УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ЕГЭ-2010»

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко

МАТЕМАТИКА

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

ГЕОМЕТРИЯ, ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ - 2010

10-11 КЛАССЫ

ЛЕГИОН

Глава I

Краткий справочник по геометрии

§ 1. Планиметрия

1.1. Параллельные прямые

1.1.1. Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом: внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют $180°$.

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна $180°$, то прямые параллельны.

1.1.2. Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

1.1.3. Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

1.2. Треугольник

1.2.1. Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

1.2.2. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

1.2.3. Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.

3. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

4. Сумма внешних углов n-угольника равна $360°$.

5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

6. Угол между биссектрисами смежных углов равен $90°$.

7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

1.2.4. Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, то он является равнобедренным.

1.2.5. Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.

3. Против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона.

4. Против большей стороны треугольника лежит бóльший угол.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то

1) перпендикуляр короче наклонных;

2) большей наклонной соответствует бóльшая проекция и наоборот.

1.2.6. Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна ее половине.

1.2.7. Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

1.2.8. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

1.2.9. Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

1.2.10. Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

1.2.11. Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

1.2.12. Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

1.2.13. Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

1.2.14. В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружности соответственно.

1.2.15. Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

1.2.16. Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

1.2.17. Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведенная к стороне c, то $m = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. **Обобщённая теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

1.2.18. Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

1.2.19. Элементы равностороннего треугольника. Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a. Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

1.3. Четырёхугольник

1.3.1. Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма.

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

1.3.2. Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

1.3.3. Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника.

1. Диагонали прямоугольника равны.

2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

1.3.4. Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

1.3.5. Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба.

1. Диагонали ромба перпендикулярны.

2. Диагонали ромба делят его углы пополам.

3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

1.3.6. Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

1.3.7. Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

1.3.8. Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции.

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

1.3.9. Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.
2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.
3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.
4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.
7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

1.3.10. Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

1.4. Правильный многоугольник.

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда:

$$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n} \cdot r_n; \quad r_n = R_n \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

1.5. Окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удаленных от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же положительное расстояние.

1.5.1. Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

1.5.2. Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

1.5.3. Касательная к окружности. Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая a, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

1.5.4. Касающиеся окружности. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

1.5.5. Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

1.5.3. Касательная к окружности. Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая a, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

1.5.4. Касающиеся окружности. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

1.5.5. Углы, связанные с окружностью

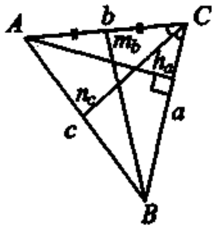
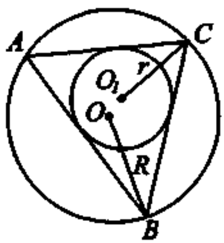
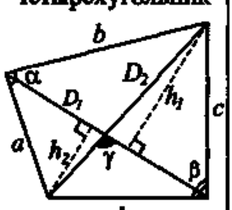
1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

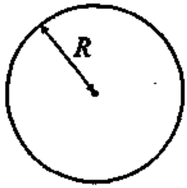
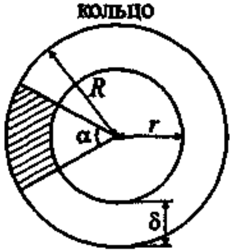
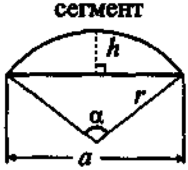
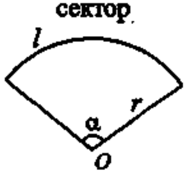
2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

