравенства на t и преобразуем его к виду

$$\frac{2}{t}\neq t-(8+a),$$

тогда график левой части есть фиксированная гипербола, а график правой — прямая с угловым коэффициентом 1. Она пересекает гиперболу в правой полуплоскости всегда ровно один раз (вследствие их разной монотонности). Как и в предыдущем случае, здесь практически без труда находятся крайние положения прямой вида

$$y=t-(8+a)$$

относительно гиперболы.

- *Третья* модификация: пытаемся из неравенства как бы выразить параметр a через переменную t

$$t-8-\frac{2}{t}\neq a,$$

тогда в левой части оказывается возрастающая функция F, а в правой — константа. Ответ на поставленный вопрос в этом случае получается, пожалуй, наиболее просто (даже проще, чем в приведенном ранее решении)

$$a \notin E(F) = [F(1); F(9)) = [-9; 7/9).$$

К тому же и графики, как таковые, здесь не особенно используются: можно говорить не о пересечении графика фиксированной функции F горизонтальной прямой вида

$$y = a,$$

а о попадании числа a в множество значений функции F. Единственная оплошность, которую легко при этом допустить (что многие с легкостью и сделали на экзамене), так это забыть обосновать сделанный вывод возрастанием функции F.

Таким образом, творческий подход к применению графиков оправдывает себя в этой задаче на все сто процентов.

3. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-2;-1)$ значение выражения $x^4 - 2x^2$ не равно значению выражения $ax^2 + 5$.

4. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-3;-1)$ значение выражения $x^4 - 7x^2 - 3$ не равно значению выражения ax^2.

5. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-5;-1)$ значение выражения $x^2 - 3$ не равно значению выражения $(a+4)|x|$.

6. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-5;-2]$ значение выражения $x^2 - 4|x|$ не равно значению выражения $a|x| + 4$.

7. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(4;8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a-1)\log_2 x$.

8. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(3;9]$ значение выражения $\log_3^2 x + 3\log_3 x$ не равно значению выражения $9 + a\log_3 x$.

9. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[1;2)$ значение выражения $4^x - 2\cdot 2^x - 6$ не равно значению выражения $a2^x$.

2.8. Задание С3, 2008 г.

1. **Демоверсия.** Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-3;-1]$ значение выражения

$$x^4 - 8x^2 - 2$$

не равно значению выражения ax^2.

Комментарий

Мы не приводим здесь нашего решения этой задачи, поскольку она совпадает с экзаменационным вариантом задачи С3 2007 года, подробно разобранным нами в соответствующем разделе. Зато приводим полный текст решения из демоверсии, вместе с замечанием к нему и с критериями оценки:

Решение.

1. Значения указанных в задаче выражений не равны друг другу тогда и только тогда, когда выполнено условие

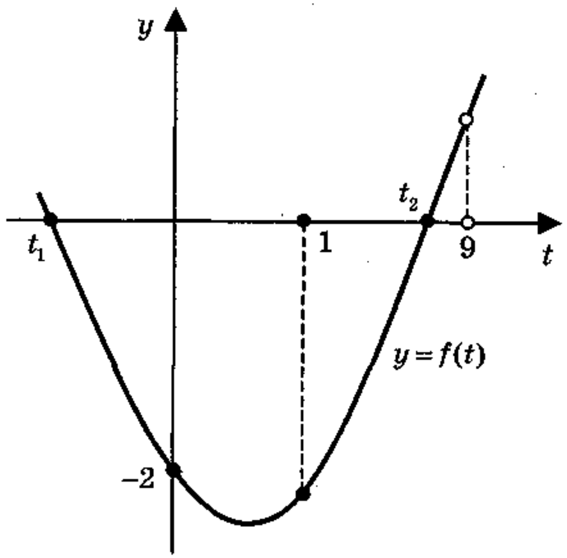
$$x^4 - 8x^2 - 2 \ne ax^2 \Leftrightarrow f(t) \ne 0,$$

где $t = x^2$ и $f(t) = t^2 - (a+8)t - 2$.

Следовательно, в задаче требуется, чтобы уравнение $f(t) = 0$ не имело корней на промежутке $[(-1)^2; (-3)^2) = [1; 9)$.

2. График функции $y = f(t)$ (относительно переменной $t \in \mathbb{R}$) есть парабола, изображенная на рисунке: ее ветви направ-

лены вверх, а точка пересечения с осью ординат лежит ниже оси абсцисс (т.к. $f(0)=-2$). Поэтому квадратный трехчлен $f(t)$ имеет два корня $t_1<0$ и $t_2>0$. Если $0<t<t_2$, то $f(t)<0$, а если $t>t_2$, то $f(t)>0$, поэтому уравнение $f(t)=0$ имеет корень на промежутке $[1;9)$ тогда и только тогда, когда $1\leqslant t_2<9 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)\leqslant 0 \\ f(9)>0 \end{cases}$.



3. Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 1^2-(a+8)-2\leqslant 0 \\ 9^2-9(a+8)-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow -9\leqslant a<\frac{7}{9}.$$

Итак, уравнение $f(t)=0$ не имеет корней на промежутке $[1;9)$ для всех остальных значений a, т.е. тогда и только тогда, когда $a<-9$ или $a\geqslant\frac{7}{9}$.

Ответ: $a<-9$, $a\geqslant\frac{7}{9}$.

Замечание. В работах выпускников в шаге 2 могут отсутствовать словесные описания, а корни квадратного трехчлена $f(t)$ могут быть вычислены.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) задача сведена к исследованию корней квадратного уравнения $f(t)=0$ на соответствующем промежутке; 2) показано (возможно, только с помощью рисунка), что квадратный трехчлен $f(t)$ имеет два корня разного знака, и получены два условия на параметр a, система которых необходима и достаточна для того, чтобы квадратное уравнение $f(t)=0$ имело корень на соответствующем промежутке; 3) полученные неравенства решены и найдены оба множества, составляющие искомое множество значений параметра a. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допускается, что не показано (ни словесно, ни с помощью рисунка), что квадратный трехчлен $f(t)$ имеет два корня разного знака. В шаге 2, возможно, содержатся неточности, состоящие в том, что строгие (нестрогие) неравенства заменены нестрогими (строгими). Ответ получен и либо верен, либо отличается от верного из-за допущенных в шаге 2 неточностей.
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 2 получены неравенства на параметр a, система которых необходима и достаточна для того, чтобы квадратное уравнение $f(t)=0$ имело корень на соответст-

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
	ствующем промежутке. Возможно, что при этом допущены неточности, состоящие в том, что строгие (нестрогие) неравенства заменены нестрогими (строгими). В шаге 3 найдено (возможно, неверно из-за допущенных в шаге 2 неточностей): либо множество значений параметра a, при которых квадратное уравнение $f(t)=0$ имеет корень на соответствующем промежутке, либо хотя бы одно из двух множеств, составляющих искомое множество значений параметра a.
1	Приведены шаги 1 и 2 решения, а шаг 3 отсутствует, содержит ошибки или не доведен до конца. В шаге 2 получено хотя бы одно из неравенств на параметр a, необходимое для того, чтобы квадратное уравнение $f(t)=0$ имело корень на соответствующем промежутке, при этом в нем, возможно, строгое (нестрогое) неравенство заменено нестрогим (строгим).
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1–4 балла.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{\left(2^x+3\sqrt{2}\cdot 2^{-x}-5\right)-a}{a-\left(2\sin\sqrt{x-1}-3\right)}\leqslant 0$ не имеет решений.

В данном неравенстве удобно временно принять переменную a за неизвестную (а переменную x — за параметр) и применить метод интервалов.

Р е ш е н и е.

1. $f(x)=2\sin\sqrt{x-1}-3$, $x\geqslant 1$:

$E\left(\sin\sqrt{x-1}\right)=[-1;1]$

$\Rightarrow E(f)=[-2-3;+2-3]=[-5;-1]$.

2. $2^x+3\sqrt{2}\cdot 2^{-x}-5=t+\dfrac{3\sqrt{2}}{t}-5=g(t)$, $t=2^x\geqslant 2$:

$g(t)=t+\dfrac{3\sqrt{2}}{t}-5\geqslant 2\sqrt{t\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{t}}-5$ (неравенство для средних)

$=2\sqrt[4]{18}-5=g(t_0)$,

где

$t_0=\dfrac{3\sqrt{2}}{t_0}\Leftrightarrow t_0=\sqrt{3\sqrt{2}}$ (>2, т.к $\Leftrightarrow 3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{16}=4$),

$\Rightarrow g_{наим}=2\sqrt[4]{18}-5>2\sqrt[4]{16}-5=-1=f_{наиб}$.

3. $\dfrac{\left(2^x+3\sqrt{2}\cdot 2^{-x}-5\right)-a}{a-\left(2\sin\sqrt{x-1}-3\right)}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a-g(2^x)}{a-f(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<f(x)\\ a\geqslant g(2^x)\end{array}\right.$ — не верно ни при одном x тогда и только тогда, когда

$f_{наиб}\leqslant a<g_{наим}\Leftrightarrow -1\leqslant a<2\sqrt[4]{18}-5$.

О т в е т: $-1\leqslant a<2\sqrt[4]{18}-5$.

Комментарий

А. На первый взгляд, задачу с самого начала можно было несколько видоизменить с целью упрощения. Вместо требования, чтобы не имело решений исходное неравенство, удобнее было бы потребовать, наоборот, чтобы при любом x выполнялось (и здесь, и ниже в обозначениях нашего решения) противоположное неравенство

$$\frac{g(2^x)-a}{a-f(x)}>0.$$

Как будто логически задача при этом не изменится. Но это лишь на первый взгляд. Если заменить исходное неравенство противоположным, то оно в принципе не сможет выполняться при всех x вообще. Необходимо потребовать, чтобы оно при каждом x было либо выполнено, либо лишено смысла (из-за отрицательности выражения под корнем или из-за равенства нулю знаменателя дроби).

Эту замену осуществили на экзамене многие школьники, потеряв в ответе, вследствие указанной неточности в рассуждении, значение

$$a=-1$$

(а с ним и балл за данную задачу, правда, только один из четырех возможных).

Б. Исследовать на минимум функцию g можно было и с помощью производной

$$g'(t)=1-3\sqrt{2}\frac{1}{t^2}$$
$$\sim t^2-t_0^2 \text{ (т.к. } t>0\text{)}$$
$$\sim t-t_0,$$

которая при переходе через точку t_0 меняет знак с минуса на плюс и, тем самым, обеспечивает равенство

$$g_{наим}=g(t_0)=\sqrt{3\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\sqrt{2}}}-5=2\sqrt[4]{18}-5.$$

В. Большинство выпускников решали данное неравенство

$$\frac{g(2^x)-a}{a-f(x)}\leqslant 0,$$

разбирая следующие два случая, определяемые знаками числителя и знаменателя дроби (из его левой части):

1. $\begin{cases} g(2^x)-a\leqslant 0 \\ a-f(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geqslant g(2^x) \\ a>f(x), \end{cases}$

2. $\begin{cases} g(2^x)-a\geqslant 0 \\ a-f(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leqslant g(2^x) \\ a<f(x). \end{cases}$

Далее, они искали такие значения a, для которых каждая из этих двух систем не выполняется ни при одном значении x. В результате, в силу выведенного выше неравенства

$$f_{наиб}<g_{наим},$$

оказывалось, что первая система удовлетворяет данному требованию тогда и только тогда, когда

$$a<g_{наим},$$

а вторая — когда

$$a\geqslant f_{наиб}.$$

В итоге ответ, разумеется, получался правильный.

Г. Правильный ответ получался также и у тех, кто искал значения a, для которых, напротив, при всех значениях x выполняется хотя бы одна из следующих двух, в определенном смысле, противоположных систем

1. $\begin{cases} g(2^x)-a>0 \\ a-f(x)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)\leqslant a<g(2^x),$

2. $\begin{cases} g(2^x)-a<0 \\ a-f(x)\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(2^x)<a\leqslant f(x),$

причем поскольку последняя из них не выполняется ни при одном значении x, то при всех x должна выполняться предыдущая, что имеет место тогда и только тогда, когда

$$f_{наиб}\leqslant a<g_{наим}.$$

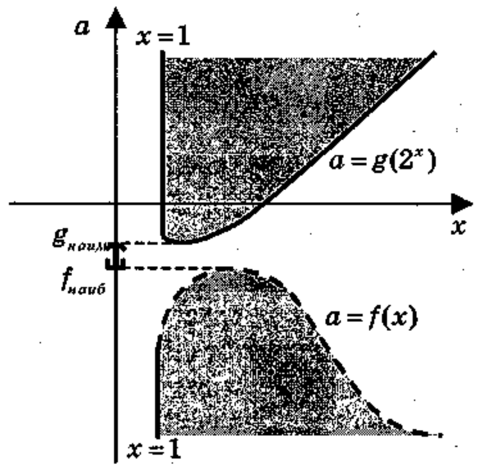
Д. Для придания этим решениям большей наглядности проиллюстрируем содержание задачи с помощью ***метода областей***. При этом, в отличие от *метода интервалов*, будем изображать точки, имеющие не одну, а две координаты (x,a), и, разумеется, не на прямой, а на плоскости.

1. Сначала нарисуем все кривые, при переходе через которые левая часть исходного неравенства в принципе может по-

менять знак или потерять смысл. Эти кривые задаются следующими равенствами:

- $a=f(x)$ (нижняя кривая),
- $a=g(2^x)$ (верхняя кривая),
- $x=1$ (вертикальная прямая).

Они разбивают всю плоскость на области.



2. Теперь выберем те области, точки которых удовлетворяют исходному неравенству — они лежат справа от вертикальной прямой, но либо выше верхней кривой, либо ниже нижней. При этом часть границы выбранных (закрашенных) областей изображена на рисунке сплошной линией (если ее точки удовлетворяют неравенству), а часть — прерывистой (если не удовлетворяют).

3. Наконец, глядя на полученный рисунок, выберем такие значения a, для каждого из которых выполнено требование задачи, т.е. целиком вся соответствующая ему горизонтальная прямая расположена вне закрашенной области. Эти значения на картинке заполняют небольшой промежуток оси ординат, расположенный между экстремальными значениями двух данных функций. Они и составляют ответ к задаче.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a-\left(2^x+2\sqrt{6}\cdot 2^{-x}-5\right)}{\left(3\sin\sqrt{x-1}-4\right)-a}\leqslant 0$ не имеет решений.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a-\left(2x^7+\sqrt{6}x^{-7}-5\right)}{\left(3\sin\sqrt{x-1}-4\right)-a}\leqslant 0$ не имеет решений.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a-\left(3\cos\sqrt{x-1}-1\right)}{\left(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4\right)-a}\leqslant 0$ не имеет решений.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{\left(\log_2 x+3\sqrt{3}\cdot\log_x 2-6\right)-a}{a-\left(2\sin\sqrt{x-4}-4\right)}\leqslant 0$ не имеет решений.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a-\left(\log_3 x+2\sqrt{6}\cdot\log_x 3-5\right)}{\left(3\cos\sqrt{x-9}-4\right)-a}\leqslant 0$ не имеет решений.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a-\left(4\sin\sqrt{x-1}-1\right)}{\left(3\sqrt[5]{x^3}+\sqrt{10}\sqrt[5]{x^{-3}}-3\right)-a}\leqslant 0$ не имеет решений.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{\left(2\sqrt[4]{x^5}+\sqrt{7}\sqrt[4]{x^{-5}}-7\right)-a}{a-\left(\cos\sqrt{x-1}-4\right)}\leqslant 0$ не имеет решений.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a-(x^{\frac{1}{4}}+2\sqrt{5}\cdot x^{-\frac{1}{4}}-5)}{\left(3\sin\sqrt{x-16}-4\right)-a}\leqslant 0$ не имеет решений.

2.9. Задание С4, 2003 г.

1. **Демоверсия.** Найдите все положительные значения параметра а, при которых в области определения функции $y=\left(a^x-a^{ax+2}\right)^{-0,5}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

В задаче требуется, чтобы область определения функции содержала *двузначные натуральные числа* (подчеркнем, *числа*, а не число, т.е. это существительное взято именно во множественном числе):

- не означает ли это, что их должно быть как минимум два,
- или одного тоже достаточно?

Посмотрим, может быть, в процессе решения этот вопрос отпадет сам собой, скажем, ввиду невозможности одной из перечисленных версий.

Решение.

1. $D(y)$ при $a>0$:

$a^x-a^{ax+2}>0 \Leftrightarrow a^{ax+2}<a^x$.

Рассмотрим три случая:

а) $a>1$:

$ax+2<x \Leftrightarrow (a-1)x<-2 \Leftrightarrow x<-\dfrac{2}{a-1}$,

б) $a<1$:

$ax+2>x \Leftrightarrow (a-1)x>-2 \Leftrightarrow x<-\dfrac{2}{a-1}$,

в) $a=1$:

$1<1$ — решений нет.

Итак,

$D(y):\ x<-\dfrac{2}{a-1}\ (\Rightarrow a\neq 1)$.

2. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда $a>0$ и $10<\dfrac{-2}{a-1}\leqslant 100$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}>\frac{a-1}{-2}\geqslant\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{-2}{10}<a-1\leqslant\frac{-2}{100}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{10}<a\leqslant 1-\frac{2}{100} \Leftrightarrow 0{,}8<a\leqslant 0{,}98.$$

Ответ: $0{,}8<a\leqslant 0{,}98$.

Комментарий

А. Прежде всего, выяснилось, что решение поставленной задачи все-таки зависит от трактовки ее условия.

- Если требовать, чтобы область определения функции содержала *хотя бы одно* двузначное натуральное число, то приведенное нами решение правильно.
- Если же считать, что их должно быть *как минимум два*, то двойное неравенство во втором пункте нашего решения должно выглядеть несколько иначе:

$$11<\frac{-2}{a-1}\leqslant 100,$$

отчего и ответ в задаче изменится.

На экзамене такая двусмысленность недопустима, но предусмотреть все нюансы составители не могут — они тоже люди. Если в условии задачи возникает разночтение, от которого зависит ее решение, школьник может задать экзаменаторам уточняющий вопрос. И если же он не получит ясного ответа, то имеет право выбрать тот вариант толкования условия, который ему больше нравится. Причем желательно зафиксировать этот выбор в письменном виде, прямо в работе.

Например, во втором пункте нашего решения написано: *«неравенству удовлетворяет хотя бы одно двузначное число»*, и тем самым задание сформулировано более определенно, чем в условии. Вот здесь-то и надо прокомментировать, что так, мол, и так, но мы понимаем условие указанным образом, поскольку не знаем, что на самом деле имел в виду автор задачи.

Б. Решение данной задачи оформлено не в виде одной цепочки, а разбито на ***этапы***, в соответствии с самой сутью постановки задачи.

- *Первый* этап: положив $a>0$, мы решили неравенство $a^x-a^{ax+2}>0$ относительно неизвестной x,
- *Второй* этап: исходя из полученного множества, мы определили, при каких значениях a в нем есть хотя бы одно двузначное натуральное число, но нет ни одного трехзначного.

Полезно знать заранее, что решение практически любой задачи с параметром состоит из нескольких этапов, поэтому не следует пытаться искусственно выстраивать его в единую логическую линию.

В. Неравенство из первого пункта нашего решения задачи можно было решить и более изящно, без перебора случаев, ***методом замены множителя***. В самом деле, при $a>0$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&a^x-a^{ax+2}>0\\
&\quad\Leftrightarrow a^{ax+2}<a^x\Leftrightarrow \lg a^{ax+2}<\lg a^x\Leftrightarrow (ax+2)\lg a<x\lg a\\
&\quad\Leftrightarrow ((a-1)x+2)\lg a<0\\
&\quad\Leftrightarrow ((a-1)x+2)(a-1)<0\ \ (\Rightarrow a\neq 1)\text{, т.к. } \lg a\sim a-1,\\
&\quad\Leftrightarrow \frac{(a-1)x+2}{a-1}<0\text{, т.к. } a-1\sim\frac{1}{a-1}\ \text{при } a\neq 1,\\
&\quad\Leftrightarrow x<-\frac{2}{a-1}.
\end{aligned}
$$

Г. Преобразовывая двойное неравенство

$$10<\frac{-2}{a-1}\leqslant 100$$

во втором пункте нашего решения, мы воспользовались убыванием функции

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x>0,$$

в силу которого для любых $\alpha,\beta>0$ справедливы следующие *равносильные* переходы:

- $\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$;
- $\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{\beta}\Leftrightarrow\alpha>x\geqslant\beta$.

Кстати, для любых $\alpha,\beta<0$ эти переходы также справедливы. Неверны они только, когда α и β — разного знака.

Д. Другой способ решить упомянутое двойное неравенство состоит в том, чтобы представить его, как систему из двух независимых неравенств:

$$
\begin{aligned}
&10<\frac{-2}{a-1}\leqslant 100\\
&\quad\Leftrightarrow\begin{cases}10+\dfrac{2}{a-1}<0\\ 100+\dfrac{2}{a-1}\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{10a-8}{a-1}<0\\ \dfrac{100a-98}{a-1}\geqslant 0\end{cases}\\
&\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a-0{,}8}{a-1}<0\ (\Rightarrow a<1)\\ \dfrac{a-0{,}98}{a-1}\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0{,}8<a<1\\ a\leqslant 0{,}98\end{cases}\Leftrightarrow 0{,}8<a\leqslant 0{,}98.
\end{aligned}
$$

Конечно, это решение технически более хлопотно и содержит ряд ненужных выкладок, зато оно совершенно бесхитростно и доступно любому школьнику. Более того, предпоследнюю систему можно было решить и еще примитивней, методом интервалов, изобразив соответствующие множества на числовой прямой.

2. Найдите все положительные значения а, при которых область определения функции

$$y=\left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1}+\sqrt{x}\cdot a^3-x^{0{,}5+x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^7\right)^{0.5}$$

содержит не более двух целых чисел.

Наиболее естественный путь решения этой задачи, как и предыдущей, состоит из аналогичных двух этапов, которые могут в тексте решения разумно сочетаться с перебором случаев.

Решение.
$D(y)$ при $a>0$, $x\in\mathbb{Z}$:

$$\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1}+\sqrt{x}\cdot a^3-x^{0{,}5+x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^7\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^{x+0{,}5}+x^{0{,}5}\cdot a^3-x^{0{,}5}\cdot a^x-a^{3{,}5}\geqslant 0\\ 1\neq x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a^x-a^3\right)\left(a^{0{,}5}-x^{0{,}5}\right)\geqslant 0\\ x>1.\end{cases}$$

Рассмотрим три случая:

а) $a>1$:

$\begin{cases}(x-3)(a-x)\geqslant 0\\ x>1\end{cases}$ (т.к. $a^x-a^3\sim x-3$ и $a^{0{,}5}-x^{0{,}5}\sim a-x$)

$\Leftrightarrow(x-3)(x-a)\leqslant 0$ ($\Rightarrow x>1$, т.к. 3, $a>1$),

причем

- $D(y)=[x_1;x_2]$, где $x_{1,2}=3,a$ (возможно, $a=3$),
- $D(y)$ содержит не более двух целых чисел тогда и только тогда когда $1<a<5$;

б) $a<1$:

$\begin{cases}(3-x)(a-x)\geqslant 0\\ x>1\end{cases}$ ($a^x-a^3\sim 3-x$ и $a^{0{,}5}-x^{0{,}5}\sim a-x$)

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-a)\geqslant 0\\ x>1,\end{cases}$

причем $D(y)\supset[3;\infty)$ — содержит более двух целых чисел;

в) $a=1$:

$\begin{cases}0\geqslant 0\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$,

поэтому $D(y)\supset(1;\infty)$ — содержит более двух целых чисел.

Ответ: $1<a<5$.

Комментарий

А. В решении этой задачи мы использовали ***метод замены множителя***, который за счет более тонкой, чем обычно, логики существенно упростил решение задачи. Действительно, при обычной логике решения неравенства

$$\left(a^x-a^3\right)\left(a^{0{,}5}-x^{0{,}5}\right)\geqslant 0$$

в каждом из первых двух перечисленных выше случаев

$$a>1 \text{ или } a<1$$

пришлось бы разобрать еще по два подслучая

$$\begin{cases}a^x-a^3\geqslant 0\\ a^{0{,}5}-x^{0{,}5}\geqslant 0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a^x-a^3\leqslant 0\\ a^{0{,}5}-x^{0{,}5}\leqslant 0\end{cases}.$$

Поскольку все четыре получившихся случая имеют различные и непустые ответы, они не объединяются механически в какие-либо группы.

Б. Заменить множители в решении можно было и более энергично

a^x-a^3

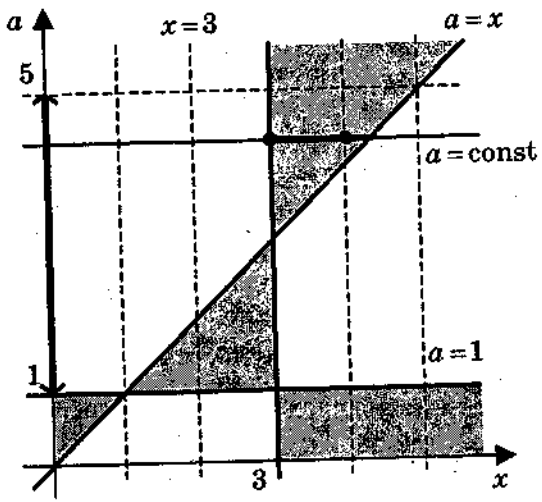
$\sim\lg a^x-\lg a^3\sim(x-3)\lg a\sim(x-3)(a-1)$,

а тогда и неравенство можно было преобразовать сильнее

$\left(a^x-a^3\right)\left(a^{0{,}5}-x^{0{,}5}\right)\geqslant 0\Leftrightarrow(x-3)(a-1)(a-x)\geqslant 0$.

Правда, в дальнейшем все равно пришлось бы разбирать те же три случая, что и раньше. Так что сильной экономии при этом не получилось бы.

В. Упростить перебор случаев при решении задачи можно также и с помощью ***графической иллюстрации***. Множество пар (x,a), удовлетворяющих последней системе (при дополнительном условии $a>0$), можно изобразить на плоскости с соответствующими координатами.



На рисунке проведены все граничные линии, на которых только и возможна смена знака произведения из левой части неравенства

$$(x-3)(a-1)(a-x)\geqslant 0,$$

и покрашены те области, в которых знак этого произведения положителен. Его знак в каждой из полученных областей постоянен, т.к. он постоянен у каждого сомножителя.

Конкретный знак произведения можно определить с помощью следующего рассуждения, присущего ***методу областей***. Описывать его в тексте решения не требуется, так же как ... метода интервалов.

- Сначала рассматривается на рисунке наиболее простая область, в которой все сомножители, например, положительны, а значит, заведомо положительно и их произведение. В данном случае это та область (на рисунке она — правая верхняя), в которой выполнена система из трех неравенств

$$\begin{cases} x>3 \\ a>1 \\ a>x. \end{cases}$$

- Знаки произведения в остальных областях определяются последовательными переходами от одной области к другой, соседней с ней по граничной линии. При этом удобно воспользоваться следующим наблюдением: при переходе из какой-либо области в соседнюю знак, как правило, одного из сомножителей меняется, а значит, меняется и знак произведения.