1.6. Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник  	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведенные к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведенные к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведенные к соответствующим сторонам; $\mu=\dfrac{(m_a+m_b+m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.	$h_b=\dfrac{2S}{b}$ $m_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $n_b=\dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b=\sqrt{ac-b_ab_c}$ $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$ $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$ $S=r^2\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ $S=pr=\dfrac{abc}{4R}$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S=\dfrac{4}{3}\sqrt{\mu}\cdot$ $\cdot\sqrt{(\mu-m_a)(\mu-m_b)(\mu-m_c)}$
Четырёхугольник 	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.	$S=\dfrac{h_1+h_2}{2}D_1$ $S=\dfrac{1}{2}D_1D_2\sin\gamma$ $S=\dfrac{1}{2}(ab\sin\alpha+cd\sin\beta)$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг 	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \dfrac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца $S = \dfrac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \dfrac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \dfrac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$
Круговой сегмент 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P = l + a$ $S = \dfrac{1}{2}r^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$ $S = \dfrac{r(l-a)+ah}{2}$
Круговой сектор 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.	$P = l + 2r$ $S = \dfrac{lr}{2}$ $S = \dfrac{\pi r^2\alpha}{360}$

§ 2. Стереометрия

2.1. Аксиомы стереометрии

2.1.1. Основные аксиомы

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

2.1.2. Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.

2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

2.2. Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** *Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α.*

2. Если через прямую a, параллельную плоскости α, провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b, то прямые a и b параллельны.

3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a, пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b.

4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то плоскость α параллельна плоскости γ.

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

2.3. Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.

2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M.

5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

2.4. Параллельное проектирование

1. Прямая, непараллельная проектирующей, переходит в прямую.

2. Пара параллельных прямых, непараллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

2.5. Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

2. Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\overrightarrow{a} = x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{c}$, где x, y — некоторые числа).

4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

5. Если M — середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

6. Если M — середина AB, а N — середина CD, то $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

7. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

8. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

10. **Свойства скалярного произведения векторов:**

а) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$;

б) $\alpha \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$;

в) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$;

г) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2}$;

д) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2 + 2 \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b}^2$;

е) $(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 \leqslant \overrightarrow{a}^2 \cdot \overrightarrow{b}^2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны;

ж) ненулевые векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

11. **Расстояние между точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

12. **Угол между ненулевыми векторами.** Если φ — угол между ненулевыми векторами $\overrightarrow{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\overrightarrow{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

13. **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет вид:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

14. **Параметрические уравнения прямой,** проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид:

$$\begin{cases} x - x_0 = at; \\ y - y_0 = bt; \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

15. **Уравнения прямой, проходящей через две точки** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

16. **Прямая как пересечение двух плоскостей** задается системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ и $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

17. **Угол между плоскостями.** Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

18. **Уравнение плоскости «в отрезках».** Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$ $(a, b, c \neq 0)$, то ее уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

19. **Расстояние от точки до плоскости.** Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.6. Перпендикулярность прямой и плоскости

1. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8. **Теорема о трех перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует бо́льшая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

10. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

11. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

12. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

13. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

2.7. Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудаленных от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

2.8. Многогранные углы

1. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

2.9. Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

5. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

2.10. Пирамида

2.10.1. Правильная пирамида

1. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D, высотой DM и стороной основания a, а A_1, B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB, то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = \dfrac{2}{3}AA_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \dfrac{AA_1}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD.

2. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

3. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

4. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P, высотой PM и стороной основания a, а A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD, то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP.

5. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

2.10.2. Правильный тетраэдр. Пусть a — ребро правильного тетраэдра, а R и r — радиусы описанной и вписанной сфер, V — объём тетраэдра. Тогда:

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

2.10.3. Пирамида

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

2. Если все боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые рёбра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3. **Теорема о медианах тетраэдра.** Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины.

4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

2.11. Параллелепипед

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основанию.

2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.

3. Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда:

а) диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

4. Свойства граней и диагоналей параллелепипеда. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника A_1BD и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A.

2.12. Площади поверхности многогранников

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

2.13. Объёмы многогранников

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

2. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

3. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

4. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

5. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объем пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

8. Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах соответственно DA, DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

9. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

10. Объём тетраэдра V равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер a и b на расстояние между ними c и на синус угла φ между ними, то есть $V = \frac{1}{6}abc\sin\varphi$.

11. Объём тетраэдра V равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, делённому на их общее ребро a, то есть $V = \frac{2}{3}\frac{PQ\sin\varphi}{a}$.

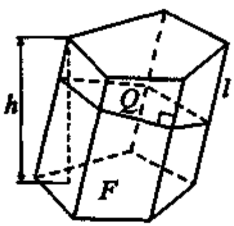
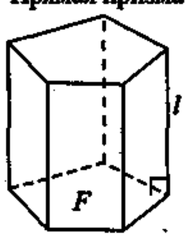
12. А. Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

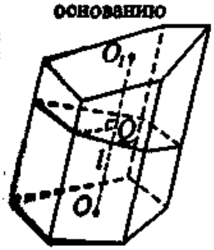
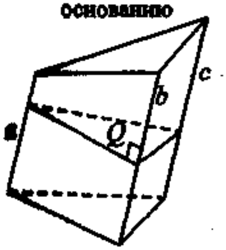
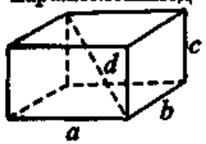
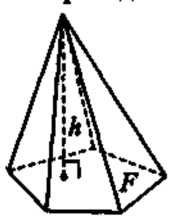
Б. Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

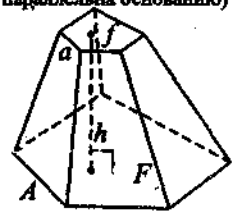
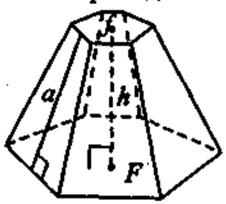
2.14. Основные формулы

Далее V — объём тела, $S_б$ и S — его боковая и полная поверхности.

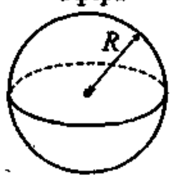
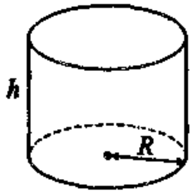
2.14.1. Многогранники

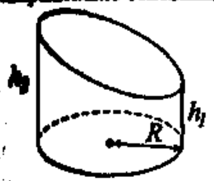
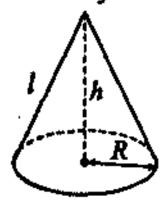
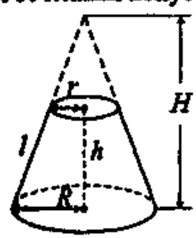
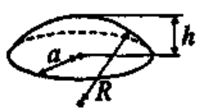
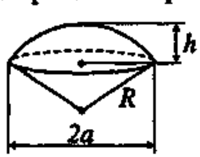
Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма 	F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.	$V = Fh = Ql$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$
Прямая призма 	F и P — площадь и периметр основания; l — боковое ребро.	$V = Fl$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма, усечённая непараллельно основанию 	l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO_1.	$V = Ql$
Треугольная призма, усечённая непараллельно основанию 	a, b и c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к рёбрам.	$V = \frac{1}{3}(a+b+c)Q$
Прямоугольный параллелепипед 	a, b и c — рёбра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.	$V = abc$ $S = 2(ab+bc+ac)$
Пирамида 	F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды).	$V = \frac{1}{3}Fh$ Правильная пирамида $S_б = \frac{1}{2}Pa$

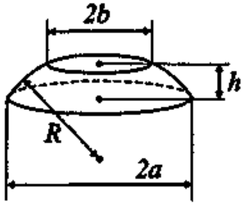
Чертежи	Обозначения	Формулы
Усечённая пирамида (плоскость сечения параллельна основанию) 	F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $V = \frac{1}{3}hF\left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$
Правильная усечённая пирамида 	F, f — площади оснований; P, p — периметры оснований; h — высота; a — апофема (высота боковой грани).	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_б = \frac{P + p}{2} \cdot a$

2.14.2. Тела вращения

Чертежи	Обозначения	Формулы
Сфера 	R — радиус.	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
Цилиндр 	R — радиус основания; h — высота.	$V = \pi R^2 h$ $S_б = 2\pi Rh$ $S = 2\pi R(h + R)$