Как же теперь по рисунку ответить на поставленный в задаче вопрос? Для этого нужно перевести вопрос на наглядный геометрический язык. Итак, требуется найти все такие значения a, чтобы соответствующие им горизонтальные прямые вида

$$a=\text{const}$$

пересекали закрашенную фигуру по отрезкам, содержащим в общей сложности не более двух целых чисел

$$x>1,$$

т.е. пересекающим на рисунке не более двух вертикальных прямых (одна из таких прямых, для примера, на рисунке проведена). Изучив визуально рисунок, заключаем, что искомые значения a заполняют в точности интервал $(1;5)$.

3. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\left(a^{x+0,5}+\sqrt{a}^{-8+\log_a x}-x^{0,5+x\log_x a}-a^{4,5}\right)^{0,5}$ содержит ровно два целых числа.

4. Найдите все положительные, не равные 1, значения а, при которых область определения функции

$$y=\left(a^{x+3}\cdot a^2+a^{3+5\log_a x}-x^{5+x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^{16}\right)^{0,5}$$

не содержит двузначных натуральных чисел.

5. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\left(a^{x+1}\cdot x^{4\log_x a}+a^{3+5\log_a x}-\left(\sqrt{x}\right)^{10+2x\log_x a}-\sqrt{a^{16}}\right)^{-0,5}$ содержит ровно три целых числа.

6. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\lg\left(a^{x+2}\cdot x^{3\log_x a}+a^4\cdot x^5-\left(\sqrt{x}\right)^{10+2x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^{18}\right)$ содержит ровно одно целое число.

7. Из области определения функции $y=\log_3\left(a^x-a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения а, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 13.

Поначалу задание просто ставит в тупик. О какой функции идет в ней речь, точнее, от какого аргумента:

- *от a,*
- *от x,*
- *от пары (x,a)?*

В общем, перебрав различные ситуации с продолжением условия, разумеется, можно с большой вероятностью предположить, что этот вопрос решается в пользу буквы x.

Остается только догадываться, как такой ребус мог появиться в ЕГЭ по математике: наверное, автор задания подумал, что раз функция обозначена стандартной буквой y, то и ее аргумент, дескать, автоматически определен тем же стандартом (да и вообще, кому, мол, взбредет в голову считать бу... аргументом — это же всегда параметр!).

Честно говоря, формулировочка и с точки зрения стиля оставляет желать лучшего. Судите сами.

- Во-первых, числа уже взяли и сложили, а значит, сумма уже оказалась чему-то равна. И когда же, спрашивается, она *будет* после этого больше 9, но меньше 13? Она что, меняется, что ли? Ведь какая получилась, такая и есть.
- Во-вторых, чему, интересно, равняется указанная сумма в случае, когда она содержит бесконечно много слагаемых? Например, когда область определения представляет собой положительный луч числовой оси (кстати, такое в задаче не исключено). Вот тут-то, кажется, и становится понятно, зачем в формулировке задачи автору понадобился такой противоестественный стилистический пассаж: просто, раз уж сумма оказалась чему-то равна, значит она, видимо, конечна!

Следовательно, случай бесконечного числа слагаемых здесь исключается непосредственно по условию задачи.

- В-третьих, можно ли назвать суммой ровно одно слагаемое или, хуже того, ноль слагаемых? Обычно считают, что, по определению, сумма одного слагаемого равна самому этому слагаемому, а при отсутствии слагаемых вообще — сумма равна нулю. Видимо, здесь мы должны действовать согласно этой договоренности. Но ведь в условии явно этого нигде не сказано! А вдруг автор задачи придерживается другого мнения?

Скорее всего, по замыслу, такая ситуация при правильном решении задачи возникнуть просто не должна. Ну, а при неправильном? Что, если школьник ошибется? Скажем, получится у него, что при некотором значении параметра в область определения попадет всего одно число 10. Оно же больше 9 и меньше 13. Включать ему такое значение параметра в ответ или нет?

Вопрос на самом деле далеко не тривиален. Чтобы осознать всю его серьезность, сообщим для информации, что, например:

- *произведение нуля сомножителей* равно, как ни странно, единице.

- *наименьшее из нуля чисел* — вообще бесконечно (последнее, подчеркнем, есть именно $+\infty$, а не $-\infty$).

Решение.

$D(y)$ при $a, x > 0$:

$$a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}} \Leftrightarrow \lg a^a > \lg a^{\frac{5x+2}{x+2}} \Leftrightarrow \left(\frac{5x+2}{x+2} - a\right)\lg a < 0$$

$$\Leftrightarrow \big(5x+2-a(x+2)\big)(a-1) < 0, \text{ т.к. } \lg a \sim a-1,$$

$$\Leftrightarrow \big((a-5)x + 2(a-1)\big)(a-1) > 0 \quad (\Rightarrow a \neq 5)$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(a-5)(a-1) > 0, \text{ где } x_0 = -\frac{2(a-1)}{a-5}.$$

Рассмотрим два случая (т.к. $0 < a \neq 1, 5$):

а) $1 < a < 5$:

$$(x-x_0)(a-5)(a-1) > 0 \Leftrightarrow x < x_0,$$

причем сумма таких $x \in \mathbb{N}$ больше 9, но меньше 13 тогда и только тогда, когда она равна

$1+2+3+4 = 10$ (т.к. $1+2+3 = 6 < 9$ и $1+2+3+4+5 = 15 > 13$),

т.е. когда $4 < x_0 \leqslant 5$

$$\Leftrightarrow 4 < -\frac{2(a-1)}{a-5} \leqslant 5$$

$$\Leftrightarrow 4(5-a) < 2(a-1) \leqslant 5(5-a) \quad (\text{т.к. } a < 5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 < 3a \\ 7a \leqslant 27 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11}{3} < a \leqslant \frac{27}{7} \quad (<5);$$

б) $\left[\begin{array}{l} a < 1 \\ a > 5 \end{array}\right.$:

$$(x-x_0)(a-5)(a-1) > 0$$

$\Leftrightarrow x > x_0$ — бесконечно много $x \in \mathbb{N}$.

Ответ: $\dfrac{11}{3} < a \leqslant \dfrac{27}{7}$.

Комментарий

А. Существенным, хотя и незаметным, облегчением для преобразований исходного неравенства стало наложенное в самом начале нашего решения условие

$$x > 0,$$

которое:

- позволило сразу, безо всяких проблем умножить неравенство на знаменатель $x+2$,
- могло быть наложено без ущерба для решения задачи, поскольку в ее условии речь шла только о положительных (даже натуральных) значениях x.

Б. В приведенном решении опять был использован ***метод замены множителя***, весьма эффективный, позволивший нам избавиться от целой серии случаев. При обычных преобразованиях неравенства пришлось бы вместо двух случаев так или иначе рассмотреть следующие пять:

$$0 < a < 1, \ a = 1, \ 1 < a < 5, \ a = 5, \ a > 5,$$

что было бы, нельзя не согласиться, довольно утомительно.

В. Исследование неравенства

$$a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}}$$

может быть полностью проведено с помощью ***графической иллюстрации***, точнее, графика функции

$$y = \frac{5x+2}{x+2} = \frac{5(x+2)+2-10}{x+2} = 5 - \frac{8}{x+2}.$$

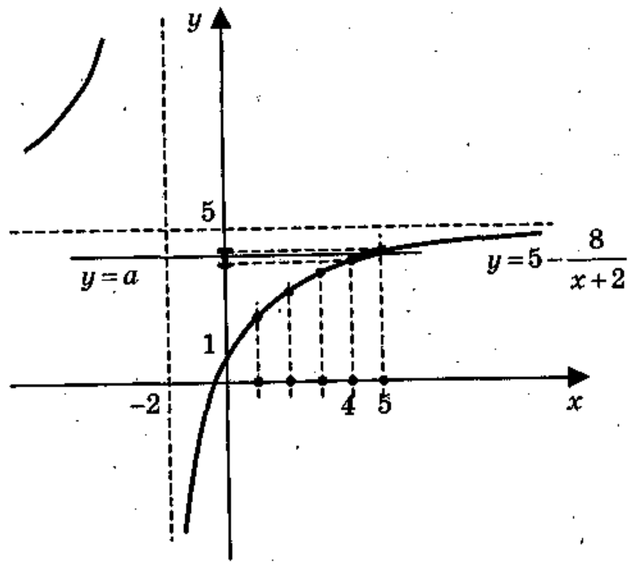
Заметим, что

- он получается из графика функции

$$y = \frac{1}{x}$$

симметрией относительно оси абсцисс, а затем сдвигом на 5 единиц вверх и на 2 единицы влево,

- для его построения весьма полезной оказалась операция ***выделения целой части*** в *дробно-линейном* выражении.



Ниже будем считать, что

$$x>0\ ,$$

заметив сразу, что рассматриваемая функция строго возрастает от значения

$$y(0)=\frac{5\cdot 0+2}{0+2}=1$$

до значения 5 (которого она, правда, не достигает в точности ни при каком значении x, т.к. лишь *асимптотически* приближается к нему с ростом переменной x).

- В случае

$$0<a<1$$

исходное неравенство приводится к виду

$$a<\frac{5x+2}{x+2}\ .$$

При этом над горизонтальной прямой

$$y=a$$

лежит бесконечно много точек рассматриваемого графика, имеющих положительную целочисленную абсциссу x, т.к.

$$a<1=y(0)<y(x)=5-\frac{8}{x+2}\ .$$

Поэтому сумма абсцисс всех таких точек уж заведомо больше 13.

- В случае

$$a>1$$

исходное неравенство приводится к виду

$$a>\frac{5x+2}{x+2}\ .$$

Сумма положительных целочисленных абсцисс всех точек графика, лежащих под той же прямой, равна сумме всех подряд натуральных чисел, принадлежащих интервалу от 0 до некоторого числа x_0, определяемого равенством

$$y(x_0)=a\ .$$

Для того чтобы указанная сумма была больше 9, но меньше 13, необходимо и достаточно, чтобы она кончалась слагаемым 4, т.к.

$$1+2+3+4=10\ ,$$

$$1+2+3=6<9\ ,$$

$$1+2+3+4+5=15>13\ .$$

Это требование выполнено тогда и только тогда, когда число x_0 удовлетворяет двойному неравенству

$$4<x_0\leqslant 5\ .$$

Поэтому в ответ входят те и только те числа a, которые больше значения

$$y(4)=\frac{5\cdot 4+2}{4+2}=\frac{11}{3}\ ,$$

но не превосходят значения

$$y(5)=\frac{5\cdot 5+2}{5+2}=\frac{27}{7},$$

т.е.

$$\frac{11}{3}<a\leqslant\frac{27}{7}.$$

- Наконец, в случае

$$a=1$$

неравенство имеет вид

$$1>1$$

т.е. не имеет решений.

Итак, анализируя график, мы получили тот же ответ, что и полученный ранее аналитическим путем. При этом наше последнее решение опиралось лишь на геометрические свойства графика, на расположение различных его частей относительно горизонтальной прямой и на подсчет значений функции в некоторых точках. Такое решение, несомненно, является естественным и наглядным.

С другой стороны, к сожалению, это решение — менее четкое и менее обоснованное, чем приведенное выше, т.к. в нем местами стерты границы между доказанным и очевидным. Для того чтобы почувствовать всю нестрогость такого решения, советуем проанализировать его еще раз и перечислить конкретно все те свойства графика, которые были в нем реально использованы. А еще лучше попробовать изложить то же решение чисто аналитически, опираясь мысленно, но не ссылаясь явно ни на какие графические умозаключения вообще.

8. Из области определения функции $y=\log_7\left(a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите

все значения а, при которых такая сумма будет больше 7, но меньше 11.

9. Из области определения функции $y=\log_7\left(a^a-a^{\frac{6x+1}{x+1}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения а, при которых такая сумма будет больше 4, но меньше 7.

2.10. Задание С4, 2004 г.

1. **Демоверсия.** Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства
$x(x-2)\leqslant(a+1)\big(|x-1|-1\big)$
содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7, и положительным знаменателем.

Глаза разбегаются, когда начинаешь обдумывать эту задачу. Не знаешь, за что браться сначала: то ли решать заданное неравенство, то ли изучать описанную в условии геометрическую прогрессию.

Рассмотрим неравенство. Оно обладает специфическим свойством:

- с одной стороны, в нем присутствует модуль $|x-1|$, который обычно раскрывают, разбирая случаи (определяемые знаком выражения $x-1$),
- с другой стороны, неизвестная x встречается в неравенстве только еще в одной комбинации

$$x(x-2)=x^2-2x=(x-1)^2-1$$
$$=|x-1|^2-1.$$

Таким образом, напрашивается ввести новую переменную

$$y = |x-1|,$$

относительно которой неравенство будет уже квадратным. Правда, его коэффициенты будут зависеть от параметра a, что несколько усложняет дело.

Теперь рассмотрим геометрическую прогрессию. Она в условии задана не полностью — только известным первым членом

$$b_1 = 1{,}7$$

и неизвестным положительным знаменателем

$$q < 1.$$

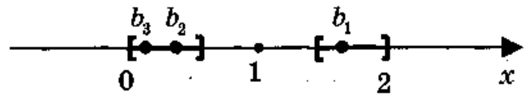
Если же вдуматься в условие задачи, то оказывается, нам разрешено выбирать прогрессию самим. Действительно, требуется, чтобы не любая, а хотя бы одна (по нашему усмотрению) прогрессия указанного вида целиком содержалась во множестве решений неравенства.

Перечисленных наблюдений уже достаточно, чтобы приступать к решению задачи.

Р е ш е н и е .

1. $x(x-2) \leqslant (a+1)(|x-1|-1)$
   $\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-1 \leqslant (a+1)(|x-1|-1)$
   $\Leftrightarrow y^2 - 1 \leqslant (a+1)(y-1)$, где $y = |x-1|$ $(\Rightarrow (x-1)^2 = |x-1|^2 = y^2)$,
   $\Leftrightarrow (y-1)(y+1)-(a+1)(y-1) \leqslant 0$
   $\Leftrightarrow (y-1)(y-a) \leqslant 0$
   $\Leftrightarrow y_1 \leqslant |x-1| \leqslant y_2$, где $y_{1,2} = 1,\ a$.
2. $x = 1{,}7$ — решение
   $\Rightarrow y_1 \leqslant |1{,}7-1| \leqslant y_2$
   $\Rightarrow y_1 \leqslant 0{,}7 \leqslant y_2$ $(\Rightarrow y_1 \neq 1 \Rightarrow y_1 = a,\ y_2 = 1)$
   $\Rightarrow a \leqslant 0{,}7$.

3. $a \leqslant 0{,}7$:
   $a \leqslant |x-1| \leqslant 1$



$$\Leftarrow 0{,}7 \leqslant |x-1| \leqslant 1 \Leftarrow \left[\begin{array}{l} 0{,}7 \leqslant x-1 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x-1 \leqslant -0{,}7 \end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l} 1{,}7 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x \leqslant 0{,}3 \end{array}\right.$$

$\Leftarrow x = b_1, b_2, b_3, \ldots$, где:
$b_1 = 1{,}7$,
$b_2 = b_1 q = 0{,}17 < 0{,}3$ $(\Rightarrow q = 0{,}17/1{,}7 = 0{,}1)$,
$b_3 = b_2 q$, ...,
поэтому все указанные значения a удовлетворяют требованию задачи.

О т в е т : $a \leqslant 0{,}7$.

Комментарий

А. ***Этапы*** приведенного решения таковы:

- сначала мы сильно упростили исходное неравенство, представив себе, пока не совсем определенно, вид его решения,
- затем мы воспользовались тем, что первый член, раз уж он фиксирован, точно должен быть решением неравенства, что дало необходимое условие на параметр a,
- наконец, оказалось, что найденное условие на параметр является не только необходимым, но и достаточным, поскольку если оно выполнено, то некоторая, кстати, независящая a геометрическая прогрессия целиком лежит во множестве решений неравенства.

Б. Изучая выражение $|x-1|$, мы мысленно воспользовались совершенно естественным ***геометрическим смыслом модуля*** разности: здесь — это расстояние от точки x до точки 1 на числовой прямой. Эта мысль позволяет наглядно представить, как зависит от параметра a множество решений неравенства

$$y_1 \leqslant |x-1| \leqslant y_2,$$

в котором одно из чисел y_1 и y_2 есть 1, а другое — a.

- Прежде всего, в случае

$$0<a<1$$

множество решений представляет собой два отрезка числовой прямой, симметричных относительно точки 1. Рисунок в приведенном выше решении соответствует значению

$$a \approx 0,5 .$$

Из него хорошо видно, чтуименно необходимо потребовать, чтобы точка

$$b_1 = 1,7$$

попала в отмеченное множество. После этого во множество решений можно загнать и вполне определенную геометрическую прогрессию, подобрав ее знаменатель q настолько малым, чтобы уже второй ее член b_2 расположился достаточно близко к точке 0 и, тем самым, попал в левую часть отмеченного множества. В принципе, в качестве знаменателя годится любое положительное число

$$q \leqslant \frac{0,3}{1,7} = \frac{3}{17}.$$

- Далее, в случае

$$a \geqslant 1$$

множество решений представляет собой также два симметричных отрезка (возможно, вырожденных в одну точку каждый). Однако они расположены не между точками 0 и 2, а за ними. Поэтому ни один из них не содержит точку 1,7.

- Наконец, в случае

$$a \leqslant 0$$

отрезки сливаются в один сплошной отрезок $[0;2]$, который содержит любую описанную в условии задачи прогрессию.

В. Последний пункт нашего решения может слегка шокировать читателя необычностью своего оформления, из-за того что в нем знаки *импликаций* (следствий) обращены как будто не в ту сторону — справа налево. Смеем заметить, что эти знаки, несмотря на некоторую экзотичность их вида, расставлены совершенно правильно, ровно так, как надо.

Если читать приведенную в решении ***цепочку обратных следствий*** подряд, то каждое следующее из них является не необходимым, как обычно, условием предыдущего, а наоборот, достаточным. Это значит, что из каждого следующего утверждения на переменную x вытекает предыдущее, а в итоге из последнего утверждения вытекает первое. Поэтому, при сделанном в начале этого пункта предположении

$$a \leqslant 0,7 ,$$

доказано следующее: если вместо переменной x последовательно подставлять члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $1,7$ и знаменателем $0,1$, то для всех них будет выполнено исходное неравенство.

Г. Можно было иначе, менее кричаще и менее логично, но более традиционно изложить последний пункт решения.

Мы перечисляли условия на переменную x в том порядке, в каком они появлялись в нашем сознании: от исходного неравенства — к искомой прогрессии. Поскольку такая естественная цепочка может вызвать недоумение у психологически неподготовленного эксперта, на экзамене имеет смысл провести ее только в черновике, а в чистовике же поставить все с головы на ноги (на самом деле, с ног на голову) и изложить третий пункт решения следующим образом:

$a \leqslant 0{,}7$:

$x = b_1, b_2, b_3, \dots$,

где $b_1 = 1{,}7$, $b_2 = b_1 q = 0{,}17$ $(q = 0{,}1)$, $b_3 = b_2 q$,...,

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1{,}7 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x \leqslant 0{,}3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0{,}7 \leqslant x-1 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x-1 \leqslant -0{,}7 \end{array}\right.$

$\Rightarrow 0{,}7 \leqslant |x-1| \leqslant 1$

$\Rightarrow a \leqslant |x-1| \leqslant 1$.

2. Найдите все значения параметра а, при которых в множестве решений неравенства $x(x-2a-4) < \dfrac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$ нельзя расположить два отрезка длиной 1,5 каждый, которые не имеют общих точек.

По всей видимости, для ответа на вопрос задачи придется выяснять, как устроено множество решений неравенства. Имеет смысл, упростив неравенство, попытаться определить хотя бы структуру этого множества, пусть даже оно и зависит от параметра.

Если присмотреться к некоторым фрагментам данного неравенства, можно заметить, что:

- в левой его части есть многочлен

$$x^2 - 2ax,$$

которому явно не хватает слагаемого a^2 — а оно как раз имеется справа, причем с нужным знаком,

- далее, все остальные слагаемые имеют общий множитель 4 и собираются в группу, которая после приведения к общему знаменателю, содержит в числителе и a^2, и ax, и x^2, причем с какими-то приятными коэффициентами.

Все настолько удачно складывается, что пора пробовать преобразовывать неравенство.

Решение.

1. $x(x-2a-4) < \dfrac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$

$\Leftrightarrow \left(x(x-2a)+a^2\right) + \left(-\dfrac{4a^2}{x} + 8a - 4x\right) < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x\left(x^2-2ax+a^2\right) - 4\left(a^2-2ax+x^2\right)}{x} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-4)(x-a)^2}{x} < 0$ $(\Rightarrow x \neq a \Rightarrow (x-a)^2 > 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{x} < 0 \\ x \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x \neq a. \end{cases}$

2. Рассмотрим три случая:

а) $a < 1$: множество решений содержит промежуток $[a;4)$ — длиной больше 3;

б) $1 \leqslant a \leqslant 3$:

$\begin{cases} 0 < x < 4 \\ x \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < x < 4 \\ 0 < x < a, \end{array}\right.$

- каждый промежуток — длиной не больше 3,
- длина каждого промежутка больше 1,5 тогда и только тогда когда $1{,}5 < a < 2{,}5$;

в) $a > 3$: множество решений содержит промежуток $(0;a]$ — длиной больше 3.

Ответ: $1 \leqslant a \leqslant 1{,}5$, $2{,}5 \leqslant a \leqslant 3$.

Комментарий

А. Как быть, если мы не заметили в самом начале какой-либо закономерности в коэффициентах данного неравенства и не смогли сразу догадаться, что оно так легко раскладывается на множители?

Ответ прост: перенесем все в одну сторону, приведем к общему знаменателю и приведем в числителе подобные члены. Получим следующую цепочку преобразований:

$$x(x-2a-4)<\frac{4a^2}{x}-a^2-8a$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3-2ax^2-4x^2-4a^2+a^2x+8ax}{x}<0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3-2(a+2)x^2+(a+8)ax-4a^2}{x}<0\,.$$

Чтобы теперь найти ***разложение кубического многочлена на множители***, можно воспользоваться одним из следующих методов.

- *Угадать* какой-либо корень x_0 и поделить многочлен на двучлен $x-x_0$. Можно попытаться искать корень из тех же соображений, из которых ищется ***рациональный корень многочлена*** с целыми коэффициентами, т.е. из множества различных делителей свободного члена $-4a^2$, каковыми являются, например, числа и выражения

  $$1,\ 2,\ 4,\ a,\ 2a,\ 4a, ...,$$

  возможно, со знаком минус. В данном случае старший коэффициент равен 1, но если бы он был посложнее, его всевозможные делители также можно было бы поподставлять в знаменатели выписанных выражений, отчего количество вариантов для корней резко бы увеличилось.

- Попытаться *сгруппировать* слагаемые так, чтобы можно было вынести общий множитель за скобки. Как мы уже знаем, это здесь в принципе делается несложно, но мы сознательно удалились от готового разложения, преобразовав многочлен к стандартному виду.

- Воспользоваться *теоремой Виета*, согласно которой сумма всех трех корней равна

  $$2(a+2)=2a+4\,,$$

  их произведение равно $4a^2$, а сумма трех их попарных произведений равна

  $$(a+8)a=a^2+8a\,,$$

  откуда каким-то чудодейственным образом можно все-таки сделать вывод, что в качестве тройки корней подходит набор

  $$a,\ a \text{ и } 4.$$

В любом случае сам процесс поиска разложения на множители или угадывания корней экзаменатора не интересует (точнее, *не должен* интересовать). Для него важно только одно — установить, что разложение верное. И если для этого достаточно обыкновенного раскрытия скобок в уже готовом произведении, то больше ничего объяснять и не надо.

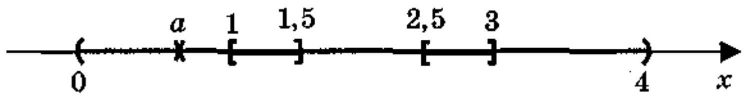
Б. Иногда перед исследованием знака алгебраической дроби в неравенстве ее зачем-то умножают на квадрат знаменателя, чтобы получить не дробь, а произведение (в данном случае неравенство умножают на x^2)? При этом:

- производится лишняя работа по переписыванию дроби в одну строку,
- делаются дополнительные пояснения, почему операция умножения неравенства в принципе здесь правомерна,
- возникают новые хлопоты — надо побеспокоиться о том, чтобы бывший знаменатель остался по-прежнему отличным от нуля.

А главное, ради чего все это делается, какой получается логический или арифметический выигрыш от этой операции? Разве *знак дроби* и *знак произведения* определяются не по одним и тем же правилам, с единственной всего лишь поправкой, что знаменатель дроби не равен нулю?

В. Для решения данной задачи весьма полезную роль может сыграть ***графическая иллюстрация***, поскольку вопрос задачи уже сам по себе имеет геометрический оттенок. На картинку здесь можно опереться как при обдумывании решения, так и в его записи, при разборе случаев расположения точки a по отношению к интервалу $(0;4)$.

По правде сказать, не очень понятно, какая конкретно картинка на экзамене дает необходимое и достаточное *пояснение* того, как мы выбирали ответ в задаче. Предположим, во втором пункте нашего решения мы не писали никакого текста, а ограничились только ответом на поставленный вопрос, пусть правильным, пусть в сопровождении следующего рисунка.



- С одной стороны, согласно критериям оценки, нам за это, похоже, могут снизить балл.
- С другой стороны, для полного решения задачи теперь достаточно просто добавить какую-нибудь совершенно никчемную фразу наподобие следующей: *мы прошлись выколотой точкой a по всей числовой оси и нашли все те места, в которых она может находиться, чтобы требование задачи было выполнено.* Можно даже перечислить все рассмотренные нами промежутки для значений параметра a с подробным указанием по каждому из них, годится он или нет. Но разве все это и так не ясно, из контекста самого решения? Разве не ясно, что именно это и проделано нами в уме, коль скоро и ответ-то получен правильный?

Кроме того, ведь задача уже по своей постановке является весьма нестандартной. Кто и где определил и объяснил школьнику, каким языком необходимо излагать ее решение и до какой степени подробности? Выходит, в подобной ситуации на экзамене ему остается только одно: надеяться на мудрость и великодушие проверяющих.

Г. Нужна предельная аккуратность при исследовании концевых точек указанных в ответе промежутков, поскольку

очень легко сделать ошибку при определении того, включать концы в ответ или нет.

Например:

- с одной стороны, весьма *правдоподобными*, хотя и неверными, являются высказывания: отрезок длиной 1,5 помещается в любом промежутке длиной 1,5, а два непересекающихся отрезка длиной по 1,5 каждый помещаются в любом промежутке длиной 3;
- с другой стороны, несколько *подозрительными*, хотя и верными, являются высказывания: отрезок длиной 1,5 помещается в любом промежутке длиной больше 1,5, а два непересекающихся отрезка длиной по 1,5 каждый помещаются в любом промежутке длиной больше 3.

3. Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства $x(x-2a-6)+a^2<\dfrac{6a^2}{x}-12a$ можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

4. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $\dfrac{36-(a+12)x}{x^2}<\dfrac{12a}{x^2}\left(\dfrac{3}{x}-1\right)-1$ содержит число 7, а также содержит два непересекающихся отрезка, каждый из которых длиной 7.

5. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $1-\dfrac{a}{x}<\dfrac{8}{x}\left(1-\dfrac{a+2}{x}+\dfrac{2a}{x^2}\right)$ содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

6. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x^2-\dfrac{25a}{x}+10a<(10+a)x-25$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 7, но не содержит никакого отрезка длиной 9.

7. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $3(2a+3)-x(a-x)<3\left(\frac{3a}{x}+2x\right)$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 5, но не содержит никаких двух непересекающихся отрезков, каждый из которых длиной 3.

2.11. Задание С5, 2005 г.

1. **Демоверсия.** Известно, что уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

В этой задаче имеются ставшие уже привычными проблемы с формулировкой. Действительно, фраза *«известно, что уравнение имеет хотя бы один корень»* подразумевает, что уравнение уже фиксировано, т.е. параметр p в нем уже задан. Но тогда как же понимать задание *«найти все значения параметра p ...»*?

Видимо, вопреки формулировке задачи, надо найти все такие значения параметра p, при которых выполнены два логически равноправных условия:

- во-первых, первое уравнение имеет хотя бы один корень,
- во-вторых, оба уравнения имеют одинаковое число корней.

Вглядимся в условие задачи. В нем первое уравнение — квадратное, в крайнем случае — линейное (кстати, не стоит забывать и об этом коварном крайнем случае), а второе уравнение, после элементарных преобразований, — кубическое относительно переменной

$$t=\sqrt{x-3}$$

принимающей неотрицательные значения.

Таким образом, можно сказать определенно, что в условии данной задачи число корней обоих уравнений, будучи одинаковым, должно быть равно только 1 или 2.

Решение.

1. $\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$

$\Leftrightarrow(2(x-3)+7)\left(\sqrt{x-3}+3\right)=21-p\neq0$

$\Leftrightarrow\left(2t^2+7\right)(t+3)=21-p\neq0$, где $t=\sqrt{x-3}\geqslant0$,

$\Leftrightarrow -(2t^3+6t^2+7t)=p$ $(\Rightarrow p\leqslant0\Rightarrow p\neq21)$.

2. $f(t)=-(2t^3+6t^2+7t)$, $t\geqslant0$:

а) $f'(t)=-(2t^3+6t^2+7t)'=-(6t^2+12t+7)=-6(t+1)^2-1<0$,

б) f — убывает,

в) $f(t)=p$ — не более одного корня,

г) $E(f)=(-\infty;f(0)]=(-\infty;0]$.

3. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда уравнения

$$f(t)=p \text{ и } (2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$$

имеют ровно по одному корню, т.е. в следующих двух случаях:

а) $\begin{cases}2p+3\neq0 & \text{(первое уравнение — квадратное)}\\ (p+3)^2-4(2p+3)=0 & (\Leftrightarrow p^2-2p-3=0)\\ p\leqslant0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(p-3)(p+1)=0\\ -3/2 \neq p \leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow p=-1;$$

б) $\begin{cases}2p+3=0 & \text{(первое уравнение — линейное)}\\ p+3\neq 0 & \text{(его старший коэффициент не равен 0)}\\ p\leqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow p=-1{,}5$.

Ответ: $p=-1,\ -1{,}5$.

Комментарий

Итак, в приведенном решении выделены следующие три *этапа*:

- сведение второго уравнения к кубическому,
- исследование полученного уравнения,
- получение условий, необходимых и достаточных для выполнения требования задачи.

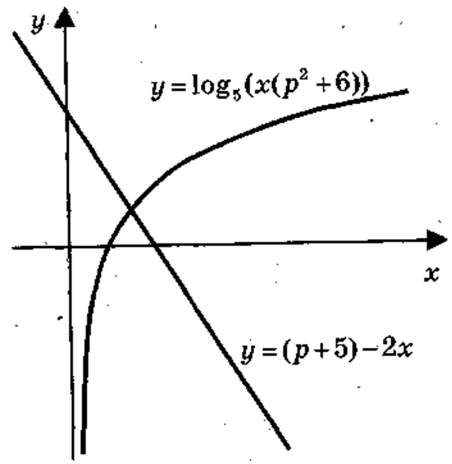
Некоторые этапы нашего решения были разбиты на свои, более мелкие части: в них дополнительно выделялись пункты или случаи. Так, второй его этап содержал вычисление производной функции f с исследованием ее знака, выводы о монотонности и области значений этой функции, а также о числе корней первого уравнения. В третьем же этапе были рассмотрены два случая, когда первое уравнение квадратное и когда оно линейное.

2. Даны два уравнения $\log_5\left(x(p^2+6)\right)=p+5-2x$ и $x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x^2(5p+1)+(4-3p)x+3}{x(3p+2)}$. Значение параметра p выбирается так, что $3p+2\neq 0$ и число различных корней первого уравнения равно сумме числа $p-3$ и числа различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Несмотря на пугающий вид самих уравнений, некоторые результаты может дать уже их первичный осмотр.

- Левая и правая части первого уравнения имеют разную монотонность по переменной x (одна возрастает, другая убывает). Поэтому число его корней равно либо 0, либо 1.
- Если во втором уравнении избавиться от знаменателя, то оно станет не более чем квадратным. Поэтому число его корней равно либо 0, либо 1, либо 2.

Ну что же, все не так страшно: в худшем случае придется рассмотреть 6 вариантов. Изучив поглубже первое уравнение, точнее, взаимное расположение эскизов графиков левой и правой его частей, понимаем, что на самом-то деле оно имеет ровно один корень. Но это утверждение нужно будет в тексте решения еще обосновать.



Так что случаев становится уже не 6, а 3. Уменьшить их число, возможно, удастся и еще, но только за счет более детального анализа второго уравнения.

Решение.

1. $p-3\in\mathbb{Z}$ (как разность целых чисел) $\Rightarrow p\in\mathbb{Z}$.

2. $\log_5\left(x(p^2+6)\right)=p+5-2x$ — ровно один корень, т.к.:

   а) $f(x)=\log_5\left(x(p^2+6)\right)$ — определена при $x\in(0;\infty)$, непрерывна и возрастает от $-\infty$ до ∞ (т.к. $p^2+6>0$),

   б) $g(x)=p+5-2x$ — определена при $x\in(-\infty;\infty)$, непрерывна и убывает от ∞ до $-\infty$,

   в) при $x\to\infty$: $f(x)>g(x)$,

   г) при $x\to+0$: $f(x)<g(x)$.

3. $x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x^2(5p+1)+(4-3p)x+3}{x(3p+2)}$

   $\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+3)(3p+2)=x^2(5p+1)+(4-3p)x+3\\ x\neq 0\end{cases}$

   $\Leftrightarrow(2p-1)x^2-(3p-4)x-3(3p+1)=0$

   ($\Rightarrow x\neq 0$, иначе $p=-\dfrac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$)

   $\Leftrightarrow(x-3)\left((2p-1)x+(3p+1)\right)=0$

   ($\Rightarrow 2p-1\neq 0$, иначе $p=\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$)

   $\Leftrightarrow(x-3)\left(x+\dfrac{3p+1}{2p-1}\right)=0$ — ровно два корня (т.к. $-\dfrac{3p+1}{2p-1}\neq 3$, иначе $-3p-1=3(2p-1)\Rightarrow p=\dfrac{2}{9}\notin\mathbb{Z}$).

4. $1=(p-3)+2\Leftrightarrow p=2$.

5. $p=2$:

   $\log_5\left(x(p^2+6)\right)=p+5-2x\Leftrightarrow\log_5 10x=7-2x\Leftrightarrow x=2{,}5$, т.к.:

   а) $\log_5 10\cdot 2{,}5=2=7-2\cdot 2{,}5$,

   б) корень единственный.

О т в е т: $x=2{,}5$.

Комментарий

А. Смешно сказать, но представленное нами решение этой задачи, согласно критериям проверки работ ЕГЭ 2005 года, скорее всего, не заслуживает высшей оценки в 4 балла. Более того, на экзамене оно могло быть оценено с равным успехом как в 3 балла, так и в 2, и даже в 1, в зависимости от въедливости проверяющего.

Оказывается, нами недостаточно обоснован так называемый *ключевой момент* решения, необходимый для получения не только 4 баллов, но и 3, и даже 2. А именно, в первом пункте приведенного решения мы не сказали явно, что исследуемые нами функции *называются* логарифмической и линейной, и не указали экзаменатору на числовые неравенства

$$5>1 \text{ и } -2<0,$$

справедливость которых как раз и является причиной возрастания логарифмической функции и убывания линейной. А ведь впечатление-то у нас было, скорее, противоположным: даже упоминание очевидного неравенства

$$p^2+6>0$$

в тексте такого достаточно содержательного решения представлялось слегка излишним.

Вот так! Можно подумать, что главная цель и основное содержание задания — вовсе не в разматывании запутанного клубка сложных взаимосвязей между двумя уравнениями, а в демонстрации знания простейших свойств логарифмической и линейной функций.

Основной аргумент составителя задачи (и критериев ее оценки) в пользу такого жесткого подхода к оформлению решения состоит в следующем: раз выпускник не сказал, что основание логарифма больше единицы, значит, он действовал наобум и получил правильный вывод случайно. И составителю невдомек, что выпускнику это могло быть так же очевидно, как и ему самому, составителю.

Чтобы протестировать выпускника по упомянутому моменту, достаточно было взять логарифм по другому основанию, меньшему единицы, или выбрать линейную функцию с отрицательным угловым коэффициентом (что, кстати, и было сделано в задании). Зачем же оценку-то снижать при правильном решении? Ведь должна же быть хоть какая-то презумпция невиновности.

Б. Для исследования числа корней первого уравнения мы прибегли к ***использованию непрерывности.*** Более точно, для обоснования того, что упомянутое уравнение имеет ровно один корень, мы должны были доказать два утверждения:

- во-первых, корней — *не более* одного, что вытекает из *монотонности* разности

$$F(x)=\log_5\left(x\left(p^2+6\right)\right)-\left(p+5-2x\right)$$

левой и правой части уравнения. В решении задачи мы не выписывали саму разность этих двух функций, а лишь отметили, что они имеют противоположную монотонность. Кстати, очевидное утверждение о том, что строго монотонная функция не может принимать никакое свое значение дважды, в школе громко именуется *теоремой о корне*;

- во-вторых, корней — *не менее* одного, что вытекает из *непрерывности* той же разности F на некотором отрезке, на концах которого она принимает значения разного знака. Мы в решении не предъявили этот отрезок, однако объяснили, почему он существует. Заметим, что используемое при этом утверждение является следствием *теоремы о промежуточном значении непрерывной функции* (хотя многие, по ошибке, считают, что и оно включено в пресловутую теорему о корне).

Напомним, что свойство непрерывности выполнено для всех элементарных функций и потому не обязано специально оговариваться на школьном экзамене. Однако мы не сдержались и

упомянули его в решении явно, поскольку по существу-то именно оно и позволило констатировать существование корня.

В. В последнем пункте приведенного выше решения обсуждаемой задачи возникло уравнение

$$\log_5 10x=7-2x\ ,$$

для решения которого потребовалось применить ***метод подбора.*** Его суть состоит в следующем:

- сначала каким-либо образом подобрать корень уравнения (в данном случае корень

$$x=2{,}5$$

был просто угадан),

- затем доказать, что других корней уравнение не имеет (ранее было доказано, что данное уравнение имеет не более одного корня).

С логической точки зрения метод подбора прямо противоположен *методу проверки*, согласно которому нужно действовать в обратном порядке:

- сначала доказать, что корни уравнения не выходят за пределы некоторого конкретного множества (как правило, конечного),
- затем проверить (например, подстановкой), какие числа из найденного множества действительно являются корнями.

Г. *Разложение неприведенного квадратного трехчлена*

$$P(x)=(2p-1)x^2-(3p-4)x-3(3p+1)$$

на множители в решении задачи мы совершили каким-то чудесным способом — просто предъявили его, и все. Как же можно было до него догадаться? Один из наиболее приятных (в техническом плане) способов состоит в следующем:

- сначала преобразуем исходный трехчлен в другой, перенеся старший коэффициент в виде множителя к свободному члену

$$Q(t)=t^2+(-3p+4)t-3(2p-1)(3p+1)\ ,$$

- затем разложим полученный свободный член на два множителя, сумма которых равна коэффициенту при первой степени

$$\begin{cases}-3(2p-1)(3p+1)=(-6p+3)(3p+1)\\ -3p+4=(-6p+3)+(3p+1),\end{cases}$$

получив разложение

$$Q(t)=\left(t+(-6p+3)\right)\left(t+(3p+1)\right)$$

- наконец, запишем окончательное разложение

$$P(x)=(2p-1)\left(x+\frac{-6p+3}{2p-1}\right)\left(x+\frac{3p+1}{2p-1}\right)=$$
$$=\left(x-3\right)\left((2p-1)x+(3p+1)\right).$$

Разумеется, все это ни в коем случае не следует писать в чистовике, чтобы не быть принятым за сумасшедшего после первого же действия.

3. Даны два уравнения $\log_7\left(x\left(12+\sqrt{-p}\right)\right)=p(p-1)-6x+3$ и $2x-\frac{25}{x}=\frac{x^2-(5p-3)x+15}{x(p+1)}$. Значение параметра p выбирается так, что $p\leqslant 0$, $p\neq -1$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $p+5$ дает число различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

4. Даны два уравнения $\log_2\left(x\sqrt{17-4p}\right)=3-4p-5x$ и $3x-\frac{1}{x}=\frac{x^2+2(p-1)x+3}{x(1+p)}$. Значение параметра p выбирается так, что $17-4p>0$, $p\neq -1$ и число различных корней первого уравнения равно сумме числа $5+3p$ и числа различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

5. Даны два уравнения $\frac{x^3+(6p+13)x+4}{x-1}=x^2+p$ и $4\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{x+6}\right)=14-\left(3+4(p+1)^{-2}\right)x$. Значение параметра p выбирается так, что $p\neq -1$ и при умножении числа различных корней первого уравнения на число различных корней второго уравнения получается число $p+3$. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

6. Даны два уравнения $\frac{x^4+4(2-p)x+(p^2-3p+10)}{x^2+p}=x^2-p-4$ и $4\cos\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)=\left(3+\sqrt{p+3}\right)x-5$. Значение параметра p выбирается так, что $p\geqslant -3$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $3+p$ дает число различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

7. Даны два уравнения $\sqrt{54p+73-3(24+19p)x}=3x-3-2p$ и $\left(1+9^{\frac{p+2}{p+3}}\right)^x=37-x$. Значение параметра $p\neq -3$ выбирается так, что число различных корней первого уравнения равно сумме числа $p+2$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

8. Даны два уравнения $\sqrt{8(p+2)x-(16p+31)}=2x+p-2$ и $\left(3+3^{\frac{p+3}{p-1}}\right)^x=26-5x$. Значение параметра $p\neq 1$ выбирается так, что число различных корней первого уравнения равно произведению числа $0{,}5(p+3)$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

2.12. Задание С5, 2006 г.

1. **Демоверсия.** Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства $\log_{0,5x-1}\left(\log_4\frac{x-11}{x-8}\right)\geqslant 0$, а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Похоже, прежде всего, нужно решить данное неравенство. В противном случае придется подставлять в него члены неизвестной арифметической прогрессии, чего мы делать, совершенно точно, не умеем.

Решение.

1. $\log_{0,5x-1}\left(\log_4\frac{x-11}{x-8}\right)\geqslant 0$

Рассмотрим два случая:

а) $\begin{cases}0{,}5x-1>1\\ \log_4\frac{x-11}{x-8}\geqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\ \frac{x-11}{x-8}\geqslant 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\ \frac{x-7}{x-8}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow 7\leqslant x<8;$

б) $\begin{cases}0<0{,}5x-1<1\\ 0<\log_4\frac{x-11}{x-8}\leqslant 1\ \left(\Leftrightarrow 1<\frac{x-11}{x-8}\leqslant 4\Leftrightarrow 1<\frac{11-x}{8-x}\leqslant 4\right)\end{cases}$

$\Leftrightarrow 2<x<4$

$\left(\Rightarrow 1<\frac{11-x}{8-x}\leqslant 4\right.$, т.к. $7<11-x<9$, $4<8-x<6$).

Итак, имеем

$$\left[\begin{array}{l}7\leqslant x<8\\ 2<x<4.\end{array}\right.$$

2. $a=a_1$ удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда существует арифметическая прогрессия $a_1,a_2,\ldots$:

$$2<a_1<a_2<4\leqslant a_3<7\leqslant a_4<8\leqslant a_5$$

(a_2 и a_4 должны лежать в разных промежутках, иначе в одном промежутке с ними будет и a_3), т.е. когда существует d:

$$2<a<a+d<4\leqslant a+2d<7\leqslant a+3d<8\leqslant a+4d.$$

3. Рассмотрим два случая (поскольку $a>2$):

а) $2<a<2{,}5$ — подходит, т.к. если положить $a+3d=7$, то $d=\frac{7-a}{3}>0$, $a+d=\frac{7+2a}{3}<\frac{7+5}{3}=4$,
$a+2d=\frac{14+a}{3}>4$,
$a+2d<a+3d=7$,
$a+4d=\frac{28-a}{3}>\frac{28-2{,}5}{3}>8$,
т.е. все условия задачи выполнены;

б) $a\geqslant 2{,}5$ — не подходит, т.к. иначе $a+d<4$,
$d=(a+d)-a<4-2{,}5=1{,}5$,
$a+3d=(a+d)+2d<4+2\cdot 1{,}5=7$,
т.е. условие задачи не выполнено.

Ответ: $(2;\ 2{,}5)$.

Комментарий

А. В первом пункте нашего решения при отбрасывании логарифма были разобраны два случая. А можно было обойтись и без перебора, воспользовавшись ***методом замены множителя***, который привел бы к следующему, более грубому (не учитывающему некоторых специфических деталей) тексту решения:

$$\log_{0,5x-1}\left(\log_4\frac{x-11}{x-8}\right)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\lg\left(\log_4\dfrac{x-11}{x-8}\right)}{\lg(0{,}5x-1)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{\lg\left(\log_4\dfrac{x-11}{x-8}\right)-\lg(\log_4 4)}{\lg(0{,}5x-1)-\lg 1}\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\log_4\dfrac{x-11}{x-8}-\log_4 4}{(0{,}5x-1)-1}\geqslant 0\\ \log_4\dfrac{x-11}{x-8}>0\\ 0{,}5x-1>0\end{cases},$$

т.к. $\lg u-\lg v\sim u-v$ при $u,v>0$,

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\dfrac{x-11}{x-8}-4}{0{,}5x-2}\geqslant 0\\ \dfrac{x-11}{x-8}-1>0\\ 0{,}5x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-3x+21}{(x-8)(x-4)}\geqslant 0\\ \dfrac{-3}{x-8}>0\\ x>2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2<x<8\quad(\Rightarrow x-8<0)\\ \dfrac{x-7}{x-4}\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7\leqslant x<8\\ 2<x<4.\end{array}\right.$$

Б. В третьем пункте решения мы исследовали с определенных позиций систему из восьми неравенств. При этом мы фактически заранее угадали (скажем, с помощью интуиции) ответ на поставленный вопрос, а в саму решении только доказали, что он правилен.

Другой, более естественный подход к задаче — преобразо*вание системы к специальному виду, удобному для исследо*вания:

$$\begin{cases}a>2\\ 0<d<4-a\\ \dfrac{4-a}{2}\leqslant d<\dfrac{7-a}{2}\\ \dfrac{7-a}{3}\leqslant d<\dfrac{8-a}{3}\\ \dfrac{8-a}{4}\leqslant d.\end{cases}$$

Для существования решения такой системы, относительно неизвестной d, необходимо и достаточно, чтобы всякое число, ограничивающее ее слева, было меньше ограничивающего ее справа.

Первые две строки системы дают условия

$$2<a<4,$$

из которых следуют оценки

$0<\dfrac{4-a}{2}<\dfrac{8-a}{4}$ $(\Leftrightarrow 0<a<4)$,

$\dfrac{8-a}{4}<\dfrac{7-a}{3}$ $(\Leftrightarrow a<4)$,

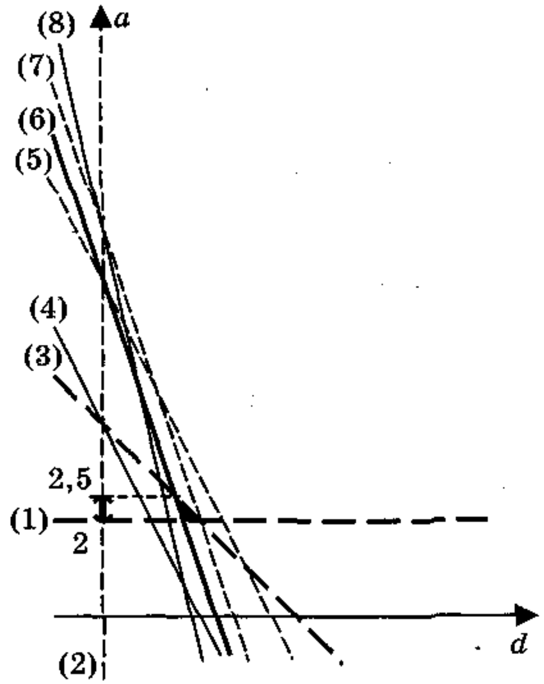
$\dfrac{8-a}{3}<\dfrac{7-a}{2}$ $(\Leftrightarrow a<5)$,

$4-a<\dfrac{8-a}{3}$ $(\Leftrightarrow a>2)$.

Поэтому наибольшее из левых чисел равно $\dfrac{7-a}{3}$, а наименьшее из правых равно $4-a$, следовательно, существование решения равносильно условию

$$\begin{cases}2<a<4\\ \dfrac{7-a}{3}\leqslant 4-a\end{cases}\Leftrightarrow 2<a<2{,}5.$$

В. Наконец, исследование той же системы неравенств можно провести с помощью ***графической иллюстрации***, если нарисовать на координатной плоскости множество пар (d,a), удовлетворяющих системе.



Для этого достаточно:

- преобразовать систему к виду

$$\begin{cases} a>2 & (1) \\ d>0 & (2) \\ a<4-d & (3) \\ a\geqslant 4-2d & (4) \\ a<7-2d & (5) \\ a\geqslant 7-3d & (6) \\ a<8-3d & (7) \\ a\geqslant 8-4d & (8), \end{cases}$$

- изобразить на плоскости все граничные линии, на которых неравенства обращаются в равенства (строгим неравенствам соответствуют прерывистые линии, а нестрогим — сплошные),
- выбрать ту область, в которой выполнены все неравенства системы (на рисунке это крошечный закрашенный треугольник),
- спроектировать выбранную область на ось ординат (рассуждая при этом так: на оси ординат требуется выбрать те точки a, которые лежат на одной горизонтали хотя бы с одной точкой (d,a) закрашенного множества),
- вычислить ординату точки пересечения прямых (3) и (6) из уравнения

$$\begin{cases} a=4-d \\ a=7-3d \end{cases} \left|\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}\right. \Rightarrow 3a-a=12-7 \Rightarrow a=2{,}5.$$

Не скроем, построение этих графиков требует от исполнителя весьма кропотливого труда и ювелирной точности. Зато не требует, соответственно, никакой сообразительности и изобретательности.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $4\sin a-3$ и $8\cos 2a+16\sin a+1$ являются решениями неравенства $\dfrac{(21x-2x^2+65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2}\geqslant 0$.

На первый взгляд, наиболее естественным представляется такой вариант решения задачи: подставить данные выражения в неравенство вместо неизвестной и решить полученную систему. Однако если это и делать, то предварительно упростив сами подставляемые выражения, которые фактически зависят только от одной величины $\sin a$ (или от $4\sin a$ или даже от $4\sin a-3$). Относительно нее первое из них — линейно, а второе — квадратично. Так что результат подстановки нас не сильно обнадеживает.

Следовательно, как и в демоверсии, наверное, более правильно все же сначала решить неравенство, а потом уже исследовать вопрос о вхождении в множество его решений обоих данных выражений. Тем более, что неравенство сравнительно несложно решается в явном виде.

Решение.

1. $\dfrac{(21x-2x^2+65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2}\geqslant 0$, причем $2=\log_3 3^2=\log_3|9|$,

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2\left(x-\frac{26}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)(x+2)}{|x-9|^2-|9|^2}\leqslant 0\\ x+2\geqslant 0\\ |x-9|>0\end{cases},$$

т.к. $(\log_3 u-\log_3 v)\sim(u-v)$ при $u,v>0$, $(|u|-|v|)\sim(u^2-v^2)$ и $\sqrt{u}\sim u$ при $u\geqslant 0$,

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9\neq x\geqslant -2\quad(\Rightarrow x+2{,}5>0)\\ \dfrac{(x-13)(x+2)}{x(x-18)}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\leqslant x<0\\ 13\leqslant x<18.\end{array}\right.$$

2. $x_1=4\sin a-3$ — решение неравенства тогда и только тогда, когда
$-2\leqslant x_1<0$, т.к. $x_1\leqslant 4-3<13$,
$\Leftrightarrow -2\leqslant 4s-3<0$, где $s=\sin a$, $\Leftrightarrow 0{,}25\leqslant s<0{,}75$.

3. $x_2=8\cos 2a+16\sin a+1=8(1-2s^2)+16s+1=-16s^2+16s+9$
$=13-(4s-2)^2=f(s)$, $0{,}25\leqslant s<0{,}75$,
причем
$E(4s-2)=[4\cdot 0{,}25-2;4\cdot 0{,}75-2)=[-1;1)$,
$E\left((4s-2)^2\right)=\left[0^2;(-1)^2\right]=[0;1]$,
$E(f)=[13-1;13-0]=[12;13]$.

4. x_1,x_2 — решения неравенства тогда и только тогда, когда
$f(s)=13\Leftrightarrow\sin a=0{,}5\Leftrightarrow a=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $a=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Комментарий

А. Исходное неравенство решается и ***перебором случаев***, которых без учета неравенства

$$\sqrt{x+2}\geqslant 0$$

набирается изрядное количество, а с учетом — только три:

1. $\begin{cases}x+2=0\\ \log_3|x-9|\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow x=-2$;

2. $\begin{cases}x+2>0\\ 21x-2x^2+65\geqslant 0\\ \log_3|x-9|>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2>0\\ 2(x-13)(x+2{,}5)\leqslant 0\\ |x-9|>9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x\leqslant 13\\ \left[\begin{array}{l}x-9>9\\ x-9<-9\end{array}\right.\end{cases}$
$\Leftrightarrow -2<x<0$;

3. $\begin{cases}x+2>0\\ 21x-2x^2+65\leqslant 0\\ \log_3|x-9|<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2>0\\ 2(x-13)(x+2{,}5)\geqslant 0\\ 0<|x-9|<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 13\\ x-9<9\end{cases}$
$\Leftrightarrow 13\leqslant x<18$.

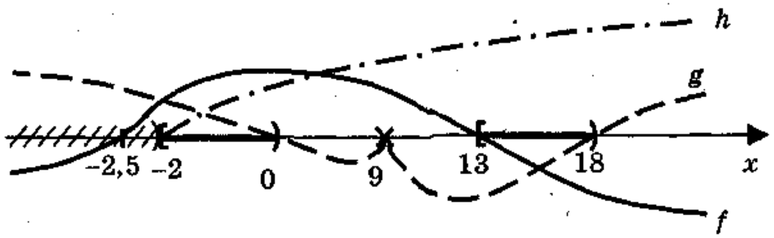
Б. Решим наше неравенство ***обобщенным методом интервалов.***

1. $f(x)=21x-2x^2+65$,
$g(x)=\log_3|x-9|-2$,
$h(x)=\sqrt{x+2}$.