Цилиндр, усечённый непараллельно основанию  	R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие.	$V = \frac{1}{2}\pi R^2(h_1 + h_2)$ $S_б = \pi R(h_1 + h_2)$ $S = \pi R\left(h_1 + h_2 + R + \right.$ $\left. + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right)$
Конус  	R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образующая.	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $S_б = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ $S_б = \pi Rl$ $S = \pi R(R + l)$
Усечённый конус  	R и r — радиусы оснований; h — высота; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ — образующая; H — высота неусечённого конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$.	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ $S_б = \pi l(R + r)$ $S = \pi\left(R^2 + r^2 + l(R + r)\right)$
Шаровой сегмент  	h — высота сегмента; R — радиус шара; $a = \sqrt{h(2R - h)}$ — радиус основания сегмента.	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ $S_б = 2\pi Rh$ $S_б = \pi(a^2 + h^2)$ $S = \pi(2a^2 + h^2)$ $S = \pi(a^2 + 2Rh)$
Шаровой сектор  	h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента.	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $S = \pi R(a + 2h)$

3. Зак. № 241

Шаровой слой 	h — высота слоя; a и b — радиусы оснований ($a > b$); R — радиус шара.	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2+3b^2+h^2)$ $V = V_1 + \frac{1}{6}\pi hl^2$, где V_1 — объём вписанного в шаровой слой усечённого конуса, радиусы оснований которого a и b, высота h и образующая l. $S_б = 2\pi Rh$ $S = \pi(a^2 + b^2 + 2Rh)$

Глава II

Тематические тесты

§ 1. Текстовые задачи

Вариант №1

1. Стоимость акций снизилась на 60%. Во сколько раз подешевели акции?

2. В сосуд, содержащий 2 кг 80%-го водного раствора уксуса, добавили 3 кг воды. Найдите концентрацию получившегося раствора уксусной кислоты.

3. Олег отвечает за 1 час на 8 вопросов теста, а Никита — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Олег закончил позже Никиты на 10 минут. Сколько вопросов содержит тест?

4. Из города M в город N, расстояние между которыми 120 км, выехала команда участников областной олимпиады. В дороге обнаружили, что забыли важный документ. Через 1 ч из M выехал курьер, который догнал команду и, передав документы, немедленно двинулся обратно. Курьер возвратился в M в тот момент, когда команда приехала в город N. С какой скоростью двигалась команда, если считать её скорость постоянной на всём пути, а скорость курьера 50 км/ч?

5. Автомобиль за 5 часов прошёл 360 км. Первые 2 часа он шёл со скоростью на 20 км/ч большей, чем остальное время. С какой скоростью шёл автомобиль первые 2 часа?

6. Если третий и седьмой члены арифметической прогрессии соответственно равны 1,1 и 2,3, то какому числу равен ее шестнадцатый член?

4. Зак. № 241

7. Сумма второго и четвёртого членов возрастающей геометрической прогрессии равна 30, а их произведение — 144. Найдите знаменатель этой прогрессии.

8. В автоинспекции города подсчитали, что число легковых автомобилей увеличивалось ежегодно на 15% по сравнению с каждым предыдущим годом. Во сколько раз увеличилось число автомобилей за 5 лет (ответ записать с точностью до целых)?

Вариант №2

1. Банковский вклад в мае увеличился на 10%, а в июне уменьшился на 10%, после чего на счету оказалось 10890 рублей. Найдите сумму вклада на конец апреля.

2. Сколько килограммов воды нужно добавить в сосуд, содержащий 200 г 70%-го раствора уксусной кислоты, чтобы получить 8%-й раствор уксусной кислоты?

3. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 8 часов. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ?

4. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 с. Найдите длину поезда в метрах.

5. Из двух пунктов одновременно навстречу друг другу выехал велосипедист и вышел пешеход. Скорость пешехода 3 км/ч, скорость велосипедиста в 4 раза больше скорости пешехода. Через сколько часов они встретятся, если расстояние между пунктами 60 км?

6. Если в арифметической прогрессии второй и шестой члены соответственно равны 0,8 и 2,4, то какому числу равен ее десятый член?

7. Четвертый член возрастающей геометрической прогрессии больше второго члена на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

8. Второй член геометрической прогрессии составляет 110% от ее первого члена. Сколько процентов составляет ее шестой член от четвертого члена?

Вариант №3

1. Зарплату токарю повысили сначала на 10%, а затем, через год, ещё на 20% по сравнению с предыдущим годом. На сколько процентов повысилась зарплата токаря по сравнению с первоначальной?

2. Смешали 8 кг 18%-го раствора некоторого вещества с 12 кг 8%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора.

3. Две трубы, работая вместе, наполнили бассейн за 12 часов. Первая труба, работая отдельно, наполняет бассейн на 18 часов быстрее, чем вторая. За сколько часов наполняет бассейн вторая труба?

4. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин. После чего, пройдя 60 км, наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

5. Туристы должны были пройти 90 км. В первый день они прошли 0,4 всего пути, во второй день — $\frac{1}{3}$ оставшегося пути. Сколько километров пути осталось пройти туристам?

6. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 91, если её третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20?

7. Сколько членов геометрической прогрессии нужно сложить, чтобы получить сумму 3069, если сумма первого и пятого членов равна 51, а сумма второго и шестого равна 102?

8. При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 25% больше денег, чем год назад, причем лыжи подорожали с тех пор на 15%, а ботинки — на 40% от первоначальной стоимости. Во сколько раз год назад лыжи были дороже ботинок?

Вариант №4

1. Затраты на производство 100 микропроцессоров составляют 68 евроцентов. Испытания успешно проходят только 2% продукции, а остальное идет в брак. Компания, производящая процессоры, вынуждена включать все затраты в себестоимость исправных процессоров, поступивших в продажу. Найдите цену (в евро) одного исправного процессора, учитывая, что компания должна получить от его продажи 25% прибыли (1 евро = 100 евроцентам).

2. Смешав 40%-й и 15%-й растворы кислоты, добавили 3 кг чистой воды и получили 20%-й раствор кислоты. Если бы вместо 3 кг воды добавили 3 кг 80%-го раствора той же кислоты, то получили бы 50%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 40%-го раствора кислоты было смешано?

3. Первый насос наполнил бассейн объемом 2000 м^3, а второй насос за то же время наполнил бассейн объемом 2100 м^3. Какова производительность первого насоса, если второй накачивает на 4 м^3 в час больше, чем первый?

4. Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Найдите скорость товарного поезда, если известно, что скорость товарного составляет $\frac{5}{8}$ от скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого поезда.

5. Моторная лодка прошла 39 км по течению и 28 км против течения реки, затратив на весь путь 7 часов. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки 10 км/ч.

6. Сумма шестого и десятого членов арифметической прогрессии меньше суммы ее третьего и восьмого членов на 15. Найдите разность прогрессии.

7. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 1,6, если её второй член равен (−0,5).

8. На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 7, то число букв на странице увеличится на 476. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 4?

Вариант №5

1. Антикварный магазин, купив два предмета старины за 225000 рублей, продал их, получив 40% прибыли. За какую цену был куплен магазином предмет большей стоимости, если от продажи предмета меньшей стоимости было получено 25% прибыли, а большей стоимости — 50% прибыли?

2. Имеется три сосуда. В первый сосуд налили 4 кг 70%-го сахарного сиропа, а во второй — 6 кг 40%-го сахарного сиропа. Если содержимое первого сосуда смешать с содержимым третьего сосуда, то получим в смеси 55%-ное содержание сахара, а если содержимое второго сосуда смешать с третьим, то получим 35%-ное содержание сахара. Найдите массу сахарного сиропа в третьем сосуде.

3. Двум сотрудникам издательства поручили отредактировать рукопись объемом 540 страниц. Первый сотрудник, отдав второму 160 страниц рукописи, взял остальные страницы себе. Первый выполнил свою работу за 10 дней, а второй свою — за 10 дней. На сколько процентов надо было увеличить часть работы второго сотрудника (уменьшив часть работы первого), чтобы они, при прежней производительности, выполнили свою работу за равный промежуток времени?

4. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 10 часов после отплытия из него.