а) $f(x)=0\Leftrightarrow(x-13)(x+2{,}5)=0\Leftrightarrow x=13,\ -2{,}5$, б) $g(x)=0 \Leftrightarrow \log_3|x-9|=2 \Leftrightarrow |x-9|=9 \Leftrightarrow x=0,\ 18$,

в) $h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow x=-2$.

2. $\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ |x-9|>0 \end{cases} \Leftrightarrow 9\neq x\geqslant -2$.



Ответ изображен на рисунке.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $4\cos a+4$ и $8\cos 2a-32\cos a+23$ являются решениями неравенства $\dfrac{1-\log_5|x-4|}{(114-x-3x^2)\sqrt{x+3}}\leqslant 0$.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $3\sin a+5$ и $9\cos 2a-36\sin a-18$ являются решениями неравенства $\dfrac{(25x-3x^2+18)\sqrt{x-1}}{\log_4|x-7|-1}\geqslant 0$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\cdot 2^{a-2}$ и $3a\cdot 2^a-4a^2\cdot 4^{a-3}-27$ являются решениями неравенства $\log_{x-5,5}\left(\log_4\dfrac{x-13}{x-10}\right)\geqslant 0$.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\cdot 4^a$ и $143-3a\cdot 4^{a+1,5}+a^2\cdot 16^a$ являются решениями неравенства $\log_{12,5-x}\left(\log_4\dfrac{x+5}{x+2}\right)\geqslant 0$.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\sqrt{a-2}-5$ и $2a^2+24a\sqrt{a-2}-a^3-131$ являются решениями неравенства $\log_{2x-12}\left(\log_5\left(2x^2-41x+200\right)\right)\geqslant 0$.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\sqrt{a-6}-13$ и $6a^2+40a\sqrt{a-6}-a^3-388$ являются решениями неравенства $\log_{0,5x-2}\left(\log_3\left(x^2-20x+99\right)\right)\geqslant 0$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\sqrt{3a-11}-5$ и $11a^2+20a\sqrt{3a-11}-3a^3-93$ являются решениями неравенства $\log_{0,5x-2}\left(\log_4\dfrac{12}{\sqrt{3x-12}}\right)\leqslant 0$.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\sqrt{2a-5}-2$ и $5a^2+6a\sqrt{2a-5}-2a^3-5$ являются решениями неравенства $\log_{0,5x}\left(\log_2\dfrac{10}{\sqrt{5x+5}}\right)\leqslant 0$.

2.13. Задание С5, 2007 г.

1. **Демоверсия.** Найдите количество всех решений системы уравнений $\begin{cases} y(1-x)^2+x^3=0 \\ 2x-\dfrac{10}{x\log_y 2}=5\log_{32}(0,125y^2)-7. \end{cases}$

Подозрительно, почему в задаче ищутся не сами решения системы, а только их количество? Такая формулировка — намек на то, что некоторые решения не вычисляются явно. Но тогда для решения задачи необходимо будет установить хотя бы факт их существования.

Заметим, что каждое из уравнений системы содержит обе неизвестных, поэтому не ясно, с какого уравнения начинать. Из первого уравнения можно выразить y через x и подставить полученное выражение во второе уравнение, которое, правда, при этом не упростится, зато будет содержать только одну неизвестную. По всей видимости, лучше с подстановкой пока повременить и сделать ее только в последний момент, когда она будет более действенной.

Решение.

$$\begin{cases} y(1-x)^2+x^3=0 \\ 2x-\dfrac{10}{x\log_y 2}=5\log_{32}(0{,}125y^2)-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x)^2+x^3=0 \\ 2x-\dfrac{10\cdot\log_2 y}{x}=2\log_2 y-10 \end{cases}$$

$(\Rightarrow y\neq 1$, иначе $\begin{cases} x=-5 \\ (1+5)^2=5^3, \end{cases}$ что неверно)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x)^2+x^3=0 \\ (x+5)x=(x+5)\log_2 y \end{cases}$$

$(\Rightarrow x\neq 0$, иначе $\begin{cases} y=0 \\ \log_2 y=0, \end{cases}$ что неверно)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x)^2+x^3=0 \\ (x+5)(x-\log_2 y)=0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1. $\begin{cases} x=-5 \\ y=\dfrac{5^3}{(1+5)^2} \ (>0); \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\log_2 y \\ y(1-x)^2+x^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2^x \\ 2^x(x-1)^2=-x^3. \end{cases}$

Рассмотрим два подслучая:

а) $x>0$:
$2^x(x-1)^2\leqslant 0>-x^3$,
поэтому система решений не имеет;

б) $x\leqslant 0$ $(\Rightarrow x\neq 1)$:
$2^x(x-1)^2=-x^3 \Leftrightarrow 2^x=-\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$:

- $f(x)=-\dfrac{x^3}{(1-x)^2}$ — убывает, т.к.
  $f'(x)=-\dfrac{3x^2(x-1)^2-2x^3(x-1)}{(x-1)^4}$
  $\sim 3(x-1)-2x$ (т.к. $x^2>0$, $x-1<0$)
  $=x-3<0$,
- $g(x)=2^x$ — возрастает,
- $g(0)=1>0=f(0)$,
- $g(-2)=\dfrac{1}{4}<\dfrac{8}{9}=f(-2)$,

поэтому система имеет ровно одно решение $(x_0;y_0)$, отличное от найденного в случае 1), т.к. $x_0>-2>-5$.

Ответ: 2.

Комментарий

А. В приведенном решении мы довольно ловко отделались от неравенств типа

$$y\neq 1,\ y>0 \text{ и } x\neq 0,$$

не включив их в систему, а заметив, наоборот, что они выполняются автоматически. Точнее, что они продолжают вытекать из системы даже после некоторых ее преобразований (перехода к новому числовому основанию логарифма, избавления от логарифма и избавления от знаменателя дроби).

Б. И все же, одно ограничение пришлось проверить в решении явно, а именно, неравенство

$$x_0 \neq -5,$$

гарантирующее, что две найденных в решении пары, в самом деле, не одинаковы. В этом необходимо было убедиться для ответа на вопрос о количестве решений, учитывая, что одна из двух пар так и не была предъявлена. Без этой проверки решение содержало бы логический изъян.

В. Любопытно, что в формулировке данной задачи трудно усмотреть ***использование производной***, поскольку в ней нет вопросов ни о точках экстремума какой-либо функции, ни о ее наибольшем или наименьшем значении, ни даже о монотонности. Производная понадобилась в решении как один из элементов в обосновании того факта, что уравнение

$$2^x(x-1)^2 = -x^3$$

при условии

$$x \leqslant 0$$

имеет ровно одно решение.

Г. В действительности в обосновании существования корня усматривается также и ***использование непрерывности*** функций

$$f(x) = -\frac{x^3}{(1-x)^2} \text{ и } g(x) = 2^x,$$

но как мы уже отмечали, это свойство функций специально оговаривать нет нужды. Кроме того, непрерывность функции f здесь вытекает еще и из попутно установленной ее дифференцируемости.

2. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0 \\ 9\sin\frac{\pi}{x} + \cos((5x+1)y) = y\left(y + \frac{2}{x} - 1\right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x)} \cdot \sin y \end{cases}$$

не имеет решений.

Более устрашающую систему трудно себе представить, да она, наверное, уже и не поместилась бы в строке. Однако делать нечего, придется повозиться.

- Первое уравнение — кубическое, от одной неизвестной. Можно поискать его рациональный корень, а потом, найдя остальные, последовательно подставлять их во второе уравнение. Но этот лобовой способ решения системы слишком бросается в глаза и к тому же довольно примитивен. Сомнительно, что расчет составителя был именно на него.
- Второе уравнение — от двух неизвестных, содержит совершенно разнородные выражения, в общем, оно трансцендентное. Зато выражение под знаком радикала зависит только от одной неизвестной, но опять же с кубическим многочленом в числителе (после приведения к общему знаменателю).

С какого из этих многочленов лучше начать? С того, у которого корни проще, скажем, у которого есть хотя бы один целочисленный корень. Повозившись с многочленами для пробы в черновике, выбираем наименее трудоемкий путь.

Решение.

1. Из второго уравнения:

$$\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^3 - 5x^2 - 16x - 4}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(25x^2 + 20x + 4)}{x} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(5x+2)^2}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + 2 = 0 \\ \frac{x-1}{x} \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{2}{5} \\ \ldots \end{array}\right.$$

2. Рассмотрим два случая:

а) $0<x\leqslant 1$:
$15x^3+36x^2+22x+4>4>0$,
поэтому первое уравнение системы не выполнено;

б) $x=-\dfrac{2}{5}$ $\left(\Rightarrow \dfrac{4}{x}+16+5x(1-5x)=0\right)$:

$$\begin{cases}15x^3+36x^2+22x+4=0\\ 9\sin\dfrac{\pi}{x}+\cos((5x+1)y)=y\left(y+\dfrac{2}{x}-1\right)+\sqrt{\dfrac{4}{x}+16+5x(1-5x)}\cdot\sin y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}15\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3+36\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2+22\left(-\dfrac{2}{5}\right)+4=0\\ 9\sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)+\cos((-2+1)y)=y(y-5-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\cdot 2+36-11\cdot 5+25=0 \quad (\text{— верно})\\ -9+\cos y=y(y-6)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos y=(y-3)^2.$$

Рассмотрим два подслучая:

- $y\in[2;4]\subset\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$:

  $\cos y<0\leqslant(y-3)^2$, поэтому корней нет,
- $y\notin[2;4]$:

  $\cos y\leqslant 1<(y-3)^2$, поэтому корней нет.

Итак, система р е ш е н и й н е и м е е т .

Комментарий

А. Заметим, что приведенное решение данной задачи опиралось на ***метод проверки***, согласно которому:

- сначала для одной из двух неизвестных, а именно, для x мы вывели из системы некое требование, точнее, необходимое и достаточное условие существования имеющегося в ней квадратного корня,
- затем мы проверили, может ли при каком-нибудь из полученных значений x и каком-нибудь значении неизвестной y выполняться система — оказалось, что нет, и тем самым требуемое утверждение было доказано.

Б. Решению последнего уравнения

$$\cos y=(y-3)^2$$

предшествовала ***графическая иллюстрация***, по которой было исследовано взаимное расположение графиков его левой и правой части. Оно помогло выработать стратегию доказательства того факта, что уравнение не имеет корней. И хотя в приведенном тексте нет ссылки на рисунок, ее вполне можно было бы и сделать. Более того, при наличии в решении содержательных графиков какую-то часть объяснений можно и опускать, а иногда красноречивая картинка может представлять собой и настоящее полное решение задачи.

Если бы между выражениями

$$\cos y \text{ и } (y-3)^2$$

можно было сразу втиснуть одну фиксированную величину, то и графики не понадобились бы. Однако никакое конкретное число не разделяет эти два выражения (наиболее вероятные кандидаты — единица или ноль — не подходят).

Попытаемся все же разбить числовую ось на такие части, чтобы для каждой из них в отдельности уже нашлась подходящая разделяющая константа. Совершая это разбиение оси, как раз и удобно опираться на графики.

По рисунку хорошо видно, что:

- пока вблизи вершины параболы косинус отрицателен, т.е. при

$$\frac{\pi}{2}<y<\frac{3\pi}{2},$$

косинусоида находится ниже параболы, лежащей целиком над осью абсцисс,

- как только парабола переваливает через планку, установленную на высоте 1, т.е. при

$$y<2 \text{ или } y>4,$$

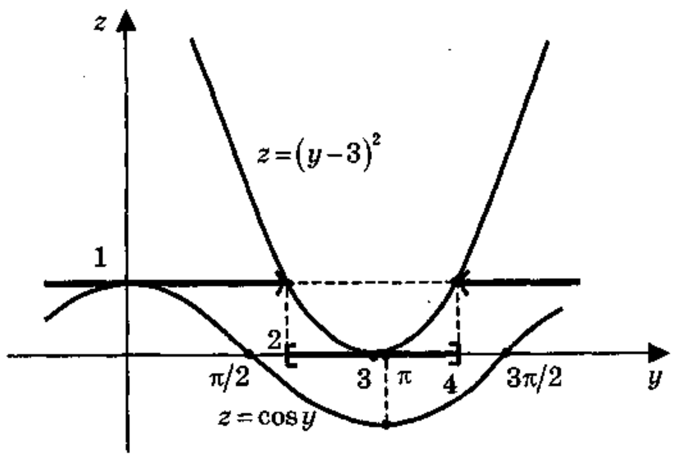
парабола становится недосягаемой для косинусоиды, которая вся лежит под этой планкой.

Остается, разобравшись с расположением перечисленных здесь множеств на оси абсцисс, убедиться (с удовлетворением), что их объединение покрывает всю ось.

Кстати, при наличии доброй воли проверяющего приведенная картинка служит для него полным доказательством неравенства

$$\cos y<(y-3)^2,$$

т.к. на ней дана исчерпывающая информация по данному вопросу.



В. Разыскивая в черновике рациональный корень многочлена

$$15x^3+36x^2+22x+4 \text{ или } 25x^3-5x^2-16x-4,$$

мы могли провести следующие наблюдения:

- каждый из этих многочленов имеет хотя бы один корень (поскольку его степень нечетна, а значит, при достаточно больших по модулю, но разных по знаку значениях переменной он принимает значения заведомо разного знака), однако не факт, что хотя бы один из его корней рациональный;
- целыми корнями обоих многочленов могут быть только числа ±1, ±2 и ±4 (целые делители свободного члена 4);
- дробные же корни первого многочлена при тех же числителях могут иметь знаменателями только числа 3, 5 и 15 (натуральные делители старшего коэффициента 15), а второго — только числа 5 и 25 (делители числа 25).

Первая же попытка подобрать целый корень приносит скромную удачу: второй многочлен имеет корень 1.

3. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}6x^3+22x^2+21x+6=0\\ \sin\pi x+\cos\big((6x+5)y\big)=-4y\left(y+\dfrac{2}{x}+4\right)+\sqrt{\dfrac{4}{x}+8-3x(1+3x)}\cdot\cos 2y\end{cases}$$

не имеет решений.

4. Найдите все корни уравнения $10x^3-63x^2+48x-9=0$, при подстановке каждого из которых в уравнение

$$(7x-1{,}1)\sin y+\frac{3}{x}-9=$$
$$=(x+3{,}7)y^2+\sqrt{\frac{169}{x+1}-100x^2+160x-169}\cdot\cos 2y$$

получится уравнение относительно y, имеющее более одного корня.

5. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}16x^3+40x^2+29x+6=0\\ \log_{13+4x}\left(5y+10+\dfrac{3}{x}\right)-7=y(5+12x)+\sqrt{\dfrac{9}{x}-8x(2x+1)+15}\cdot\log_7 y\end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все корни уравнения $6x^3+28x^2+39x+15=0$, при подстановке каждого из которых в уравнение

$$5\log_{10+3x}\left(y+8+\frac{5}{x}\right)-3=$$
$$=\frac{(13+6x)y}{4}+\sqrt{\frac{25}{x}-3x(7+3x)+5}\cdot\ln(y+5)$$

получится уравнение относительно y, имеющее более одного корня.

7. Докажите, что система уравнений
$$\begin{cases}10x^3+47x^2+52x+12=0\\ \log_{8+5x}\left(y+\frac{6}{x}+6\right)=\frac{y+10(x+1)}{y-1}+\sqrt{\frac{36}{x}-5x(7+5x)+24}\cdot\lg(y+1)\end{cases}$$
не имеет решений.

8. Докажите, что система уравнений
$$\begin{cases}3x^3+13x^2+20x+14=0\\ (6x+17)^y-5=\frac{7y}{x}+2^{x+y}\cdot\sqrt{9x(x+3)^2-3x^2+10x+49}\end{cases}$$
имеет единственное решение.

9. Докажите, что система уравнений
$$\begin{cases}8x^3+18x^2+15x+14=0\\ (10+4x)^y-2=y(5+\frac{7}{x})+7^{x+y}\cdot\sqrt{16x(x+1)^2+40x^2+89x+49}\end{cases}$$
имеет хотя бы два различных решения.

10. Докажите, что система уравнений
$$\begin{cases}9x^3+18x^2+17x+20=0\\ 2+(3x+10)^{y-1}\left(y+2+\frac{5}{x}\right)=y+11^{x-2y}\cdot\sqrt{9x^2(x+4)+3(x+7)^2+13x-122}\end{cases}$$
не имеет решений.

2.14. Задание С5, 2008 г.

1. **Демоверсия.** Решите уравнение $f(g(x))+g(3+f(x))=30$, если известно, что
$$f(x)=0,5x^4-4x+5 \text{ и } g(x)=\begin{cases}25, & x\geqslant 4,\\ 2^x+\frac{9}{5-x}, & x<4.\end{cases}$$

Условие задачи наводит на следующие размышления.

- С одной стороны, функция g задана кусочно, причем точкой раздела для ее аргумента служит число 4. Поэтому, прежде всего, напрашивается выяснить: с левой или с правой стороны от числа 4 лежит ее аргумент
$$t=3+f(x)$$
из второго слагаемого в уравнении.
- С другой стороны, функция f — многочлен четной степени с положительным старшим коэффициентом, а значит, она обязательно имеет наименьшее значение. И, кто знает, вдруг оно окажется бо́льшим или равным 1? Если это так, то получим
$$t\geqslant 4 \text{ и } g(t)=25,$$
после чего уравнение резко упростится. Надо бы эту версию проверить.

Р е ш е н и е.

1. $f(x)=0,5x^4-4x+5$:

а) $f'(x)=(0,5x^4-4x+5)'=2x^3-4$
$\sim x-\sqrt[3]{2}$.

б) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$, причем в точке $\sqrt[3]{2}$ производная меняет знак с минуса на плюс, в) $f_{наим} = f(\sqrt[3]{2}) = 0{,}5\cdot\sqrt[3]{2}^4 - 4\cdot\sqrt[3]{2} + 5 = 5 - 3\cdot\sqrt[3]{2}$,

г) $3 + f(x) \geq 3 + 5 - 3\cdot\sqrt[3]{2} = 8 - 3\cdot\sqrt[3]{2}$.

2. $8 - 3\cdot\sqrt[3]{2} \vee 4$

$\Leftrightarrow 4 \vee 3\cdot\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 64 \vee 27\cdot 2$ — верно, когда $\vee$ есть $>$,

$\Rightarrow 3 + f(x) > 4 \Rightarrow g\big(3 + f(x)\big) = 25$.

3. $f\big(g(x)\big) + g\big(3 + f(x)\big) = 30$

$\Leftrightarrow f\big(g(x)\big) + 25 = 30 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big) = 5$

$\Leftrightarrow 0{,}5\big(g(x)\big)^4 - 4g(x) + 5 = 5 \Leftrightarrow g(x)\big((g(x))^3 - 8\big) = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = 2$, т.к. $g(x) = 2^x + \dfrac{9}{5-x} > 0$ (при $x < 4$),

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + \dfrac{9}{5-x} = 2 \\ x < 4, \end{cases}$ т.к. если $x \geqslant 4$, то $g(x) = 25 > 2$,

$\Leftrightarrow x = -1$, поскольку:

а) $-1 < 4$ и $g(-1) = 2^{-1} + \dfrac{9}{5-(-1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$,

б) $x < 4$: $g(x) = 2^x + \dfrac{9}{5-x}$ — возрастает (сумма возрастающих функций).

О т в е т: $x = -1$.

Комментарий

А. Во втором пункте решения задачи мы привели ***цепочку сравнений***. Напомним, что в ней галочка $\vee$ означает неопределенный (скорее, до некоторого момента неизвестный, но всюду один и тот же) знак неравенства или равенства. Логика использования цепочки сравнений состоит в следующем:

- все ее преобразования должны быть *равносильными*, независимо от истинного значения галочки.
- последнее ее сравнение должно быть легко устанавливаемым или *очевидным*,
- тот знак, для которого последнее сравнение окажется верным, будет делать *верным* и первое сравнение — то, с которого цепочка начиналась.

Довольно часто приходится наблюдать, как школьники, пользуясь в работах цепочками сравнений, сначала между выражениями пишут галочки, а затем, в самом последнем сравнении — нужный знак. Но тогда логическая идея цепочки рушится. Понимая это, другие школьники по окончании сравнения стыдливо исправляют все галочки на тот знак, который определился у них в конце.

Б. В третьем пункте решения задачи мы воспользовались ***методом подбора***, с помощью которого решили возникшую в конце систему

$$\begin{cases} 2^x + \dfrac{9}{5-x} = 2 \\ x < 4 \end{cases}$$

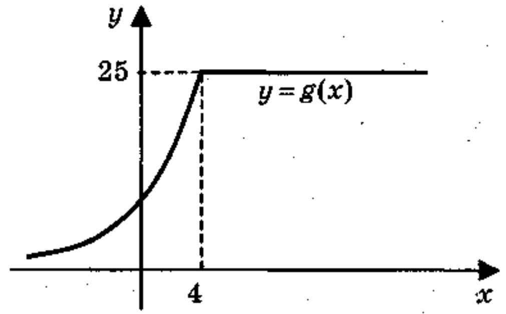
(угадав ее решение и доказав, что других нет).

Несмотря на то, что угадывать корни, вообще-то, не учат в школе (как, между прочим, и где бы то ни было еще), по-другому эту систему не решить, поскольку единственное ее уравнение не приводится ни к какому известному стандартному виду.

В. Ощутимую помощь при решении задачи может оказать ***графическая иллюстрация***, точнее, набросок графика функции g, наглядно демонстрирующий некоторые неприметные, но полезные свойства этой функции. Так, рисуя схематический график функции g, мы невольно вынуждены отметить для себя следующие моменты:

- функция принимает только положительные значения,
- при стремлении аргумента к $-\infty$ функция стремится к нулю,
- при стремлении аргумента к точке 4 и слева, и справа от нее функция стремится к одному и тому же числу 25,

- слева от точки 4 функция строго возрастает, а справа — постоянна.



Любопытно, но первое и последнее из перечисленных четырех свойств непосредственно использовались при решении уравнения

$$g(x)\left((g(x))^3-8\right)=0,$$

а косвенно — и остальные два.

Г. К этой же задаче приводим решение и критерии оценки из демоверсии:

Решение.

1. Т.к. $f'(x)=\left(0{,}5x^4-4x+5\right)'=2x^3-4$, то $x=\sqrt[3]{2}$ — единственная критическая точка. Если $x<\sqrt[3]{2}$, то $f'(x)<0$, а если $x>\sqrt[3]{2}$, то $f'(x)>0$. Значит, $x=\sqrt[3]{2}$ — точка минимума. Поэтому $f_{наим}=f\left(\sqrt[3]{2}\right)=5-3\cdot\sqrt[3]{2}$.

2. Т.к. $5-3\cdot\sqrt[3]{2}>1 \Leftrightarrow 4>3\cdot\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 64>27\cdot 2$, то $f_{наим}>1$. Значит, $3+f(x)>4$ для всех x и поэтому $g(3+f(x))=25$ для всех x. Получаем уравнение $f(g(x))+25=30 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(g(x))=5 \Leftrightarrow 0{,}5(g(x))^4-4g(x)+5=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0 \\ g(x)=2. \end{array}\right.$$

Т.к. $g(x)>0$ для всех x, то уравнение $g(x)=0$ корней не имеет.

3. Решим уравнение $g(x)=2$.
Если $x\geq 4$, то $g(x)=25$ и корней нет. Если $x<4$, то $g(x)=2^x+\frac{9}{5-x}$. Т.к. $g'(x)=\left(2^x+\frac{9}{5-x}\right)'=2^x\ln 2+\frac{9}{(5-x)^2}>0$, то на промежутке $(-\infty;4)$ функция g возрастает. Значит, уравнение $g(x)=2$ имеет не более одного корня, а один корень находится и проверяется подстановкой: если $x=-1$, то $2^x+\frac{9}{5-x}=0{,}5+1{,}5=2$.

Ответ: -1.

Замечания.

1) В шаге 1 можно обойтись и без производной:
$0{,}5x^4-4x+5>1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^4-8x+8>0 \Leftrightarrow x^4-4x^2+4+4x^2-8x+4>0 \Leftrightarrow$
$(x^2-2)^2+4(x-1)^2>0$, где последнее неравенство верно, т.к. $(x^2-2)^2$ и $4(x-1)^2$ не обращаются в ноль одновременно.

2) Аналогично, в шаге 3 проверку неравенства $g'(x)>0$ можно заменить ссылкой на то, что $g(x)$ есть сумма двух возрастающих функций.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) исследование функции f; 2) сведение исходной задачи к уравнению $f(g(x))=5$, его решение; проверка того, что уравнение $g(x)=0$ не имеет корней; 3) решение уравнения $g(x)=2$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
	Обоснованы все моменты решения: а) нахождение $f_{наим}$ обосновано исследованием знака производной; б) неравенство $f_{наим}>1$ обосновано проверкой неравенства $5-3\cdot\sqrt[3]{2}>1$; в) отсутствие корней уравнения $g(x)=0$ обосновано положительностью функции g; г) единственность корня $x=-1$ обоснована проверкой возрастания функции g при $x<4$. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 3 допустима лишь констатация возрастания g без ее проверки. Обоснованы ключевые моменты а, б. Допустима описка и негрубая вычислительная ошибка в одном из шагов 2 или 3, в результате чего может быть получен неверный ответ.
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Выполнены верно шаги 1 и 2: задача сведена к решению уравнения $g(x)=2$. Обоснован ключевой момент а. Допустимо, что неравенство $5-3\cdot\sqrt[3]{2}>1$ приведено без проверки. Допустимо, что дальнейшее исследование уравнения не завершено. Допустимы 1–2 негрубые ошибки или описки в вычислениях в шаге 3, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате решение может быть не завершено.
1	Ход решения верный. Выполнен верно шаг 1: найдена точка минимума и наименьшее значение [illegible]

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
	Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено, а остальные ключевые моменты не обоснованы.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

2. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{33}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1,2,\ldots,32$. Найдите $a_{15}-a_{14}$, если известно, что $a_{33}=0$,

$$\text{а } f(x)=\begin{cases} 4+\dfrac{24}{x-4}, & \textit{если } x<4, \\ 3-\dfrac{16}{x}+\log_3\left(9-\dfrac{80}{x+5}\right), & \textit{если } x\geqslant 4. \end{cases}$$

Первое, что приходит на ум, — это попробовать решать задачу с *конца*:

- сначала поискать число a_{32} как корень уравнения

$$f(x)=a_{33}\ (=0),$$

точнее сказать, не уравнения, а следующих двух систем (последовательно)

$$1)\ \begin{cases} 4+\dfrac{24}{x-4}=a_{33} \\ x<4, \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 3-\dfrac{16}{x}+\log_3\left(9-\dfrac{80}{x+5}\right)=a_{33} \\ x\geqslant 4, \end{cases}$$

- затем для каждого из найденных корней, аналогично, поискать число a_{31} как корень уравнения $f(x)=a_{32}$ и т.д.

Такая перспектива, с учетом еще и возможного разветвления описанной процедуры, вряд ли кого-либо вдохновит. А может быть, лучше попытаться подойти к задаче с другого конца, точнее, как раз наоборот, с *начала*, т.е.:

- прежде всего, посмотреть, каково множество значений функции

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots))=f^k(x),$$

не попадает ли оно при достаточно больших значениях k с полной определенностью в какую-либо из двух областей

$$x<4 \text{ или } x\geqslant 4$$

кусочного задания функции f?

Решение.

1. $f(x)=\begin{cases} 4+\dfrac{24}{x-4}=g(x), & x<4,\\ 3-\dfrac{16}{x}+\log_3\left(9-\dfrac{80}{x+5}\right)=h(x), & x\geqslant 4: \end{cases}$

а) $E(g)\subset(-\infty;4)$ (т.к. $x-4<0$ при $x<4$),

б) $E(h)\subset\left(-\infty;3-0+\log_3(9-0)\right)$ (т.к. $x,x+5>0$ при $x\geqslant 4$), $\subset(-\infty;5)$,

в) $E(f)\subset\left(E(g)\cup E(h)\right)\subset(-\infty;5)$,

г) $E(f^2)\subset\left((-\infty;4)\cup(-\infty;h(5))\right)$ (т.к. h — возрастает) $\subset(-\infty;4)$, т.к.
$h(5)=3-\dfrac{16}{5}+\log_3\left(9-\dfrac{80}{5+5}\right)=3-3\dfrac{1}{5}+\log_3 1=-\dfrac{1}{5}<4$,

д) $E(f^k)\overset{?}{\subset} E(g)\subset(-\infty;4)$, $k=2,3,\ldots,31$,
$\Rightarrow a_3,a_4,\ldots,a_{32}<4$.

2. $a_{32}=x<4$:
$f(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow 4+\dfrac{24}{x-4}=0\Leftrightarrow x-4=-\dfrac{24}{4}\Leftrightarrow x=-2$
$\Rightarrow a_{32}=-2$.

3. $a_{32}=-2$, $a_{31}=x<4$:
$f(x)=-2\Leftrightarrow g(x)=-2\Leftrightarrow 4+\dfrac{24}{x-4}=-2\Leftrightarrow x-4=-\dfrac{24}{6}\Leftrightarrow x=0$
$\Rightarrow a_{31}=0$.

4. Аналогично:
$a_{30}=-2$, $a_{29}=0,\ldots,$ $a_{15}=0$, $a_{14}=-2\Rightarrow a_{15}-a_{14}=0-(-2)=2$.

Ответ: 2.

Комментарий

А. А чем бы кончилось дело, если бы мы все-таки поступили так, как наметили вначале, т.е. попытались бы сразу решить уравнение

$$f(x)=0\,?$$

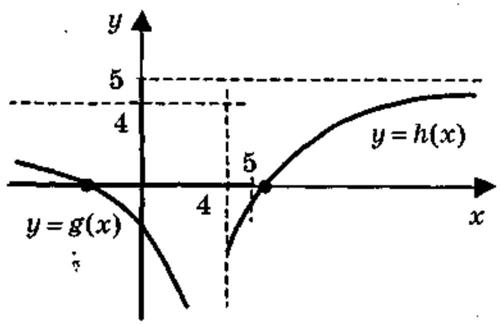
Картина сложилась бы следующая:

- у записанной выше системы 1) нашлось бы решение
$$x=-2,$$
задающее реальное значение для a_{32},
- система 2) имела бы некое (по всей видимости, не выражаемое формулой) решение
$$x=x_0,$$
большее 5 и, тем самым, не определяющее никакого реального значения для предыдущего члена последовательности, задаваемого уравнением
$$f(x)=x_0$$
(ведь как мы уже знаем из нашего решения, функция f не принимает значений, больших 5).

Б. В тексте нашего решения для оценки области значений функций неоднократно использовались ***цепочки включений***, обозначаемых символом $\subset$ (не исключающим, кстати, и случая равенства). Каждая из этих цепочек позволяет утверждать, что ее начальное множество является подмножеством конечного.

В. Исследование множества значений данной функции f, а также ее итераций f^h, удобно провести с помощью ***графической иллюстрации***, которая наглядно демонстрирует некоторые свойства функции f. Так, рассматривая лишь схематический график этой функции, можно сделать следующие конкретные выводы:

1) значения левой ветви g не превосходят 4,
2) значения правой ветви h не превосходят 5,
3) все вообще значения функции f не превосходят 5,
4) если теперь брать, наоборот, значения аргумента, меньшие 5, и применять к ним функцию f, то у левой ветви будут получаться значения, меньшие 4, а у правой — меньшие 0, т.е. в целом — меньшие 4,
5) если к полученному подмножеству значений (меньших 4) применять еще сколько-то раз функцию f, то множество получающихся при этом значений не будет расширяться.



Г. На экзамене многие выпускники брались за эту задачу, однако допускали типичную, хотя и довольно специфическую ошибку. Они рассматривали два естественно возникающих случая:

1) пусть функция задается формулой
$$f(x)=4+\frac{24}{x-4},\quad x<4,$$
тогда из данных в условии равенств
$$a_{n+1}=f(a_n),\ n=1,2,\ldots,32,$$
однозначно определяются искомые члены последовательности (этот случай, понятно, и есть единственно возможный),

2) пусть функция задается формулой
$$f(x)=3-\frac{16}{x}+\log_3\left(9-\frac{80}{x+5}\right),\quad x\geqslant 4,$$
тогда те же равенства в итоге приводят к противоречию (например, с условием на переменную x).

Однако при этом упомянутые выпускники не рассматривали, так сказать, смешанные случаи, когда данные в условии равенства при одних n задаются одной формулой, а при других n — другой. И хотя, как известно, эти случаи практически не реализуются в условиях задачи, они все же логически возможны и, следовательно, должны быть изучены наравне с первыми двумя.

Такие ошибочные решения оценивались на экзамене всего в один балл (из четырех).

3. Для чисел $a_1,a_2,\ldots,a_{30}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1,2,\ldots,29$. Найдите $a_{10}-a_{11}$, если известно, что $a_{30}=0$, а
$$f(x)=\begin{cases}7+\dfrac{7}{x-7}, & \text{если } x<7,\\[2mm] 5-\dfrac{41}{x}+\log_2\left(8-\dfrac{77}{x+3}\right), & \text{если } x\geqslant 7.\end{cases}$$

4. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{28}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 27$. Найдите $a_4 - a_7$, если известно, что $a_{28} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} 5^x + 4^{\frac{6}{1-x}} - 6, & \text{если } x \leqslant -2, \\ \dfrac{26}{x+2} - 2, & \text{если } x > -2. \end{cases}$$

5. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{39}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 38$. Найдите a_4, если известно, что $a_{39} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} 3^x + 5^{-\frac{8}{x+1}} - 10, & \text{если } x \leqslant -5, \\ \dfrac{105}{x+5} - 5, & \text{если } x > -5. \end{cases}$$

6. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{28}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 27$. Найдите $a_9 + a_7 - a_6$, если известно, что

$$a_{28} = 0, \text{ а к } f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-3}{x-3}, & \text{если } x < 3, \\ \sqrt[5]{\dfrac{x-4}{x-2}} + \sqrt{\dfrac{27x-17}{3x+7}}, & \text{если } x \geqslant 3. \end{cases}$$

7. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 18$. Найдите $a_4 + a_5 + a_6$, если известно, что

$$a_{19} = 0, \text{ а } f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x-5}{x-5}, & \text{если } x < 5, \\ \sqrt[7]{\dfrac{x-6}{x-4}} + \sqrt{\dfrac{25x-124}{x-1}}, & \text{если } x \geqslant 5. \end{cases}$$

8. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{29}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 28$. Найдите $a_{10} + a_{16} + a_{26}$, если известно, что

$$a_{29} = 0, \text{ а } f(x) = \begin{cases} 5\sin(0{,}05\pi x) + 5, & \text{если } x < 5, \\ 5 - 30 \cdot (x-1)^{-0{,}5}, & \text{если } x \geqslant 5. \end{cases}$$

Как ни странно, данный вариант последовательности естественнее изучать, двигаясь одновременно с обоих ее концов и постепенно проливая свет на поставленный вопрос.

Решение.

1. $f(x) = \begin{cases} 5\sin(0{,}05\pi x) + 5 = g(x), & x < 5, \\ 5 - 30 \cdot (x-1)^{-0{,}5} = h(x), & x \geqslant 5: \end{cases}$

   а) $E(g) = [-5+5; 5+5] = [0; 10]$,

   б) $E(h) \subset [h(5); 5-0)$
   (т.к. $x - 1 > 0$ и h — возрастает при $x \geqslant 5$)
   $= [-10; 5)$, т.к. $h(5) = 5 - \dfrac{30}{\sqrt{5-1}} = 5 - \dfrac{30}{2} = -10$,

   в) $E(f) \subset (E(g) \cup E(h)) \subset [-10; 10]$

   $\Rightarrow -10 \leqslant a_2, a_3, \ldots, a_{28} \leqslant 10$.

2. $a_{29} = 0$, $5 \leqslant a_{28} = x \leqslant 10$:
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - \dfrac{30}{\sqrt{x-1}} = 0$
   $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \dfrac{30}{5} \Leftrightarrow x - 1 = 6^2$
   $\Leftrightarrow x = 37$ — невозможно, т.к. $x \leqslant 10$.

3. $a_{29} = 0$, $-10 \leqslant a_{28} = x < 5$:
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 5\sin(0{,}05\pi x) + 5 = 0$
   $\Leftrightarrow \sin(0{,}05\pi x) = -1$
   $\Leftrightarrow 0{,}05\pi x = -0{,}5\pi$, т.к. $-0{,}5\pi \leqslant 0{,}05\pi x < 0{,}25\pi$,
   $\Leftrightarrow x = -10 \Rightarrow a_{28} = -10$.

4. $a_{28} = -10$, $a_{27} = x$:
   $f(x) = -10 \Leftrightarrow h(x) = -10$, т.к. $E(g) = [0; 10]$,
   $\Leftrightarrow x = 5$, т.к. h — возрастает и $h(5) = -10$,
   $\Rightarrow a_{27} = 5$.

5. $a_{27}=5$, $a_{26}=x$:
$f(x)=5 \Leftrightarrow g(x)=5$, т.к. $E(h)\subset[-10;5)$ $(\Rightarrow -10\leqslant x<5)$,
$\Leftrightarrow 5\sin(0{,}05\pi x)+5=5 \Leftrightarrow \sin(0{,}05\pi x)=0$
$\Leftrightarrow 0{,}05\pi x=0$, т.к. $-0{,}5\pi\leqslant 0{,}05\pi x<0{,}25\pi$,
$\Leftrightarrow x=0 \Rightarrow a_{26}=0$.

6. Аналогично:
$a_{25}=-10$, $a_{24}=5$, $a_{23}=0,\ldots,$ $a_{16}=-10,\ldots,$ $a_{10}=-10$
$\Rightarrow a_{10}+a_{16}+a_{26}=-10+(-10)+0=-20$.

Ответ: -20.

Комментарий

А. Можно было достаточно эффективно продолжить начатое изучение данной последовательности с ее начала. Действительно, если бы чуточку потоньше ограничить область значений итераций данной функции f, дополнив наше решение пунктом

г) $h(f(x))\leqslant h(10)$ (т.к. h — возрастает)

$$=5-\frac{30}{\sqrt{10-1}}=5-\frac{30}{3}=-5,$$

то нам бы не пришлось решать в пункте 2 уравнение

$$f(x)=0 \text{ при } x\geqslant 5.$$

Б. Трудно умолчать о том, что последняя из разобранных задач на порядок труднее предыдущих ее вариантов, в которых данная последовательность имела период 2 — здесь же он равен 3.

Остается только посочувствовать школьникам, которые на экзамене, не зная заранее, что последовательность периодична вообще, набрались терпения и, засучив рукава, принялись восстанавливать ее с конца. Причем, не получив повтора ее значения ни на первом, ни на втором шаге, они все же рискнули сделать еще один, третий шаг... И все это в условиях экзаменационного цейтнота, нервного напряжения, опасности ошибиться в вычислениях и т.д.

9. Для чисел $a_1,a_2,\ldots,a_{30}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1,2,\ldots,29$. Найдите $a_6+a_7+a_{27}$, если известно, что $a_{30}=0$, а $f(x)=\begin{cases}10\sin(0{,}02\pi x)+10, & \text{если } x<10,\\ 10-140\cdot(x+6)^{-0{,}5}, & \text{если } x\geqslant 10.\end{cases}$

10. Для чисел $a_1,a_2,\ldots,a_{31}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1,2,\ldots,30$. Найдите $a_8+a_{18}+a_{28}$, если известно, что $a_{31}=0$, а $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+12}{6-x}, & \text{если } x<2,\\ 2\sin(0{,}1\pi x+1{,}3\pi)-2, & \text{если } x\geqslant 2.\end{cases}$

Глава 3

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВООБРАЖЕНИЕ

3.1. Задание С3, 2003 г.

1. **Демоверсия.** Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$. Все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны. Плоскость α, параллельная плоскости основания пирамиды, пересекает высоту МО пирамиды в точке Р так, что $MP:PO = 2:3$. В образовавшуюся усеченную пирамиду вписан цилиндр, ось которого лежит на высоте пирамиды, а верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью α. Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $9\pi\sqrt{3}$.

Начнем с того, что отсеченная (не усеченная, а наоборот) пирамида подобна исходной из-за того, что секущая плоскость параллельна основанию. Более того, коэффициент подобия этих двух пирамид известен, поскольку сказано, в каком отношении плоскость делит высоту пирамиды.

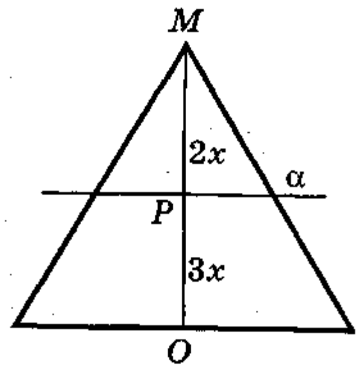
Далее, у исходной пирамиды в основании лежит ромб, а значит, у подобной — тоже. В ромб всегда можно вписать окружность. А, коль скоро задан угол ромба, его сторона пропорциональна радиусу окружности (кстати, равному половине высоты ромба).

Наконец, задан объем цилиндра, посредством которого его высота связывается с тем же радиусом.

Искомый объем пирамиды определяется аналогичными величинами: стороной и высотой ромба, лежащего в ее основании, и высотой самой пирамиды. Таким образом, есть надежда выразить этот искомый объем через заданный объем цилиндра.

Решение.

1. α отсекает от $MABCD$ пирамиду Δ:

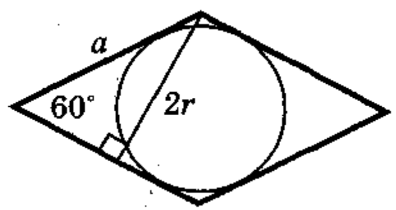


$MABCD \sim \Delta$, т.к. $\alpha \parallel ABCD$,

$k = \dfrac{MO}{MP}$ (— коэффициент подобия)

$= \dfrac{2x+3x}{2x} = \dfrac{5}{2}$.

2. Основание пирамиды Δ — ромб:



a — сторона,

r — радиус вписанной окружности

$$\Rightarrow \begin{cases} 2r = a\sin 60^\circ & \text{(высота ромба)} \\ 9\pi\sqrt{3} = \pi r^2 \cdot 3x & \text{(объем цилиндра)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4r}{\sqrt{3}} \\ r^2 x = 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

3. $V_{MABCD} = V_{\Delta} \cdot k^3$

$$= \frac{1}{3} \cdot (a \cdot 2r) \cdot (2x) \cdot k^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4r}{\sqrt{3}} \cdot 2r \cdot 2x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{r^2 x \cdot 5^3 \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}} = 250.$$

Ответ: 250.

Комментарий

А. Данное в задаче равенство двугранных углов при ребрах основания пирамиды нигде в решении не использовалось. Значит, оно является лишним, но, к счастью, не противоречит остальным условиям задачи.

Вообще-то, на экзаменах такое случается, и даже логически допустимо (хотя и не приветствуется). Более того, условие почти никогда не равносильно утверждению, которое нужно из него вывести и по отношению к которому оно, как правило, несколько избыточно. Например, если в прямоугольном треугольнике по катетам 3 и 4 требуется найти гипотенузу, то она, конечно, будет равна 5, однако из этого последнего равенства вовсе не вытекает обратное, т.е. что катеты равны 3 и 4. Правда, в данном примере, в отличие от разобранного выше, из условия как раз ничего нельзя выкинуть.

Нам же сейчас важно только одно — дать будущим участникам ЕГЭ правильный совет, вытекающий из описанной ситуации. Если на экзамене какие-то данные задачи так и не были использованы, не следует паниковать и лихорадочно искать ошибку в своем решении. Возможно, эти данные просто лишние.

Б. Одним из наиболее простых и эффективных способов решения стереометрической задачи является ***сведение к планиметрии***. Оно достигается с помощью двух приемов:

- *проектированием* данной фигуры на удачную плоскость или, что то же, изображением ее вида из некоторой (возможно, бесконечно удаленной) точки пространства,
- *сечением* данной фигуры специально подобранной плоскостью.

В приведенном решении мы обошлись вообще без стереометрических картинок, использовав оба названных приема. Нам повезло: сначала мы изобразили пирамиду в виде треугольника (вид, так сказать, сбоку), а потом ограничились только одним плоским сечением этой пирамиды.

В. Решения задач по стереометрии, планиметрии, алгебре, анализу, арифметике и т.д. — оформляются примерно одинаково. Основаны они на одних и тех же принципах — общематематических и даже, можно сказать, общенаучных.

Структура текста решения такова: оно разделено на этапы, а те, в свою очередь, могут быть разбиты на более мелкие части, содержащие цепочки умозаключений: как правило, следствий, равенств и даже неравенств, в зависимости от постановки и содержания задачи.

Г. Особая роль при решении геометрической задачи отводится ***чертежу***. Как мы видели выше, он не обязательно должен быть ровно один для каждой задачи. Обычно на нем, в соответствии с условием задачи, отмечают следующие данные:

- обозначения точек, прямых, плоскостей и других геометрических объектов,
- длины отрезков, величины углов, площади и объемы,
- соотношения равенства длин или углов, перпендикулярности прямых или плоскостей.

Но это еще не все. На чертеже можно еще и вводить новые:

- обозначения объектов — первоначальных или возникающих в процессе дополнительных построений,
- величины — буквенные или вычисленные в процессе решения,
- соотношения равенства или перпендикулярности — определяемые построением или выведенные с помощью рассуждений.

Одним словом, на чертеже фактически можно решать задачу или, по крайней мере, демонстрировать фрагменты ее решения. И тут нет ничего удивительного: задача-то геометрическая.

Д. В связи с возможностью решать задачу прямо на чертеже возникают некоторые ограничения и проблемы.

Выпускнику необходимо побеспокоиться о том, чтобы проверяющий смог понять, в каком порядке и на основании чего появлялись на чертеже новые пометки. С этой целью пишется текст *решения*, который хотя и дублирует отчасти *чертеж, тем не менее, отличается большей содержательностью*, т.к. в нем:

- отражается хронология проведенных умозаключений,
- указываются причинно-следственные связи между утверждениями.

Если в тексте решения не разъяснены какие-то важные пометки чертежа, то требования к последнему резко возрастают. Ведь тогда он превращается из иллюстрации в необходимую часть решения. В этом случае рисунок должен быть абсолютно ясным и разборчивым, а главное, понятным экзаменатору (впрочем, лучше не только ему и не только в этом случае).

2. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром, равным 12, расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Найдите объем конуса.

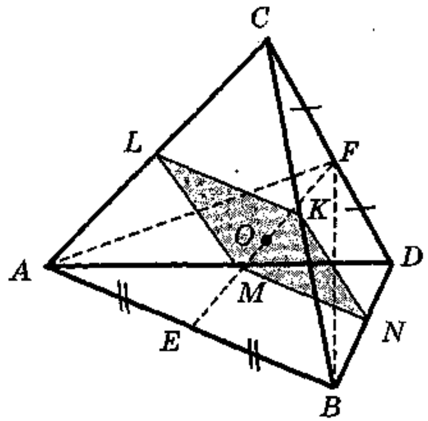
Условие задачи сразу же наводит нас на следующую обнадеживающую мысль: правильный тетраэдр задается своим ребром полностью, поэтому в нем, в принципе, можно найти все, что угодно. Далее, замечаем следующее.

- Во-первых, хорошо известно, что *серединное сечение* в любом тетраэдре — это всегда параллелограмм (подобно серединному четырехугольнику в любом четырехугольнике). У нас же в задаче тетраэдр не простой, а правильный, т.е. все ребра у него равноправны. Значит, в силу неких соображений симметрии, наш параллелограмм — квадрат. Легко вычисляется его сторона, а по ней и радиус вписанной в него окружности, т.е. радиус основания конуса.

- Во-вторых, высота конуса, в данном случае, есть половина расстояния между скрещивающимися ребрами тетраэдра. Оно реализуется на отрезке, соединяющем середины этих ребер и служащем одновременно и медианой, и высотой в соответствующих равнобедренных треугольниках (в которых также все считается).

Р е ш е н и е.

1. Сечение $KLMN$:



а) $KL, MN \parallel AB$, $LM, KN \parallel CD$
$\Rightarrow KLMN$ — параллелограмм,

б) $AF, BF \perp CD$ (медианы и высоты в $\triangle ACD$, $\triangle BCD$)
$\Rightarrow ABF \perp CD \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow KLMN$ — прямоугольник,

в) K, L, M, N — середины ребер (теорема Фалеса), т.к. K — середина BC,

г) $KL = MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2}$ (т.к. $AB = CD$) $= LM = KN$
$\Rightarrow KLMN$ — ромб

д) $KLMN$ — квадрат:

$a=\frac{AB}{2}=\frac{12}{2}=6$ — сторона,

$r=\frac{a}{2}=3$ — радиус вписанной окружности.

2. $EF\perp CD$ (т.к. $ABF\perp CD$), $EF\perp AB$ (аналогично)
$\Rightarrow EF$ — общий перпендикуляр к AB и CD
$\Rightarrow FO\perp KLMN$ (ось конуса)
$\Rightarrow FO=h$ — высота конуса.

3. $AF=AC\cdot\sin 60^\circ$ ($\triangle ACF$) $=6\sqrt{3}$,
$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}$ ($\triangle AEF$) $=\sqrt{6^2\cdot 3-6^2}=6\sqrt{2}$,
$h=\frac{EF}{2}=3\sqrt{2}$.

4. $V_{кон}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi\cdot 3^2\cdot 3\sqrt{2}}{3}=9\pi\sqrt{2}$.

Ответ: $9\pi\sqrt{2}$.

Комментарий

А. При решении задачи школьник не обязан на своем чертеже изображать все объекты, которые описаны в условии. Что изображать, а что нет — решать ему. Как мы уже видели ранее, можно вообще обойтись лишь отдельными фрагментами заданной в задаче фигуры или специальными ее видами.

Например, в приведенном здесь решении на рисунке нет и намека на изображение конуса, хотя он конкретно обсуждается в тексте. И это в порядке правил. Конус задан в условии, к нему даже относится вопрос задачи. Тем не менее, его изображение не является необходимым и, будучи добавленным, лишь утяжелило бы картинку, чем усложнило бы ее восприятие.

Б. Заметим, что, в принципе, истинно стереометрический *чертеж* не возможен по техническим причинам. Изображением объемной фигуры на плоскости может служить только ее проекция. А она предполагает наличие определенной доли воображения, как у школьника, так и у экзаменатора.

Принято считать (хотя это нигде официально и не объявлено) изображаемые плоскости, грани и т.п. как бы непрозрачными и посему изображать расположенные за ними линии прерывистыми. Это школьное требование вносит, скорее, лишние и малооправданные трудности в процесс рисования и без того непростых проекций стереометрических фигур.

Куда важнее, на наш взгляд, использовать ограниченные графические возможности для того, чтобы отличить, прежде всего, *основные исходные объекты от вспомогательных, и уж, тем более, от построенных дополнительно*. А вот, как раз плоскости-то вполне можно считать и прозрачными. С учетом именно таких требований выполнены чертежи в настоящем пособии.

3. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Объём конуса равен $72\pi\sqrt{2}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

4. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объём призмы.

5. Около прямой четырехугольной призмы описан цилиндр. Основание призмы — прямоугольник, диагональ и меньшая сторона которого образуют угол 60°. Площадь боковой поверхности призмы равна $120\sqrt{3}$, а расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания равно $1+\sqrt{3}$. Найдите объем цилиндра.

6. Около правильной треугольной призмы, объём которой равен 288, описан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

7. В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом 45°, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $5\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объем призмы равен 120.

8. В правильную треугольную призму, объём которой равен 36, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

3.2. Задание С3, 2004 г.

1. **Демоверсия.** Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A. В этой же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A, проходит через точку M. Точка M является точкой касания сферы и конуса (*их единственная общая точка*). Найдите высоту конуса, если

$$AC = 1.$$

В этой задаче нам в очередной раз повезло — она однозначно сводится к планиметрической.

Действительно, вся наиболее существенная информация о данной конфигурации содержится в ее сечении вертикальной плоскостью, проходящей через точки A и C.

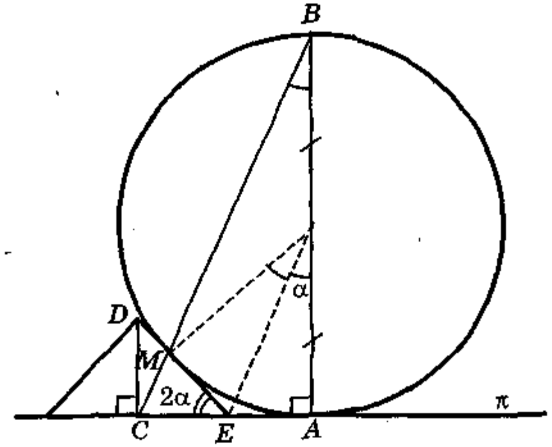
В указанном сечении будут лежать и ось конуса, и диаметрально противоположная точка сферы, и точка M касания

сферы и конуса. При этом плоскость будет выглядеть как прямая, сфера — как окружность, а конус — как треугольник. В общем, прекрасная картинка.

Решение.

1. AB — диаметр сферы, CD — ось конуса:
$AB, CD \perp \pi$ (— данная плоскость)
$\Rightarrow AB \parallel CD$,

поэтому можно провести сечение плоскостью $ABCD$.



2. $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle AOM$ (вписанный и центральный углы)
$= \angle AOE = \alpha$ ($\triangle AOE = \triangle MOE$),
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{4}$,
$AE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$ (т.к. $OE \parallel BC$).

3. $\angle CED = \angle AOM$ (т.к. $OM \perp ED$ и $OA \perp EC$) $= 2\alpha$
$\Rightarrow CD = CE \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\cdot 1/4}{1-1/16} = \frac{4}{15}$.

Ответ: $\frac{4}{15}$.

Комментарий

1. Для доказательства равенства

$$\angle CED = \angle AOM$$

мы воспользовались теоремой о равенстве углов с соответственно перпендикулярными сторонами.

Однако тот же факт можно было вывести просто из равенства двух сумм:

$$\angle CED + \angle AEM = 180^\circ = \angle AOM + \angle AEM,$$

первая из которых есть сумма смежных углов, а последняя — сумма двух углов четырехугольника $AOME$ с двумя прямыми остальными углами.

2. В шар радиуса $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 45°. Найдите объем призмы.

В решении задачи можно выделить следующие моменты.

- Первый, на наш взгляд, основной, состоит в построении на чертеже заданного в условии угла между прямой и плоскостью. Такой угол, по определению, равен *углу между прямой и ее проекцией на плоскость*. Для того чтобы его увидеть, достаточно спроектировать на данную плоскость какую-либо точку данной прямой. В этом отношении конфигурация представляется весьма удачной: указанная плоскость перпендикулярна основанию пирамиды, благодаря чему в этом основании вместе с любой точкой будет лежать и ее проекция на плоскость.
- Второй момент — определение местоположения центра описанной сферы. Он оказывается лежащим на линии центров оснований призмы, на равном расстоянии от этих оснований.
- Третий момент — вычислительный. По теореме Пифагора получаются две связи между высотой призмы и стороной ее основания: одна определяется радиусом описанной

сферы, а вторая — заданным выше углом между прямой и плоскостью.

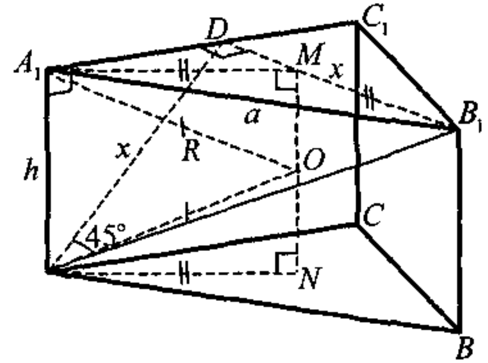
Решение.

1. D — середина A_1C_1:

$B_1D \perp ACC_1$ (т.к. $B_1D \perp A_1C_1, CC_1$)

$\Rightarrow \angle B_1AD = 45^\circ \Rightarrow AD = B_1D = x$.

2. $AB = a$, $AA_1 = h$, $R = \sqrt{11}$:



$$\begin{cases} h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = x^2 \ (\triangle AA_1D) \\ x = \sin 60^\circ a \ (A_1B_1D) \\ \left(\dfrac{2}{3}\cdot x\right)^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 = R^2 \text{ из } \triangle A_1MO \ (=\triangle ANO \text{ по гипотенузе и катету}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4} \\ \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{h^2}{4} = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2h^2 \\ \dfrac{2h^2}{3} + \dfrac{h^2}{4} = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = 12 \\ a^2 = 24 \end{cases}$$

3. $V_{ABCA_1B_1C_1} = \left(\dfrac{1}{2}a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot h = \dfrac{24\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}{4} = 36$.

Ответ: 36.

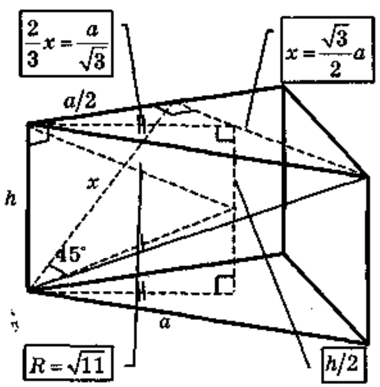
Комментарий

А. Определенные преимущества таит в себе метод оформления решения, при котором выписываются сразу все зависимости между всеми подряд величинами, как заданными вначале, так и введенными впоследствии. Указанными преимуществами мы воспользовались во втором пункте решения задачи.

Обычно школьник, получив какие-либо равенства, первым делом по обыкновению упрощает их, а затем по привычке, не задумываясь, выражает в них одни величины через другие. А то и просто совершает над ними какие-то бесцельные преобразования, тогда как элементарное сопоставление количества неизвестных с количеством уравнений зачастую показывает, что выписанных уравнений, на самом-то деле, не достаточно для получения ответа.

Именно, общий анализ всех уравнений одновременно, организованных в виде единой системы, позволяет школьнику вовремя и правильно сориентироваться и понять, искать ли новые соотношения или ограничиться уже полученными.

Б. Рассмотрим детально ***чертеж***, сделанный нами при решении задачи. Какая информация, отображаемая на нем, действительно необходима для решения задачи? Если бы мы делали чертеж, так сказать, для себя, т.е. действительно с целью решить задачу (а не рассказать кому-то ее решение), то, скорее всего, изобразили бы на нем примерно следующее:



Глядя исключительно на этот чертеж, можно получить абсолютно всю вычислительную часть решения, которая могла бы выглядеть так:

$$\begin{cases} h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \\ \left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 = \sqrt{11}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4} \\ \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{h^2}{4} = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2h^2 \\ \dfrac{2h^2}{3} + \dfrac{h^2}{4} = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h^2 = 12 \\ a^2 = 24 \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot h = \frac{24\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}{4} = 36.$$

Более того, экзаменатор, решая задачу для себя, похоже, вынужден был бы проделать если не то же самое, то что-нибудь аналогичное. Поэтому если бы не формальные требования экзамена, он вполне удовлетворился бы ровно тем чертежом и ровно тем текстом решения, который мы только что привели.

В. Возникает естественный вопрос: какие изменения и добавления необходимо внести в предварительное ***решение***, написанное для себя, чтобы превратить его в окончательное, предназначенное для проверки экзаменатором?

Частично ответ на этот вопрос был дан ранее. А сейчас мы лишь напомним, что в результате изменений и добавлений должны появиться объяснения следующих моментов:

- почему изображенный рисунок верен,
- как появлялись на нем пометки (что из них есть обозначение, а что — результат рассуждений),
- какова связь между рисунком и конкретными выкладками.

Для этого, к всеобщему для школьников и экзаменаторов неудовольствию, придется:

- во-первых, внести в рисунок обозначения вершин (не скроем, тем самым, несколько засорив и усложнив его),

- во-вторых, добавить к выкладкам пояснения, причем в любых формах — предварив, сопроводив или заключив выкладки необходимыми ссылками или указаниями, которые будут прочитаны и изучены экспертами ровно в той степени, в какой этого потребует критерий оценки решений (т.е. по большей части — не будут).

А вот что в итоге из этого всего получится, можно увидеть, прочитав заново первоначальный текст приведенного выше подробного решения той же задачи.

3. В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 4,5. Прямая BA_1 образует с плоскостью BCC_1 угол 45°. Найдите площадь поверхности шара.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным $2\sqrt{3}$, расположен конус. Вершина конуса находится в точке D_1, а центр его основания, точка O, лежит на диагонали BD_1 так, что $BO:OD_1=1:3$. Окружность основания конуса имеет с каждой гранью, содержащей точку B, ровно по одной общей точке. Определите объем конуса.

5. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы. Углы BAD, BAA_1 и DAA_1 равны 60° каждый. Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1.

6. Основание $ABCD$ наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат, а все боковые грани призмы — равные ромбы. Углы BAA_1 и DAA_1 равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDD_1, если сторона квадрата $ABCD$ равна 10.

7. Все ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы BAA_1 и CAA_1 равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CA_1B_1, если площадь грани ABB_1A_1 равна $8\sqrt{3}$.

3.3. Задание С4, 2005 г.

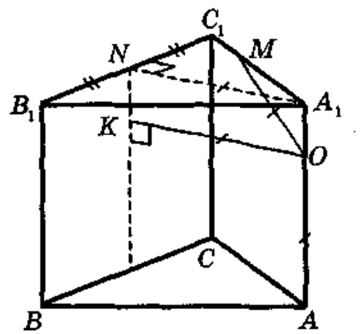
1. **Демоверсия.** Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 — боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1. Известно, что $AB = 12$, $A_1M:MC_1=3:1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Построив чертеж, можно последовательно вычислить следующее:

- радиус сферы, равный как высоте основания призмы, так и отрезку (нижнему) бокового ребра, содержащего центр сферы,
- обе части ребра основания, на которые ее разбивает данная точка,
- оставшийся отрезок (верхний) ребра, содержащего центр сферы,
- целиком боковое ребро, равное высоте призмы,
- площадь боковой поверхности призмы.

Р е ш е н и е.

1. A_1N — высота в $\triangle A_1B_1C_1$:
$A_1N \perp AA_1 \parallel BB_1$
$\Rightarrow A_1N \perp CBB_1$.



2. K — точка касания сферы с плоскостью CBB_1:

$$\begin{cases} OK \perp CBB_1 \\ OA_1 \parallel CBB_1 \end{cases} \Rightarrow OKNA_1 \text{ — прямоугольник}$$

$\Rightarrow A_1N = OK = OM = OA = r$ — радиус сферы (т.к. $OA \perp ABC$).

3. $a = 12$ — сторона основания:

$$r = a\sin 60^\circ \ (\triangle A_1B_1N) = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OA_1 = \sqrt{r^2 - (3a/4)^2} \ \ (\triangle OA_1M)$$

$$= \sqrt{6^2 \cdot 3 - 9^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AA_1 = AO + OA_1 = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} = h \text{ — высота призмы.}$$

4. $S_{бок} = 3ah = 3 \cdot 12 \cdot 9\sqrt{3} = 324\sqrt{3}$.

О т в е т: $324\sqrt{3}$.

Комментарий

Одно из узких мест в предложенном решении — точное обоснование того, что радиус сферы равен высоте основания призмы. Этот факт на чертеже представляется очевидным как школьнику, так, между прочим, и экзаменатору. Однако нужно абстрагироваться от этой подкупающей очевидности и заставить себя получить его как следствие из условия задачи. При этом желательно рассуждать последовательно и логично, опираясь только на совершенно уж очевидные факты, вытекающие прямо из теорем или аксиом стереометрии.

Да, такое специальное задание — не для слабонервных, оно на экзамене требует от выпускника определенных интеллектуальных, энергетических и временных затрат. Откровенно говоря, мы в приведенном решении с этим заданием до конца не справились, поскольку все же не отметили в тексте кое-какие мелочи. Например, следующие:

- не объяснено, почему высота основания перпендикулярна боковому ребру (в пункте 1),
- нет ссылки на использованный признак перпендикулярности прямой и плоскости (в пункте 1),
- не сказано, что два перпендикуляра к плоскости параллельны, а значит, лежат в одной плоскости (в пункте 2),
- нет ссылки на использованный признак параллельности прямой и плоскости (в пункте 2),
- не доказано явно, что параллельны две другие стороны четырехугольника, объявленного в решении прямоугольником (в пункте 2).

И, что интересно, приведенный список недостатков нашего решения можно продолжать и продолжать... Представьте себе, какой длины окажется по-настоящему обоснованное решение.

Весьма сомнительно, что с таким заданием справится полностью и сам экзаменатор, если, конечно, он не будет обучен этому специально. И все же, несмотря ни на что, на экзамене эта овчинка стоит выделки: без нее существует реальный риск снижения оценки за решение задачи, даже при наличии в нем правильного ответа.

2. Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T — середина ребра ML.

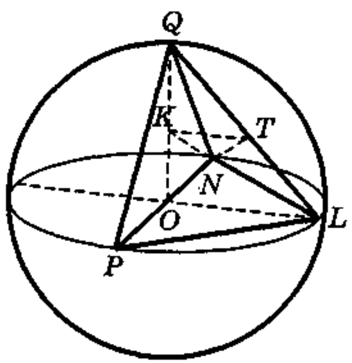
Первая проблема, поставленная в задаче, состоит в выборе такого расположения пары вершин пирамиды, при котором ее объем максимален. Она разрешается с помощью следующих трех соображений:

- основанием пирамиды служит треугольник с одной фиксированной стороной (диаметром сферы), поэтому его площадь максимальна, когда максимальна его высота (т.е. когда она равна радиусу сферы и попадает в центр сферы);
- при фиксированном основании пирамиды (лежащем в плоскости, проходящей через центр сферы) ее объем максимален, когда максимальна ее высота (т.е. когда она также равна радиусу сферы и также попадает в центр сферы);
- оба описанных максимума реализуются независимо друг от друга, а именно: для максимальности объема необходимо и достаточно, чтобы грани при ребре, совпадающем с диаметром, были равнобедренными прямоугольными треугольниками и лежали в перпендикулярных плоскостях.

Вторая проблема — конструктивного построения угла, синус которого нужно вычислить, — после того как решена первая, уже не вызывает затруднений. Угол между прямой и плоскостью теперь строится легко, из-за перпендикулярности двух упомянутых выше плоскостей, на одну из которых параллельно другой и нужно спроектировать данную точку прямой.

Решение.

1. O и R — центр и радиус сферы:



а) $V \leqslant \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot PN\cdot OL\right)\cdot OM = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot R\right)\cdot R$,

б) неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $OL \perp PN$ и $OM \perp PNL$.

2. K — середина OM:

$KT = \frac{OL}{2}$ (средняя линия в $\triangle LOM$) $= R/2$,

$KT \parallel LO \perp PMN$,

$MN = LN = LM = R\sqrt{2}$ ($\triangle MON = \triangle LON = \triangle LOM$ — равнобедренные прямоугольные),

$NT = LN\sin 60^\circ$ ($\triangle LMN$) $= R\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{6}/2$.

3. $\sin\angle TNK = \frac{KT}{NT}$ ($\triangle TNK$) $= \frac{R/2}{R\sqrt{6}/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $1/\sqrt{6}$.

Комментарий

А. Как мы еще раз имели возможность наблюдать, геометрическая задача о нахождении пирамиды наибольшего объема, так же как и аналогичная алгебраическая задача о ***нахождении наибольшего значения***, состоит из двух частей:

- получение оценки сверху для объема (справедливой при любом выборе двух переменных вершин пирамиды),
- исследование достижимости полученной оценки (здесь — к тому же, и описание условий на переменные вершины, необходимых и достаточных для максимальности объема).

Б. Удивительно, но некоторые считают, что слова *наибольший* и *максимальный* имеют разный математический смысл. Это не так, они — синонимы. Например, наибольшее и максимальное значение функции — это, с точки зрения математики, одно и то же.

Разница в употреблении этих слов, конечно, есть, но она имеет исключительно языковые причины. Действительно, трудно образовать от прилагательного *наибольший* краткую форму (как в выражении *объем максимален*) или существительное (как в выражении *точка максимума*). Но этим разница и ограничивается.

Разумеется, при этом никто не собирается отождествлять такие два разных понятия, как максимальное значение функции и значение функции в точке максимума: для одной и той же функции первое значение может оказаться больше второго (правда, меньше быть не может).

3. Отрезок PN, равный 8, — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите площадь треугольника KLT, где K и T — середины ребер PM и NM соответственно.

4. Отрезок AB — диаметр сферы. Точки C, D лежат на сфере так, что объем пирамиды $ABCD$ наибольший. Найдите косинус угла между прямыми CM и AB, если M — середина ребра BD.

5. Дана сфера радиуса 12. Сечением этой сферы плоскостью является окружность с диаметром AB. Плоскость сечения удалена от центра сферы на расстояние 4. Точка D выбрана на сфере, а точка C — на окружности так, что объем пирамиды $ABCD$ наибольший. Найдите площадь треугольника DMN, где M и N — середины ребер AC и BC соответственно.

6. Дана сфера радиуса 6. Сечением сферы плоскостью является окружность с диаметром KT. Плоскость сечения удалена от центра сферы на расстояние 5. Точка P выбрана на сфере, а точка L — на окружности сечения так, что объем пирамиды $PKLT$ наибольший. Найдите угол между прямой LM и плоскостью PTK, если M — середина ребра KP.

7. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D — последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды $FABCD$ наибольший. Точки M, T, L — середины ребер FB, CD и AD соответственно. Площадь треугольника MLT равна $64\sqrt{5}$. Найдите радиус сферы.

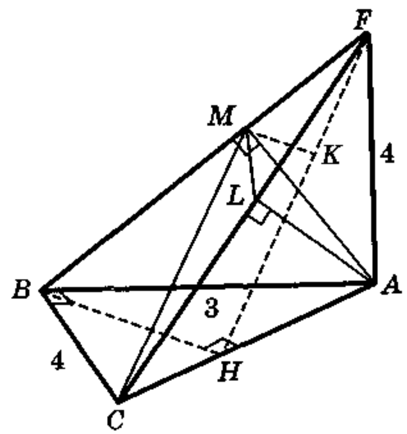
8. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D — последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды $FABCD$ наибольший. Найдите синус угла между прямой AM и плоскостью BFD, если M — середина ребра FB.

3.4. Задание С4, 2006 г.

1. **Демоверсия.** Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC, в котором

$$\angle ABC = 90°, \ AB = 3, \ BC = 4.$$

Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC. Найдите объем пирамиды $AMLC$.



Исходная пирамида условиями задачи определена полностью. Причем в ней имеется изрядное количество прямых углов, к которым следует прибавить еще и прямые углы при высотах ее граней. Так что с вычислением объема вложенной в нее пирамиды особых трудностей возникнуть не должно.

Для нахождения объема вложенной пирамиды можно принять за основание ее грань ALC, площадь которой ищется несложно. Высоту же этой пирамиды, опущенную из вершины M, можно найти, сравнив с предварительно вычисленной высотой исходной пирамиды, опущенной из вершины B.

Решение.

1. $\triangle ABC$ — прямоугольный:
   $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\quad BH=\dfrac{3\cdot 4}{5}$ (высота).

2. $\triangle AFC$ — прямоугольный:
   $FC=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$, $\quad AL=\dfrac{4\cdot 5}{\sqrt{41}}$, $\quad LC=\dfrac{5^2}{\sqrt{41}}$.

3. $\triangle AFB$ — прямоугольный:
   $BF=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\quad MF=\dfrac{4^2}{5}$.

4. $MK\perp ACF$: $BH\perp AC, AF$ (т.к. $AF\perp ABC$)
   $\Rightarrow BH\perp ACF \Rightarrow MK \parallel BH \Rightarrow \triangle BHF \sim \triangle MKF$,

где коэффициент подобия равен

$$k=\frac{MF}{BF}=\frac{4^2/5}{5}=\frac{4^2}{5^2},$$

$$\Rightarrow MK=k\cdot BH=\frac{4^2}{5^2}\cdot\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{3\cdot 4^3}{5^3}.$$

5. $V_{AMLC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ACL}\cdot MK=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\cdot 5}{\sqrt{41}}\cdot\dfrac{5^2}{\sqrt{41}}\right)\cdot\dfrac{3\cdot 4^3}{5^3}=\dfrac{128}{41}$.

Ответ: $\dfrac{128}{41}$.

Комментарий

А. Напомним, что кое-какие обозначения можно делать прямо на чертеже. Например, при определении точки K мы ограничились одной фразой в пункте 4 решения

$$MK\perp ACF,$$

которая, на самом деле, однозначно эту точку не задает. Однако мы предполагаем, что, глядя на чертеж, любой читатель и, в частности, экзаменатор, догадается, что K — это основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ACF.

Б. Для нахождения объема пирамиды, вложенной в исходную, мы провели многочисленные выкладки. Однако без некоторых из них вполне можно было бы и обойтись — просто избранный нами метод вычисления оказался не совсем рациональным.

Значительно более экономное (в смысле количества выкладок) решение получается с помощью ***метода сравнения площадей (объемов)***. Суть его в нахождении *сходного* с изучаемым объекта:

- площадь (объем) которого ищется существенно проще,
- который имеет какие-то общие с изучаемым объектом элементы для нахождения площади (объема),
- остальные элементы которого сравнимы с соответствующими элементами изучаемого объекта.

Например, в нашем случае изучаемый объект — это пирамида $AMLC$, а сходный с ней объект — пирамида $FABC$. Что же у них общего? То, что их основания (треугольники LAC и FAC) лежат в одной плоскости и даже имеют общую сторону, которую можно принять за основание этих треугольников. Таким образом, для нахождения объема внутренней пирамиды достаточно найти:

- объем внешней пирамиды, которая должна постепенно превратиться во внутреннюю,
- отношение высот h_L и h_F двух упомянутых треугольников (проведенных к их общей стороне) — на него умножится

площадь основания (а с ней и объем) пирамиды при замене вершины F вершиной L,

- отношение высот h_M и h_B этих пирамид (проведенных к общей плоскости их оснований) — на него умножится объем пирамиды при замене вершины B вершиной M.

При этом выкладок получится сравнительно немного, а выглядеть они будут так:

а) $V_{FABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AF = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right) \cdot 4 = 8$.

б) $h_L : h_F = CL : CF = \frac{AC^2}{CF^2} = \frac{25}{41}$.

в) $h_M : h_B = FM : FB = \frac{AF^2}{FB^2} = \frac{16}{25}$.

г) $V_{ALMC} = \frac{h_L}{h_F} \cdot \frac{h_M}{h_B} \cdot V_{FABC} = \frac{25}{41} \cdot \frac{16}{25} \cdot 8 = \frac{128}{41}$.

Остается невыясненной только одна деталь. Не совсем понятно, какими пояснениями необходимо сопроводить проделанные выкладки, чтобы полученный в результате текст был признан на экзамене за верное и полностью обоснованное решение. Возможно, его придется снабдить таким количеством слов, что будет проще написать и менее рациональное решение, лишь бы оно было понятно экзаменатору.

В. В процессе вычисления объема вложенной пирамиды методом сравнения мы дважды воспользовались одним и тем же общим утверждением.

Если прямая AB пересекает некоторую прямую (плоскость) λ в точке O, то расстояния от точек A и B до прямой (плоскости) λ пропорциональны отрезкам AO и BO соответственно.

Доказательство этого утверждения опирается на подобие двух прямоугольных треугольников, образованных указанными отрезками (как гипотенузами) и перпендикулярами (как катетами) к λ из соответствующих точек. Практически оно было доказано ранее в пункте 4 первого решения задачи.

Г. Отношение площадей треугольников LAC и FAC, имеющих общее основание AC, было найдено как отношение их высот h_L и h_F. Однако можно было использовать и другие соображения. Например, эти треугольники имеют общий угол C, поэтому их площади относятся как произведения пар сторон, образующих этот угол:

$$S_{LCA} : S_{FCA} = (LC \cdot CA) : (FC \cdot CA) = LC : FC$$

(более того, поскольку в этих парах имеются одинаковые стороны, достаточно найти отношение двух неодинаковых сторон).

Д. Есть и еще один, не менее удачный, вариант превращения объема внешней пирамиды в объем внутренней. Примем за основание внутренней пирамиды треугольник CLM, лежащий в плоскости основания BCF внешней пирамиды. Тогда остается:

- найти отношение оснований CL и CF этих треугольников, лежащих на одной прямой,
- найти отношение высот этих треугольников, опущенных из вершин M и B, равное отношению отрезков MF и BF,
- увидеть, что высоты пирамид $ACLM$ и $ABCF$, опущенные из вершины A, совпадают.

Разумеется, ожидаемый результат совпадет с полученным ранее.

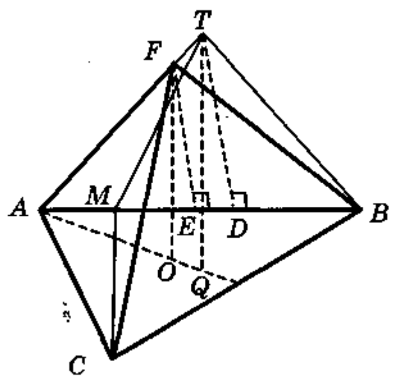
2. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что $AM : BM = 1:3$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Объем пирамиды $TBMC$ равен $\frac{5}{64}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$.

Следующие мысли реально могут возникнуть в связи с условием данной задачи.

- Мысль *первая*: высота пирамиды равна радиусу сферы, описанной около пирамиды, равно как и радиусу окружности, описанной около ее основания.
- Мысль *вторая*: точка F, равноудаленная от точек A и B, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, а точка T, равноудаленная от точек M и B, — на серединном перпендикуляре к отрезку MB.
- Мысль *третья*: методом сравнения получаем из объема пирамиды $FABC$ (выражаемого через радиус сферы) заданный объем пирамиды $TBMC$.

Решение.

1. $AB=8x$:
   $AM=2x$, $MB=6x$ (т.к. $AM:BM=1:3$),
   $AE=BE=4x$ (т.к. $AF=BF$),
   $BD=MD=3x$ (т.к. $BT=MT$).
2. $TQ, FO\perp ABC$ ($\Rightarrow TQ \parallel FO$):
   $TQ:FO=TA:FA$ (т.к. $\triangle ATQ\sim\triangle AFO$)
   $=DA:EA$ (т.к. $\triangle ATD\sim\triangle AFE$)
   $=\dfrac{5x}{4x}=\dfrac{5}{4}$.



3. $AO=FO=R$:
   $$V_{TBMC}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot BM\cdot BC\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot TQ=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{8}AB\cdot BC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{4}FO$$
   $$=\frac{5\sqrt{3}}{64}\left(R\sqrt{3}\right)^2\cdot R=\frac{5}{64}\left(R\sqrt{3}\right)^3=\frac{5}{64}\ \text{(по условию)}$$
   $$\Rightarrow\left(R\sqrt{3}\right)^3=1 \qquad \Rightarrow R\sqrt{3}=1 \qquad \Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $1/\sqrt{3}$.

Комментарий

Несмотря на продвинутые идеи, лежащие в основе предложенного нами решения, его текст оказался довольно архаичным, излишне подробным, несколько нудным и т.д. И все это из-за того, что на экзамене к нему предъявляются весьма специфические требования, обязывающие нас писать все объяснения — и сложные, и простые, и совсем очевидные.

3. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды, площадь сферы равна 48π. Точка М лежит на ребре AB так, что $AM:MB=3:5$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Найдите объем пирамиды $TACM$.

4. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что $AM:MB=2:7$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Объем пирамиды $TBCM$ равен $\dfrac{154\sqrt{3}}{81}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$.

5. Основанием пирамиды $FABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC,

тангенс угла FAC равен $\frac{16}{7}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью FAC равен 3. Точка M лежит на ребре BC, $BM=\frac{2}{5}BC$. Точка L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C. Объем пирамиды $LAMC$ равен 48. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

6. Основанием пирамиды $FABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC, тангенс угла FAC равен $\frac{15}{7}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью AFC равен 2. Точка M лежит на ребре BC, $BM=\frac{6}{\sqrt{5}}$. Точка L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды, радиус этой сферы равен 4. Найдите объем пирамиды $LAMC$.

7. В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB:FA=15:11$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 5. Точка M выбрана на ребре BC так, что $BM:MC=4:11$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB, а площадь этой сферы равна 36π. Найдите объем пирамиды $ACMT$.

8. В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB:FA=20:7$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 3. Точка M выбрана на ребре BC так, что $BM:MC=1:3$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Объем пирамиды ABMT равен 16. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB. Найдите площадь этой сферы.

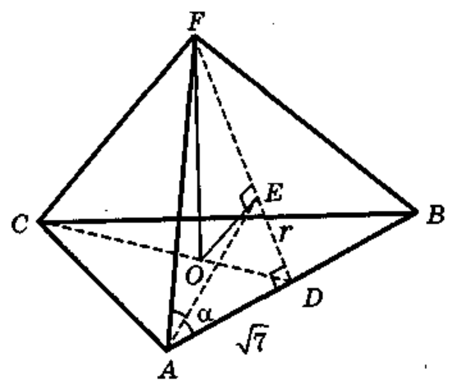
3.5. Задание С4, 2007 г.

1. **Демоверсия.** Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Основное внимание в решении должно быть приковано к равнобедренному треугольнику ABF, поскольку:

- его основание задано,
- радиус вписанной в него окружности ищется,
- его высота тесно связана с искомым радиусом через прямоугольный треугольник ODF (точнее, через его известный катет OD).

Решение.



1. O — центр $\triangle ABC$ (правильного):
   $AD=\sqrt{7}$ (CD — медиана и высота)
   $\Rightarrow OD=AD\,\mathrm{tg}\,30^\circ$ ($\triangle AOD$) $=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

2. E — центр вписанной окружности в $\triangle ABF$ (равнобедренный):
   FE, AE — биссектрисы

$\Rightarrow E \in FD$ (— медиана и высота)
$\Rightarrow ED = r$ — радиус вписанной окружности.

3. $OF \perp ABC$ (пирамида правильная),
$OE \perp ABF$ (ось и основание конуса)
$\Rightarrow OD^2 = DE \cdot FD$ (OE — высота к гипотенузе $\triangle AOF$)
$\Rightarrow FD = \dfrac{7}{3r}$.

4. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, где $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{ED}{AD}$ $(\triangle EAD) = \dfrac{r}{\sqrt{7}}$,
$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{FD}{AD}$ $(\triangle FAD) = \dfrac{7}{3r\sqrt{7}}$,
$$\Rightarrow \frac{7}{3r\sqrt{7}} = \frac{2\frac{r}{\sqrt{7}}}{1-\frac{r^2}{7}} \Rightarrow \frac{1}{3r} = \frac{2r}{7-r^2} \Rightarrow 7 - r^2 = 6r^2 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1.$$

Ответ: 1.

Комментарий

Для нахождения радиуса r вписанной в треугольник ABF окружности мы воспользовались соотношением между тангенсом полного угла при основании треугольника и тангенсом его половины. Есть, по меньшей мере, еще три способа составить уравнение для радиуса, дающее, естественно тот же ответ.

- Из формулы
$$S = pr$$
выражающей площадь треугольника через его полупериметр и радиус вписанной окружности, в нашем случае получаем уравнение
$$\sqrt{7} \cdot \frac{7}{3r} = \left(\sqrt{7} + \sqrt{7 + \left(\frac{7}{3r}\right)^2}\right) r.$$

- Применим к треугольнику FAD теорему о том, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении прилежащих. Тогда получаем пропорцию
$$ED : EF = AD : AF,$$
а из нее — уравнение
$$\frac{r}{\frac{7}{3r} - r} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7 + \left(\frac{7}{3r}\right)^2}}.$$

Кстати, именно этот вариант решения и был использован в демоверсии 2007 года.

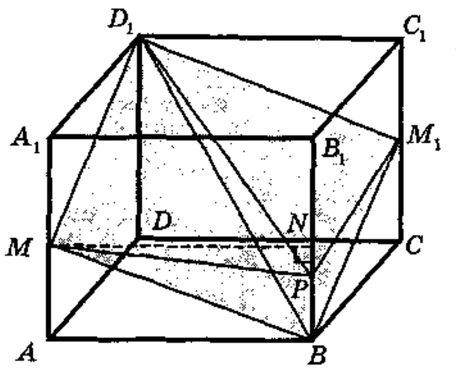
- Проведем радиус EG из центра E вписанной окружности к стороне AF. Тогда из подобия прямоугольных треугольников AFD и EFG получаем ту же пропорцию
$$EG : EF = AD : AF,$$
что и в предыдущем подходе, где роль радиуса EG играл радиус ED.

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его боковых ребрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что $AM : MA_1 = 8:11$, $B_1P : PB = 2:1$. Во сколько раз объем данного параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1?

Судя по самой постановке задачи, в ней можно применить метод сравнения объемов. Конкретнее, можно, и даже необходимо, сравнить объем пирамиды с объемом исходного параллелепипеда.

Решение.

1. Сечение — параллелограмм BMD_1M_1 (т.к. $BM \parallel D_1M_1$ и $MD_1 \parallel BM_1$).



2. $MN \perp BB_1$: $V_{PBMD_1M_1} = 2V_{PBMD_1}$, т.к. $S_{BMD_1M_1} = 2S_{BMD_1}$

$= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot S_{MPB}\cdot A_1D_1\right)$, т.к. $A_1D_1 \perp AA_1B_1$,

$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot MN\cdot PB\right)\cdot A_1D_1$

$= \frac{1}{3}\cdot A_1B_1\cdot\frac{1}{3}BB_1\cdot A_1D_1$, т.к. NMA_1B_1 — прямоугольник,

$= \frac{1}{9}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

Ответ: 9.

Комментарий

А. В приведенном решении задачи никак не использована информация о том, в каком отношении делит точка M ребро AA_1. Следовательно, в условии есть заведомо лишние данные. Как мы уже отмечали ранее, формально они не запрещены, и даже могут сознательно вноситься автором задачи в ее условие для того, чтобы:
с одной стороны (и это главное), сделать конфигурацию более определенной, облегчив работу тем, кто привык вычислять в задаче все подряд — что нужно и что не нужно,
с другой стороны (а это, может быть, и зря), несколько запутать задачу, усложнив ее тем, кто способен рассуждать

более абстрактно, и лишний раз поколебать их уверенность в своем решении.

Мы с нашим решением не попали ни в одну из перечисленных категорий экзаменуемых, заняв где-то среднее положение между двумя описанными крайними позициями, поскольку еще одним лишним данным мы все-таки воспользовались. Оказывается, прямоугольность параллелепипеда, востребованная в приведенном решении, для ответа на поставленный в данной задаче вопрос также роли не играет.

В качестве высоты пирамиды $PBMD_1$ можно было использовать не ребро A_1D_1, а высоту параллелепипеда (прямоугольного или нет, не важно), опущенную на грань AA_1B_1B, а в качестве высоты основания BMD_1 — не ребро A_1B_1, а высоту параллелограмма AA_1B_1B (прямоугольника или нет, не важно), опущенную на сторону B_1B. Ответ получился бы тот же.

Б. Возможен и другой вариант ***метода сравнения объемов*** пирамиды $PBMD_1$ и параллелепипеда, при котором за основание этой пирамиды принимается треугольник BPD_1, лежащий в плоскости основания BB_1D_1 пирамиды ABB_1D_1. Тогда высоты h_M и h_A обеих пирамид будут одинаковыми, а выкладки получатся такими:

$$V_{PBMD_1M_1} = 2V_{PBMD_1} = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot S_{PBD_1}\cdot h_M\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot B_1D_1\cdot PB\right)\cdot h_A$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot B_1D_1\cdot\frac{1}{3}BB_1h_A\right) = \frac{2}{3}\cdot V_{ABB_1D_1} = \frac{1}{3}\cdot V_{D_1A_1ABB_1}$$

$$= \frac{1}{9}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}.$$

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его боковых ребрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что $AM:MA_1 = 7:5$, $B_1P:PB = 4:3$. Во сколь-

ко раз объем данного параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1?

4. Ребра AB и AD основания $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 9 и 4. На боковых ребрах AA_1 и BB_1, равных 11, лежат точки M и P соответственно так, что $AM:MA_1=3:4$, $B_1P:PB=8:3$. Найдите объем пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1.

5. Стороны AB и BC основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 7 и 5 соответственно, боковое ребро AA_1 равно 3. Точки L, K, M лежат на ребрах AD, A_1B_1, B_1C_1 так, что $AL:AD=3:5$, $A_1K:A_1B_1=4:7$, $B_1M:B_1C_1=2:5$. Найдите объем пирамиды с вершиной K и основанием AMC_1L.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на сторонах AD, A_1B_1, B_1C_1 его оснований лежат соответственно точки L, K, M так, что $AL:LD=2:5$, $A_1K:KB_1=2:3$, $B_1M:MC_1=5:2$. Во сколько раз объем параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной K и основанием $LDMB_1$?

7. В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C=60^\circ$, $AC=14$, $BC=8$. Боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а ребро AD равно $4\sqrt{3}$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды, вершина которой в точке C. Найдите объем второй пирамиды.

8. В основании первой пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C=45^\circ$, $BC=6\sqrt{2}$, $AC=18$. Боковое ребро AD перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды. Её вершина T — основание высоты BT треугольника ABC. Во сколько раз объем первой пирамиды больше объема второй пирамиды?

3.6. Задание С4, 2008 г.

1. **Демоверсия.** Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T — середина ребра ML.

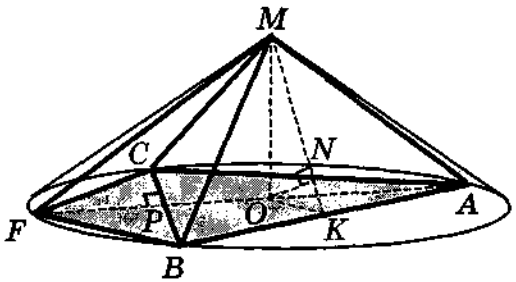
Эта задача, совпадающая с одним из вариантов задачи С4 из ЕГЭ 2005 года, решена нами ранее в соответствующем разделе.

2. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен 6. На окружности его основания выбраны точки A,B,C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB.

Прежде всего, неплохо было бы определить местоположение точки F: коль скоро все остальные вершины пирамиды фиксированы, то ее объем максимален, когда эта точка на окружности наиболее удалена от хорды BC.

Далее, исходная пирамида — конечно, правильная, и она полностью задана. Значит, остальное — дело техники (точнее, арифметики).

Решение.



1. Объем V_{MABFC} — максимален, когда F — середина дуги BC, т.к.:

   а) $V_{MABFC}=\frac{1}{3}\cdot MO\cdot(S_{ABC}+S_{BCF})=\frac{1}{3}\cdot MO\cdot\left(S_{ABC}+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot FP\right)$,

   б) высота FP — максимальна, когда FP — серединный перпендикуляр к хорде BC.

2. $\triangle AMB=\triangle AMC=\triangle CMB$
(т.к. $MA=MB=MC$ и $\angle AMB=\angle AMC=\angle CMB=90^\circ$)
$\Rightarrow \triangle ABC$ — правильный.

3. K — середина AB ($\Rightarrow \triangle AOK$ — прямоугольный):

   а) $OK=AO\cdot\sin 30^\circ=\frac{6}{2}=3$,

   б) $AB=2AK=2\cdot AO\cdot\cos 30^\circ=6\sqrt{3}$,

4. $ON\perp MK$:
$OK, MK\perp AB\Rightarrow ON\perp ABM$.

5. FH — перпендикуляр к плоскости ABM:
$FH:ON=FA:OA$ ($\triangle AFH\sim\triangle AON$)
$=2:1$, т.к. FA — диаметр, OA — радиус.

6. $\triangle ABM$, $\triangle AMO$, $\triangle OKM$ — прямоугольные:

   а) $MA=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{6}$,

   б) $OM=\sqrt{AM^2-AO^2}=\sqrt{9\cdot 6-6\cdot 6}=3\sqrt{2}$,

   в) $MK=\sqrt{OM^2+OK^2}=\sqrt{9\cdot 2+9}=3\sqrt{3}$,

   г) $ON=\frac{OK\cdot OM}{MK}=\frac{3\cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\sqrt{6}$,

   д) $FH=2\cdot ON=2\sqrt{6}$.

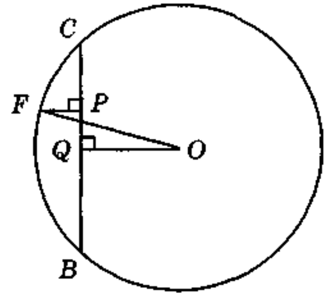
   Ответ: $2\sqrt{6}$.

Комментарий

В нашем решении голословно заявлено, что *высота FP — максимальна, когда FP — серединный перпендикуляр к хорде BC*. Можно ли обосновать этот факт? Да, например, с помощью следующих двух соображений:

- если OQ — серединный перпендикуляр к хорде BC, то справедлива оценка

$$FP+OQ\leqslant OF \;\Leftrightarrow FP\leqslant OF-OQ\ (=\text{const}),$$



- равенство в полученной оценке достигается тогда и только тогда, когда

$$P,Q\in OF \;\Leftrightarrow OF\perp BC.$$

К счастью, как выяснилось после экзамена, школьникам разрешалось считать этот факт очевидным. Правда, никто им, разумеется, этого не сказал — ни перед экзаменом, ни во время него. Даже наоборот, задолго до него, предварительно было объявлено, что в задаче C4, в отличие, скажем, от задач C1 и C2, всегда необходимо все подробно обосновывать.

Таким образом, в результате произведенной на экзамене амнистии отчасти пострадали как раз добросовестные школьники, совершенно напрасно потратившие свои силы и время на аккуратное доказательство указанного факта.

3. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен $2\sqrt{6}$. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB.

4. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен $6\sqrt{6}$. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, CMB, AMC равны α каждый, причем $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{5}{7}}$. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB.

5. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен $2\sqrt{30}$. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, CMB, AMC равны α каждый, причем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3}{10}}$. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки A до плоскости MBF.

6. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен $4\sqrt{3}$. В основание этого конуса вписан четырехугольник $ABCD$ так, что углы BMA, CMB, DMC, AMD равны 60° каждый. На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, выбрана точка F так, что объем пирамиды $MABFCD$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB.

7. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен $6\sqrt{10}$. В основание этого конуса вписан четырехугольник $ABCD$ так, что углы BMA, CMB, DMC, AMD равны α каждый, причем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$. На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, выбрана точка F так, что объем пирамиды $MABFCD$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB.

8. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен $2\sqrt{2}$. В основание этого конуса вписан шестиугольник $ABCDEF$ так, что углы AMB, BMC, CMD, DME, EMF, FMA равны α каждый, причем $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$. На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, выбрана точка L так, что объем пирамиды $MABLCDEF$ наибольший. Найдите расстояние от точки L до плоскости ABM.

9. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{19}{5}}$ и высота 4. Точки A, B, C лежат на окружности основания конуса так, что AB — диаметр и $\angle AMC=60^\circ$. На

дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, выбрана точка L так, что объем пирамиды $MABLC$ наибольший. Найдите расстояние от точки L до плоскости AMC.

10. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен $2\sqrt{21}$ и высота $2\sqrt{3}$. Точки A, B, C лежат на окружности основания конуса так, что AB — диаметр и $\angle AMC = 90°$. На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, выбрана точка L так, что объем пирамиды $MABLC$ наибольший. Найдите расстояние от точки L до плоскости AMC.

Приложения

А. Общие критерии проверки заданий типа С

Все пять заданий С1–С5 Единого государственного экзамена с развернутым ответом условно разбиты на три группы. Для каждой из них действуют собственные *общие критерии* проверки, указывающие лишь самое общее направление, которого надо придерживаться при оценке школьных решений.

Хотя абсолютно по каждому конкретному варианту каждой задачи каждого года экспертам предлагаются конкретные, частные критерии оценки непосредственно для проверки этого варианта, тем не менее, с ними сосуществуют и общие критерии. Они несколько отличаются от частных и действуют тогда, когда те по какой-либо причине неприменимы. Такая ситуация возникает, как правило, когда проверяемое решение не укладывается в рамки конкретного решения, на основе которого составлены критерии по данной задаче.

Группа 1. Задания С1 и С2 — повышенного уровня сложности. Максимальная оценка за каждое из них — 2 балла.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения заданий С1 и С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех выделенных шагов решения. Верно выполнены все преобразования. Допускаются одна описка и/или негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки/описки получен неверный ответ.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения заданий C1 и C2
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

Группа 2. Алгебраические задания C3 и C5 — высокого уровня сложности. Максимальная оценка за каждое из них — 4 балла.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения заданий C3 и C5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения[1]. Верно обоснованы *все ключевые моменты* решения[2]. Необходимые для решения чертежи, рисунки, схемы выполнены без ошибок. Правильно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Верно обоснована только *часть ключевых моментов* решения[3]. Необходимые для решения чертежи, рисунки, схемы выполнены без ошибок. Допустимы одна описка и/или негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате ошибки или описки может быть получен неверный ответ.

[1] В конкретных критериях перечисляются эти шаги решения.

[2] В конкретных критериях описываются эти моменты решения.

[3] В конкретных критериях указываются эти ключевые мо-
менты решения.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения заданий C3 и C5
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения и/или обоснована только *часть ключевых моментов* решения[1]. Допустимы негрубые ошибки в чертежах, рисунках, схемах, приведенных в решении, одна–две негрубые ошибки и/или описки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ.
1	Общая идея, способ решения верные, но не выполнены некоторые промежуточные этапы решения или решение не завершено. Указываются те действия, которые должен безошибочно выполнить ученик, чтобы судить о том, что он использовал правильный способ решения.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1–4 балла.

Группа 3. Стереометрическое задание C4 — высокого уровня сложности. Максимальная оценка за него — 4 балла.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения задания C4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения[2]. Верно обоснованы *ключевые моменты* решения[3]. Правильно выполнены все преобразования и вычисления, получен верный ответ.

[1] В конкретных критериях указываются эти шаги решения и эти ключевые моменты.

[2] В конкретных критериях перечисляются все шаги решения.

[3] В конкретных критериях описываются эти ключевые моменты решения.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения задания С4
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Явно описаны взаимное расположение и свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют ключевую роль в решении задачи. Допустимо отсутствие обоснований или *неточности*[1] в обоснованиях ключевых моментов. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустима одна описка и/или негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения[2], свидетельствующая о том, что учащийся правильно определил взаимное расположение и свойства представленных в условии фигур и их элементов, но не описал их. Допустимо отсутствие обоснований или неточности в обоснованиях ключевых моментов решения. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок возможен неверный ответ.
1	Общая идея, способ решения верные, но решение не завершено. Указываются те действия, которые должен безошибочно выполнить ученик, чтобы судить о том, что он использовал правильный метод решения.

[1] Неточностью в обоснованиях являются замена свойства на определение или признак, или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

[2] В конкретных критериях указываются эти шаги решения.

Баллы	Общие критерии оценки выполнения задания С4
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

Б. Критерии проверки работ ЕГЭ 2005 г.

Все рассмотренные ниже задачи из вариантов Единого государственного экзамена 2005 г. решены нами ранее в соответствующих разделах. Мы помещаем, для информации и, быть может, для невольного сравнения, те материалы к ним (решения, замечания и критерии оценок), которые реально раздавались экспертам на экзамене при проверке ими работ выпускников.

Эти тексты подверглись в настоящем пособии лишь незначительной редакционной обработке с целью их унификации и приведения в соответствие друг с другом и с остальным текстом. При этом истинный дух и колорит материалов полностью сохранены.

С1. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{\log_7(10-2x)}{3-x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{2}{3-x}$.

Решение.

1. $\dfrac{\log_7(10-2x)}{3-x}>\dfrac{2}{3-x}$; $\dfrac{\log_7(10-2x)-2}{3-x}>0$.

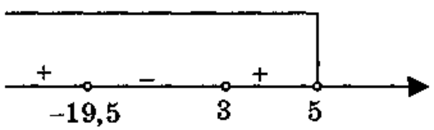
2. Решим неравенство методом интервалов:

а) $10-2x>0$; $x<5$;

б) $\log_7(10-2x)-2=0$; $10-2x=49$; $x=-19{,}5$

в) $3-x\neq 0$; $x\neq 3$.

г)



Ответ: $(-\infty;-19{,}5)\cup(3;5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составление неравенства, соответствующего условию; 2) решение неравенства. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность выделенных шагов решения. В шаге 2 решения неравенства допустима одна описка и негрубая вычислительная ошибка при определении знаков значений левой части неравенства на найденных промежутках. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С2. Решите уравнение $\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{26+3x-5x^2}=x-1$.

Решение.

1) $|1-x|+\sqrt{26+3x-5x^2}=x-1$.

2) Пусть $1-x\leqslant 0$, тогда $26+3x-5x^2=0$, значит $x_1=-2$, $x_2=2{,}6$. Число -2 не удовлетворяет условию $1-x\leqslant 0$.

3) Пусть $1-x>0$, тогда $\sqrt{26+3x-5x^2}=2(x-1)$ и уравнение не имеет корней, т.к. его правая часть принимает отрицательные значения.

Ответ: $2{,}6$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) преобразование исходного уравнения в иррациональное уравнение, содержащее модуль; 2) рассмотрение случая $1-x\leqslant 0$ и решение соответствующего уравнения (с исключением «постороннего» корня); 3) рассмотрение случая $1-x>0$ и решение соответствующего уравнения. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность выделенных шагов решения. При решении уравнения в шаге 2 или 3 допущена одна описка или негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой описки или ошибки возможен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2 балла.

С3. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b=9^a+3^{2+a}-1$ и $c=3^{2-a}-9^{-a}-5$ меньше 9.

Решение.

1) Пользуясь возрастанием функции $y=3^x$, получаем
$b<9\Leftrightarrow 9^a+3^{2+a}-1<9\Leftrightarrow 9^a+9\cdot 3^a-10<0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(3^a-1)\cdot(3^a+10)<0\Leftrightarrow 3^a<1\Leftrightarrow a<0$ (т.к. $3^a+10>0$).

2) Пользуясь возрастанием функции $y=3^x$, получаем

$c<9 \Leftrightarrow 3^{2-a}-9^{-a}-5<9 \Leftrightarrow 9^{-a}-9\cdot 3^{-a}+14>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(3^{-a}-2\right)\cdot\left(3^{-a}-7\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{-a}<2\\ 3^{-a}>7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-a<\log_3 2\\ -a>\log_3 7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a>-\log_3 2\\ a<-\log_3 7.\end{array}\right.$

3) Наибольшее из чисел b и c меньше 9 тогда и только тогда, когда каждое из них меньше 9, т.е. когда

$\begin{cases}b<9\\ c<9\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\log_3 2<a<0\\ a<-\log_3 7.\end{array}\right.$

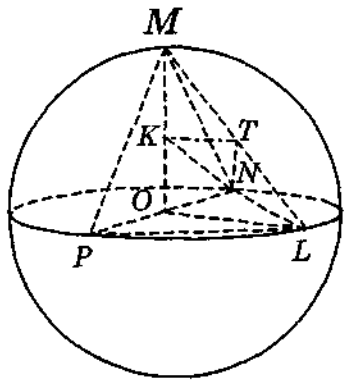
Ответ: $(-\infty;-\log_3 7)\cup(-\log_3 2;0)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составление и решение первого неравенства; 2) составление и решение второго неравенства; 3) составление системы $\begin{cases}b<9\\ c<9\end{cases}$ и ее решение. Обоснованы следующие моменты решения: а) в шаге 1 или 2 сделана ссылка на возрастание функции $y=3^x$; б) в шаге 1 имеется ссылка на неравенство $3^a+10>0$. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допустимо отсутствие обоснований моментов а) и б). Допустима описка, в результате которой возможен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаги 1 и 2 решения, а шаг 3 либо отсутствует, либо не доведен до конца, либо выполнен неверно (например, взято объединение множеств решений неравенств, неверно найдено их пересечение и т.п.).

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
	Допустимо отсутствие обоснований моментов а) и б). Ответ не получен или неверен.
1	Верно выполнен один из шагов 1 или 2 решения, а остальные шаги либо отсутствуют, либо не доведены до конца, либо выполнены неверно. Допустимо отсутствие обоснований моментов а) и б). Ответ не получен или неверен.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1–4 балла.

С4. Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T — середина ребра ML.

Решение.



1) Пусть O — центр сферы, а R — ее радиус. Тогда $PN=2R$ как диаметр сферы. Поскольку точки M и L лежат на сфере, то $OP=OL=ON=OM=R$. Сечения сферы плоскостями PLN и PMN — окружности радиуса R, описанные вокруг треугольников PLN и PMN, причем $\angle PMN=\angle PLN=90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр PN.

2) Пусть H — высота пирамиды $PNML$, опущенная из вершины M и h — высота треугольника PLN, проведенная к стороне PN. Поскольку точка M лежит на сфере, а плоскость PLN содержит центр сферы, то $H \le R$, причем $H = R$, если $MO \perp PNL$. Аналогично, поскольку точка L лежит на сфере, то $h \le R$, причем $h = R$, если $LO \perp PN$. Отсюда для объема пирамиды $PNML$ имеем

$$V_{PNML} = \frac{1}{3} S_{PNL} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot PN \cdot h \cdot H \leqslant \frac{1}{6} \cdot 2R \cdot R \cdot R = \frac{R^3}{3}.$$

При этом $V_{PNML} = \dfrac{R^3}{3}$, если $H = h = R$.

Таким образом, пирамида $PNML$ имеет наибольший объем, если треугольники PLN и PMN — прямоугольные и равнобедренные, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях.

3) Поскольку $MO \perp PLN$, то $MO \perp OL$. Но $PN \perp OL$ и поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $PMN \perp OL$. Пусть K — середина MO. Проведем KT — среднюю линию треугольника OLM. Тогда $KT \parallel OL$. Значит, $KT \perp PMN$ и поэтому KN — проекция NT на плоскость PMN и $\angle TNK$ — угол между прямой NT и плоскостью PMN. Пусть $\angle TNK = \alpha$.

4) По свойству средней линии $KT = 0{,}5OL = 0{,}5R$. Т.к. треугольники LON, LOM, NOM равны по двум катетам, то треугольник MNL — правильный со стороной $LN = ON\sqrt{2} = R\sqrt{2}$. NT — высота треугольника MNL, значит, $NT = \dfrac{NL\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$.

Отсюда $\sin\alpha = \dfrac{KT}{NT} = \dfrac{R/2}{R\sqrt{6}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) установлено, что треугольники PLN и PMN — прямоугольные; 2) установлено, что в пирамиде $PMNL$, имеющей наибольший объем и вписанной в данную сферу, треугольники PLN и PMN — равнобедренные, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях; 3) построен угол между прямой NT и плоскостью PMN; 4) вычислен синус угла между прямой NT и плоскостью PMN. Использованы верные формулы для нахождения искомых величин. Верно обоснованы ключевые моменты решения: а) вид пирамиды, имеющей наибольший объем, вписанной в данную сферу; б) построение угла между прямой NT и плоскостью PMN. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1–4. Использованы верные формулы для нахождения искомых величин. Приведены утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения. Допустимо отсутствие обоснований ключевых моментов решения или неточности в обоснованиях[1], но не грубые ошибки. Допустимы описка и негрубая ошибка в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки или ошибки возможен неверный ответ.

[1] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение или на признак, или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
2	Приведены шаги решения 2–4. Использованы верные формулы для нахождения искомых величин. Утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения, либо оба отсутствуют, либо приведено только одно из них. Но сами ключевые моменты использованы в решении. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустимы описки и негрубые ошибки в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено: имеется шаг 2) решения, который ясно отражен и виден на чертеже (в соответствующих треугольниках обозначены углы, равные 90°, и равные стороны) или описан словесно. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок. Допустимы негрубые ошибки в преобразованиях и вычислениях, не влияющие на правильность хода решения.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют выше указанным критериям выставления оценок 1–4 баллов.

С5. Даны два уравнения:

$$\log_5(x(p^2+6)) = p+5-2x \qquad (1)$$

и

$$x+\frac{3}{x}=\frac{x^2(5p+1)+(4-3p)x+3}{x(3p+2)}. \qquad (2)$$

Значение параметра p выбирается так, что $3p+2\neq 0$ и число различных корней первого уравнения равно сумме

числа $p-3$ и числа различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Решение.

1) Так как $p^2+6>0$, то функция $y=\log_5(x(p^2+6))$ определена на промежутке $(0;+\infty)$. Так как основание логарифма больше 1, то эта функция возрастает. Линейная функция $y=p+5-2x$ убывает, т.к. коэффициент при x отрицателен. Поэтому число n корней уравнения (1) равно 0 или 1.

2) С возрастанием x функция $y=\log_5(x(p^2+6))$ возрастает неограниченно. При достаточно больших x ее график расположен выше прямой $y=p+5-2x$. При приближении x к нулю значения функции $y=\log_5(x(p^2+6))$ неограниченно убывают и график окажется ниже этой прямой. Значит, прямая и график функции пересекутся, т.е. $n=1$.

3) Число 0 не является корнем уравнения (2). При $x\neq 0$ уравнение (2) равносильно уравнениям:

$$x^2(3p+2)+3(3p+2)=x^2(5p+1)+(4-3p)x+3,$$

$$(2p-1)x^2-(3p-4)x-3(3p+1)=0,$$

$$(x-3)((2p-1)x+(3p+1))=0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) всегда имеет ненулевой корень $x=3$. Поэтому число k различных корней уравнения (2) равно 1 или 2.

4) По условию $1=(p-3)+k$, т.е. $p=4-k$. Поэтому $k=2$ равно 2 или 3. Если $p=3$, то $k=1$, а уравнение (3) примет вид $(x-3)(5x+10)=0$. У него 2 ненулевых корня, т.е. $k=2$, что противоречит условию $k=1$. Если $p=2$, то $k=2$, а уравнение (3) примет вид $(x-3)(3x+7)=0$. У него 2 ненулевых корня, т.е. $k=2$. Значит, $p=2$ удовлетворяет условию задачи.

5) При $p=2$ уравнение (1) примет вид $\log_5(10x)=7-2x$. Его единственным корнем является число $x=2{,}5$, т.к. $\log_5 25=2$, $7-5=2$.

Ответ: 2,5.

Замечания.

А) Формально, в шаге 2 следовало бы сослаться на непрерывность. Однако и приведенное выше рассуждение вполне допустимо для работы выпускника средней школы. Его можно (но необязательно) сопроводить эскизами графиков.

Б) Допустимо в шаге 2 не ссылаться на неравенство $5>1$, если такая ссылка уже есть в шаге 1.

В) В шаге 3 можно и не выделять множитель $x-3$, но тогда $k\in\{0,1,2\}$ и усложнится перебор в шаге 4.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) оценка числа корней уравнения (1), ($n\leqslant 1$); 2) нахождение числа корней уравнения (1), ($n=1$); 3) сведение уравнения (2) к квадратному, оценка числа его корней ($1\leqslant k\leqslant 2$); 4) нахождение всех возможных значений параметра p, отбор единственного значения параметра, удовлетворяющего условию; 5) решение уравнения (1) для найденного значения параметра. Обоснованы все моменты решения: а) в шаге 1 неравенство $x>0$ обосновано ссылкой на условие $p^2+6>0$; б) в шагах 1 и 2 имеются ссылки на свойства логарифмической и линейной функций (характер монотонности в 1, неограниченность в 2);

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
	в) в шаге 3 равносильность обоснована явной ссылкой на условие $x\neq 0$; г) в шаге 4 есть ссылка на то, что найденные корни отличны от нуля; д) в шаге 5 приведена явная проверка подстановкой. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 5 допустимо указание корня, без его проверки подстановкой. Обоснованы ключевые моменты б), в), г). Допустима 1 описка и негрубая вычислительная ошибка в шаге 5, в результате чего может быть получен неверный ответ.
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Верно выполнены шаги 1, 3 решения. Указаны все возможные значения параметра p (быть может, без явной ссылки на условие). Верно рассмотрен хотя бы один из двух возможных случаев этих значений. Обоснован ключевой момент б). Допустимы 1–2 негрубые ошибки или описки в вычислениях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате может быть получен неверный ответ.
1	Общая идея, ход решения верны, но решение, возможно, не завершено. Верно выполнен шаг 1 решения. В шаге 3 получено верное квадратное уравнение относительно x (быть может, без разложения на линейные множители). Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено. Обоснования ключевых моментов отсутствуют. Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
	В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

В. Критерии проверки работ ЕГЭ 2008 г.

Предлагаемые ниже решения, замечания и критерии оценок взяты из материалов, реально раздававшихся экспертам на экзамене 2008 г. (все разобранные ниже задачи уже решены нами ранее в соответствующих разделах). Кроме того, в предыдущем приложении размещены критерии проверки работ 2005 г. Читатель имеет возможность самостоятельно сравнить упомянутые критерии друг с другом, чтобы уловить какие-то тенденции в их развитии и сделать для себя конкретные выводы на будущее.

С1. Найдите наименьшее значение функции

$f(x)=(2x+4)^5-4(2x+4)^4$ при $|x+2|\leqslant 1$.

Р е ш е н и е.

1) $|x+2|\leqslant 1 \Leftrightarrow -1\leqslant x+2\leqslant 1 \Leftrightarrow -3\leqslant x\leqslant -1$.

2) $f'(x)=5\cdot 2\cdot(2x+4)^4-4\cdot 4\cdot 2\cdot(2x+4)^3=2(2x+4)^3(10x+4)$.

$f'(x)=0$ при $x=-2$, при $x=-0,4$.

$-0,4\notin[-3;-1]$.

$f(-3)=-2^5-4\cdot 2^4=-2^5-2^6=-3\cdot 2^5=-96$,

$f(-2)=0$,

$f(-1)=2^5-4\cdot 2^4=2^5-2^6=-2^5$.

Наименьшее значение $y=f(x)$ на отрезке $[-3;-1]$ равно -96.

О т в е т: -96.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) определен промежуток, на котором требуется найти наименьшее значение функции; 2) найдено наименьшее значение функции. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены описка и/или вычислительная ошибка в шаге 2, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С2. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $3x^2\log_3(2+3x)-6x\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2+3x}$ и $3x^2+2x$ принимают равные значения.

Р е ш е н и е.

1) *Из условия задания следует*

$$3x^2\log_3(2+3x)-6x\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2+3x}=3x^2+2x.$$

2) Решим составленное уравнение:

$$3x^2\log_3(2+3x)-6x\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2+3x}=3x^2+2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2\log_3(2+3x)+2x\log_3(2+3x)=3x^2+2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+2x)(\log_3(2+3x)-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x^2+2x=0\\2+3x>0\end{cases}\\ \log_3(2+3x)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x>-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\\ \\ \begin{cases}x>-\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{cases}\\ x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right..$$

Ответ: $0; \frac{1}{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составлено уравнение в соответствии с условием задания; 2) найдены корни составленного уравнения. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена вычислительная ошибка или описка в шаге 2, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С3. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{\left(2^x+3\sqrt{2}\cdot 2^{-x}-5\right)-a}{a-\left(2\sin\sqrt{x-1}-3\right)}\leqslant 0$ не имеет решений.

Решение.

1. Преобразуем неравенство к виду $\dfrac{a-f\left(2^x\right)}{a-g(x)}\geqslant 0$, где $g(x)=2\sin\sqrt{x-1}-3$, $x\geqslant 1$, $f(t)=t+3\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{t}-5$, $t=2^x\geqslant 2$.

2. Исследуем функцию f: ее производная
$$f'(t)=1-3\sqrt{2}\frac{1}{t^2}=\frac{(t-t_0)(t+t_0)}{t^2},$$
равна нулю в точке $t_0=\sqrt{3\sqrt{2}}=\sqrt[4]{18}>\sqrt[4]{16}=2$, отрицательна при $2<t<t_0$ и положительна при $t>t_0$, поэтому
$$f_{наим}=f\left(t_0\right)=\sqrt{3\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\sqrt{2}}}-5=2\sqrt[4]{18}-5.$$

3. Наибольшее значение функции g достигается, например, в точке $x_0=1+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ и равно $g_{наиб}=2\cdot 1-3=-1$.

4. При любом значении $x\geqslant 1$ справедлива оценка $g(x)<f(2^x)$, т.к.
$$g(x)\leqslant -1=2\cdot 2-5<2\sqrt[4]{18}-5\leqslant f(2^x).$$
Поэтому при $x\geqslant 1$ исходное неравенство равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{l}a<g(x)\\a\geqslant f(2^x)\end{array}\right.$$
(при $x<1$ оно не выполняется).

5. Исходное неравенство не выполняется ни при одном значении x тогда и только тогда, когда
$g_{наиб}\leqslant a<f_{наим}\Leftrightarrow -1\leqslant a<2\sqrt[4]{18}-5$.

Ответ: $-1\leqslant a<2\sqrt[4]{18}-5$.

Замечание.

Исследование функции f на экстремум в пункте 2 решения можно провести с помощью неравенства для средних:

$$f\left(2^x\right) \geqslant 2\sqrt{2^x\cdot\left(3\sqrt{2}\cdot 2^{-x}\right)}-5=2\sqrt[4]{18}-5=f\left(2^{x_0}\right),$$

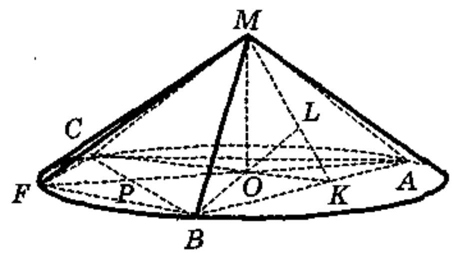
где $2^{x_0}=3\sqrt{2}\cdot 2^{-x_0} \Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}\log_2\left(3\sqrt{2}\right)$.

Баллы	Критерии оценки решений задачи С3
4	Получен правильный ответ. Приведено верное решение, отвечающее следующим требованиям: 1) показано, что все значения параметра, включенные в ответ, обладают описанным в задаче свойством; 2) показано, что остальные значения параметра не обладают описанным в задаче свойством; 3) при этом: а) получены необходимые оценки для функций; б) установлена достижимость оценки функции f на области определения функции g.
3	Получен ответ, представляющий собой промежуток для значений параметра с верными концами, но возможно, с неточными знаками неравенств, т.е. строгими (нестрогими) вместо нестрогих (строгих). Приведено решение, отвечающее требованиям 1, 2 и 3а.
2	Получен ответ, представляющий собой промежуток для значений параметра, который: либо содержится в верном промежутке (возможно, с неточными знаками неравенств), при этом приведено решение, отвечающее требованию 1; либо содержит верный промежуток (возможно, с неточными знаками неравенств), при этом приведено решение, отвечающее требованию 2.
1	Ответ, возможно, не получен или неправилен. Приведено решение, отвечающее хотя бы одному из требований 1, 2 или 3а.

Баллы	Критерии оценки решений задачи С3
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1–4 балла.

С4. Дан конус с вершиной М, радиус основания которого равен 6. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки А, так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB.

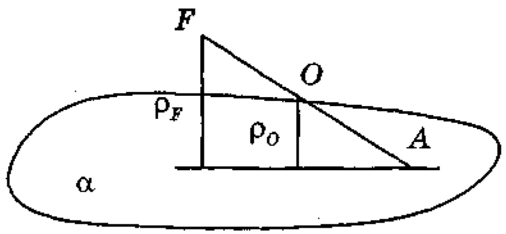
Решение.



1) $MA=MB=MC$, как образующие конуса и $\angle AMB=\angle AMC=\angle CMB=90^\circ$, следовательно, треугольники AMB, AMC, CMB равны. Поэтому $AB=AC=CB$, значит, треугольник ABC — равносторонний и вписан в окружность радиуса 6. Следовательно, $AB=AC=CB=6\sqrt{3}$.

2) Объем V пирамиды $MABFC$ вычисляется по формуле $V=\dfrac{MO}{3}\left(S_{ABC}+S_{BCF}\right)$, где S_{ABC}, S_{BCF} — площади треугольников ABC и BCF. Поскольку величины MO, BC и S_{ABC} в условии задачи постоянны, то $V\leqslant\dfrac{MO}{3}\left(S_{ABC}+\dfrac{BC}{2}\cdot h_F\right)$, где h_F — наибольшая величина расстояния от точки дуги BC, не содержащей точку A, до стороны BC треугольника ABC. Расстояние от точки F дуги окружности до стягивающей ее хорды наибольшее, если F — середина этой дуги.

Итак, основанием пирамиды $MABFC$, удовлетворяющей условиям задачи, является четырехугольник, в которой вершины A, B, C делят окружность основания конуса на три равные части и вершина F — середина дуги BC.



3) Пусть ρ_F и ρ_O — расстояния от точек F и O до плоскости $\alpha=(MAB)$ соответственно. Тогда $\rho_F:\rho_O=FA:OA=2:1$, следовательно, $\rho_F=2\rho_O$.

4) Пусть K — середина AB. Тогда $MAB\perp MOK$. Пусть OL — высота треугольника MOK. По свойству перпендикулярных плоскостей $OL\perp MAB$. Следовательно, $OL=\rho_0$. Т.к. $AB=6\sqrt{3}$, то $MA=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=3\sqrt{6}$ и $OM=\sqrt{AM^2-AO^2}=3\sqrt{2}$.

Тогда $\rho_0=\dfrac{OK\cdot OM}{MK}=\sqrt{6}$.

Следовательно, искомое расстояние $\rho_F=2\sqrt{6}$.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) установлено, что треугольник ABC — равносторонний; 2) установлено, что пирамида $MABFC$ удовлетворяет условию задачи, только если вершина F — середина дуги BC; 3) найдено соотношение между расстояниями от точки F и от точки O до плоскости MAB;

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
	4) вычислены расстояния от точки O до плоскости MAB и искомое расстояние от точки F до плоскости MAB. Обоснованы ключевые моменты решения: а) расположение вершин основания $ABFC$ пирамиды $MABFC$, имеющей наибольший объем; б) высота OL треугольника MOK — расстояние от точки O до плоскости MAB. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1–4. Приведены утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения. Допустимы отсутствие обоснований ключевых моментов решения или неточности в обоснованиях[1], но не грубые ошибки. Допустимы одна описка и/или негрубая ошибка в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки и/или ошибки возможен неверный ответ.
2	Приведены шаги решения 1, 2 и найдено расстояние от точки O до плоскости MAB или, может быть, от какой-либо другой точки, например, от точки C. Допустимо отсутствие утверждений, составляющих ключевые моменты а) и б) решения. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустимы описки и/или негрубые ошибки в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено: имеются шаги 1 и 2 решения, которые описаны словесно или ясно отражены и видны на чертеже (в соот-

[1] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение или на признак, или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
	ветствующих треугольниках обозначены углы, равные 90°, и равные стороны). Вычислена длина стороны основания пирамиды. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют выше указанным критериям выставления оценок 1–4 баллов.

С5. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{33}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 32$. Найдите $a_{15} - a_{14}$, если известно, что $a_{33} = 0$,

$$\text{а } f(x) = \begin{cases} 4 + \dfrac{24}{x-4}, & \text{если } x < 4, \\ 3 - \dfrac{16}{x} + \log_3\left(9 - \dfrac{80}{x+5}\right), & \text{если } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Решение.

1) Т.к. $a_2 = f(a_1)$, то a_2 принадлежит множеству значений функции f. Оценим это множество сверху.
Если $x < 4$, то $x - 4 < 0$ и поэтому $f(x) < 4$.
Если $x \geqslant 4$, то $3 - \dfrac{16}{x} < 3$ и $0 < 9 - \dfrac{80}{x+5} < 9$. Т.к. основание логарифма больше 1, то $\log_3\left(9 - \dfrac{80}{x+5}\right) < \log_3 9$.
Значит, $f(x) < 5$ для всех x. Поэтому $a_2 < 5$.

2) Т.к. $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$, то a_3 принадлежит множеству значений функции $y = f(f(x))$. Если $f(x) < 4$, то $f(f(x)) < 4$. Если $4 \leqslant f(x) < 5$, то $3 - \dfrac{16}{f(x)} < 3 - \dfrac{16}{5} < 0$ и $9 - \dfrac{80}{f(x)+5} < 9 - \dfrac{80}{10}$.
Поэтому $\log_3\left(9 - \dfrac{80}{f(x)+5}\right) < \log_3 1$, $\log_3\left(9 - \dfrac{80}{f(x)+5}\right) < 0$, т.е. $f(f(x)) < 0$.

Значит, $f(f(x)) < 4$ для всех x. Поэтому $a_3 < 4$ и, значит, $a_4 = f(a_3) < 4$.
Аналогично, $a_5 = f(a_4) < 4, \ldots, a_{32} = f(a_{31}) < 4$.

3) Т.к. $a_{33} = 0$ и $a_{32} < 4$, то

$$f(a_{32}) = a_{33} \Leftrightarrow 4 + \frac{24}{a_{32} - 4} = 0 \Leftrightarrow -6 = a_{32} - 4 \Leftrightarrow a_{32} = -2.$$

Т.к. $a_{32} = -2$ и $a_{31} < 4$, то

$$f(a_{31}) = a_{32} \Leftrightarrow 4 + \frac{24}{a_{31} - 4} = -2 \Leftrightarrow -4 = a_{31} - 4 \Leftrightarrow a_{31} = 0.$$

Аналогично,
$a_{30} = -2, a_{29} = 0$, $a_{28} = -2, a_{27} = 0, \ldots, a_{15} = 0, a_{14} = -2$.
Значит, $a_{15} - a_{14} = 2$.

Ответ: 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) проверка того, что $a_2 < 5$; 2) проверка того, что все числа $a_3, a_4, \ldots, a_{32}$ меньше 4; 3) установление закономерности изменения (периодичности) членов последовательности $a_3, a_4, \ldots, a_{33}$, вычисление $a_{15} - a_{14}$. Обоснованы все моменты решения: а) в шаге 1 есть ссылка на положительность подлогарифмического выражения; б) в шаге 1 имеется явная ссылка на то, что a_2 принадлежит множеству значений функции f[1];

[1] Допустима сначала оценка множества значений сверху и затем явное использование равенства $a_2 = f(a_1)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
	в) в шаге 2 имеется явная ссылка на то, что a_3 принадлежит множеству значений функции $y = f(f(x))$ [1]; г) в шаге 3 есть ссылка на неравенства $a_{32} < 4$ и $a_{31} < 4$. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 3 допустимо явное нахождение a_{32} и ссылка на аналогичное нахождение a_{31}. Обоснован ключевой момент в) и в шаге 3 есть ссылка на неравенство $a_{32} < 4$. Допустима 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка в шаге 3, в результате чего может быть получен неверный ответ.
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Выполнены шаг 1 и, частично, шаг 2: доказано, что $f(f(x)) < 4$ для всех x. Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено, а ключевые моменты не обоснованы.
1	Общая идея, ход решения верны. Выполнен шаг 1: проведено исследование функции f, получено неравенство $a_2 < 5$. Или же проведены верные вычисления a_{32}, a_{31} из шага 3, но с использованием $f(x)$ только при $x < 4$, а шаги 1 и 2 отсутствуют. Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено, а ключевые моменты не обоснованы.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

[1] Допустима сначала оценка множества значений сверху и затем явное использование равенства $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$.

Г. Предметный указатель

В приведенном ниже списке после каждого термина, прежде всего, указано, в каком разделе книги он упоминается, причем выделен там жирным курсивом. Далее записан номер задачи (иногда не единственный), в комментариях к которой *этот термин разъясняется или обсуждается.*

Д. Ответы

1.1. Задание С1, 2002 г.

3. $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
4. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
6. $x=-\dfrac{5}{2}$.
7. $x=2$.
9. $x=0,\ -1{,}6$.
10. $x=0{,}9$.

1.2. Задание С1, 2003 г.

3. $x=-2$.
4. $x=-10$.
6. $x=8$.
7. $x=64$.
8. $x=0{,}1$.
9. $x=0{,}008$.
11. $x=1$.
12. $x=-2$.
13. $x=-2$.

1.3. Задание С1, 2004 г.

3. $x=-2,\ y=2$.
4. $x=-4/3,\ y=1/6$.
6. $x=6,\ y=-4$.
7. $x=-2,\ y=16$.
8. $x=3,\ y=1$.

1.4. Задание С1, 2005 г.

3. $x<-55,\ \ 4{,}25<x<7{,}5$.
4. $x<-21,\ \ 3<x<4$.
5. $-5{,}75<x<11{,}25$.
6. $-\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{23}{4}$.
7. $1<x<4,\ \ x>\dfrac{20}{3}$.
8. $-2<x<0,\ \ x>4{,}2$.

1.5. Задание С1, 2006 г.

3. $x=9$.
4. $x=1/8$.
5. $x=-1$.
6. $x=0$.
7. $x=1$.
9. $x=0$.
10. $x=\pm\dfrac{2\pi}{5}$.

1.6. Задание С1, 2007 г.

3. 3. 4. 2. 6. –1. 7. –2. 9. –0,3. 10. 0,8.

1.7. Задание С1, 2008 г.

3. 80.
4. 184.
5. 112.
6. 2.
7. –10.
8. 0,75.
9. –0,8.
10. –18.

1.8. Задание С2, 2005 г.

3. $x = 4{,}25$.
4. $x = 1{,}25$.
5. $x = \log_3 6$.
6. $x = \log_6 11$.
8. $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

1.9. Задание С2, 2006 г.

3. $-1/3 < x < 0$.
4. $6 < x < 19/3$.
5. $11 < x < 92$.
6. $0{,}4 < x < 10$.
7. $x > 2$.
8. $x < -11$, $x > 57/13$.

1.10. Задание С2, 2007 г.

3. $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. $x = 3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. $x = -1,\ 0{,}6$.
7. $x = -3{,}5,\ 2$.
9. $x = 4,\ 12 + 2\sqrt{11}$.
10. $x = 2,\ 11 + 4\sqrt{7}$.

1.11. Задание С2, 2008 г.

3. $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
4. $x = 0{,}5$.
5. $x = -1$.
6. $x = 7{,}5$.
8. $x = 0,\ 7/3$.
9. $x = 36$.
10. $x = 36$.

2.1. Задание С2, 2002 г.

3. $[0{,}6;1]$.
4. $[0{,}5;1]$.
6. $[-2;\infty)$.
7. $[-1;\infty)$.
8. $(-\infty;-2]$.
10. $[0;3]$.
11. $[-6;2]$.
12. $[0;2]$.
14. $(-4;-2] \cup (6;\infty)$.
15. $(-3;-1] \cup (5;\infty)$.

2.2. Задание С2, 2003 г.

3. $0 < p \leqslant 9$.
4. $0 < p \leqslant 5$.
5. $-6 \leqslant p < 0$, $0 < p \leqslant 6$.
6. $-7 \leqslant p < 0$, $0 < p \leqslant 7$.
7. $p < -7$, $p > 11$.
8. $p < -7$, $p > 3$.

2.3. Задание С2, 2004 г.

3. $7\pi/2 + 11$.
4. $3\pi + 4$.
5. 367.
6. $39/4$.
7. $24 - 6\ln\dfrac{3}{4}$.

2.4. Задание С3, 2002 г.

3. $x = 9$.
4. $x = 18$.
6. $2 \leqslant a \leqslant 12$.
7. $1 < a \leqslant 8$.
8. $1 < a \leqslant 15$.
9. $0 < a < 1$, $1 < a \leqslant 6$, $a > 12$.
10. $0 < a < 1$, $a > 16$.
12. $a > -5/3$.
13. $a \leqslant -4\sqrt{6}$, $a \geqslant 4\sqrt{6}$.
14. $a \leqslant -2\sqrt{6}$, $a \geqslant 2\sqrt{6}$.
16. $-2 < a < 2$.
17 $0 < a < 1$.
18. $0 < a < 2$.

2.5. Задание С3, 2005 г.

3. $a < -\log_2 5$, $-\log_2 3 < a < 0$.
4. $0 \leqslant a \leqslant \log_3 2$, $a \geqslant \log_3 7$.
5. $0 < a \leqslant 1/\sqrt[3]{5}$, $1 \leqslant a \leqslant \sqrt[3]{2}$.
6. $1/\sqrt{6} < a < \sqrt{2}$, $a > \sqrt{3}$.
7. $\sqrt[7]{3} < a < 9$, $a > 81$.
8. $\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 3$, $a \geqslant 81$.

2.6. Задание С3, 2006 г.

3. 240 м; 60 м, 60 м, 30 м.
4. 320 м; 80 м, 80 м, 30 м.
5. 160 м; 40 м, 40 м, 15 м.

2.7. Задание С3, 2007 г.

3. $a \leqslant -6$, $a > 3/4$.
4. $a \leqslant -9$, $a > 5/3$.
5. $a \leqslant -6$, $a > 2/5$.
6. $a < -4$, $a \geqslant 1/5$.
7. $a \leqslant -1/2$, $a > 2/3$.
8. $a \leqslant -5$, $a > 1/2$.
9. $a < -3$, $a \geqslant 1/2$.

2.8. Задание С3, 2008 г.

3. $-1 \leqslant a < 2\sqrt[4]{24} - 5$.
4. $-2 \leqslant a < 2\sqrt[4]{24} - 5$.
5. $2 < a \leqslant 2\sqrt[4]{90} - 4$.
6. $-2 \leqslant a < 2\sqrt[4]{27} - 6$.
7. $-1 \leqslant a < 2\sqrt[4]{24} - 5$.
8. $3 < a \leqslant 2\sqrt[4]{90} - 3$.
9. $-3 \leqslant a < 2\sqrt[4]{28} - 7$.
10. $-1 \leqslant a < 2\sqrt[4]{20} - 5$.

2.9. Задание С4, 2003 г.

3. $2 < a \leqslant 3$, $5 \leqslant a < 6$.
4. $1 < a \leqslant 10$.
5. $6 < a \leqslant 7$.
6. $2 \leqslant a < 3$, $5 < a \leqslant 6$.
8. $4 < a \leqslant 13/3$.
9. $19/4 < a \leqslant 5$.

2.10. Задание С4, 2004 г.

3. $a < 1$, $1 < a < 2$, $4 < a < 5$, $a > 5$.
4. $a > 20$.
5. $-7 \leqslant a < -4$.
6. $-9 \leqslant a < -7$.
7. $-6 \leqslant a < -5$, $8 < a \leqslant 9$.

2.11. Задание С5, 2005 г.

3. $x=3{,}5$. 4. $x=1{,}6$. 5. $x=3$. 6. $x=1$. 7. $x=5$. 8. $x=2$.

2.12. Задание С5, 2006 г.

3. $a=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. 4. $a=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. 5. $a=3$. 6. $a=1{,}5$. 7. $a=6$. 8. $a=10$. 9. $a=5$. 10. $a=3$.

2.13. Задание С5, 2007 г.

4. $x=0{,}3$. 6. $x=-5/3$.

2.14. Задание С5, 2008 г.

3. −6. 4. 11. 5. 16. 6. 2. 7. 2. 9. 10. 10. −2.

3.1. Задание С3, 2003 г.

3. 24. 4. 360. 5. 120π. 6. 416π. 7. 106π. 8. 28π.

3.2. Задание С3, 2004 г.

3. $99\pi/4$. 4. $27\pi/16$. 5. 45°. 6. 5. 7. $2\sqrt{2}$.

3.3. Задание С4, 2005 г.

3. $4\sqrt{5}$. 4. $1/\sqrt{6}$. 5. 96. 6. 30°. 7. 16. 8. $\sqrt{2/3}$.

3.4. Задание С4, 2006 г.

3. 297/32. 4. 2. 5. 5. 6. 16. 7. 6. 8. 64π.

3.5. Задание С4, 2007 г.

3. 7. 4. 36. 5. 9. 6. 7. 7. 28. 8. 12.

3.6. Задание С4, 2008 г.

3. 4. 4. 6. 5. $6\sqrt{3}$. 6. 4. 7. 12. 8. $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$. 9. 1. 10. 3.

Сергеев Игорь Николаевич

ЕГЭ МАТЕМАТИКА
ЗАДАНИЯ ТИПА С

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г.

Редактор *И.М. Бокова*
Технический редактор *Т.Н. Фатюхина*
Корректор *И.В. Русанова*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *М.В. Демина*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика
в ОАО «Щербинская типография»
117623, г. Москва, ул. Типографская, 10
т/ф (495) 659-25-63; e-mail: v010203@yandex.ru

Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).**