5. Автомобиль был задержан в пути на 0,25 часа. После чего, увеличив скорость на 20 км/ч, пройдя расстояние 100 км, наверстал это время. Найдите начальную скорость автомобиля.

6. Том Сойер красил забор длиной 105 м, причем день за днем количество выкрашенного за день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был выкрашен забор, если за первые три дня Том выкрасил 36 м забора, а за последние три дня — 27 м?

7. Произведение первого и третьего членов геометрической прогрессии равно $\frac{1}{16}$, а второго и пятого членов — $\frac{1}{128}$. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии, если их сумма равна $\frac{127}{128}$.

8. Предприятие располагает собственным капиталом в 100 млн руб. и берет в банке взаймы под 10% годовых еще 50 млн руб. Норма прибыли предприятия составляет 30% от суммы затрат. Сколько миллионов рублей составляет доход предприятия за год работы?

Вариант №6

1. Банк дает своим вкладчикам 25% годовых. Чему станет равен вклад 100000 рублей через 2 года, если начислен сложный процент?

2. Имеются два сплава, состоящие из золота и меди. В первом сплаве отношение масс золота и меди равно 8 : 3, а во втором — 12 : 5. Сколько килограммов золота содержится в сплаве, приготовленном из 121 кг первого сплава и 255 кг второго сплава?

3. Беллетристу необходимо набрать на компьютере рукопись объемом 480 страниц. Если он будет набирать на 8 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать беллетрист?

4. Когда опытный и начинающий спортсмены бегут по стадиону в одну сторону, то опытный бегун обгоняет начинающего один раз в 15 минут, а когда они бегут навстречу друг другу, то встречаются один раз в 5 минут. Во сколько раз скорость опытного бегуна больше скорости начинающего?

5. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали соответственно грузовой и легковой автомобили. Грузовой автомобиль проходил в час 5% расстояния между пунктами и встретился с легковым автомобилем через 3 часа 20 минут после начала движения. Сколько часов затратил на путь из B в A легковой автомобиль?

6. Несколько косцов подрядились выкосить луг и выполнили бы работу за 8 часов, если бы косили одновременно. Вместо этого они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый косил до окончания всей работы. За какое время был выкошен луг, если косец, приступивший к работе первым, проработал в семь раз дольше, чем последний? Производительность косцов считать одинаковой.

7. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, у которой отношение десятого члена к восьмому в 5 раз больше отношения одиннадцатого члена к десятому.

8. Сумма первых n членов последовательности равна $S_n = 2n^3 - 21n^2 + 75n$. Найдите значение наименьшего члена последовательности.

Вариант №7

1. Предприниматель купил акции и через год продал их, получив прибыль, причем полученная им сумма составила 11500 рублей. Сколько акций было куплено предпринимателем, если прибыль составляет 15% от стоимости акции и равна 150 рублям?

2. Первая смесь содержит вещества A и B в отношении $4:5$, соответственно вторая смесь содержит те же вещества, но в отношении $6:7$. Сколько частей первой смеси надо взять, чтобы получить третью смесь, составленную из части первой смеси и части второй смеси и содержащую те же вещества в отношении $5:6$?

3. На заводе было введено рационализаторское предложение. В результате время, необходимое для изготовления рабочим некоторой детали, уменьшилось на 20%. На сколько процентов возросла производительность труда этого рабочего?

4. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. Сколько часов понадобится второму пешеходу, чтобы пройти всё расстояние, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

5. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два мотоциклиста. Первый мотоциклист проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй — первую половину пути со скоростью на 5 км/ч меньше скорости первого, вторую половину со скоростью на 6 км/ч больше скорости первого. В пункт B оба мотоциклиста прибыли одновременно. Найдите скорость первого мотоциклиста.

6. Известно, что внутренние углы некоторого многоугольника, наименьший угол которого равен 120 градусов, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5 градусов. Определите наименьшее возможное число сторон этого многоугольника.

7. Найдите x, если числа $\sqrt{x-5}$; $\sqrt[4]{10x+4}$; $\sqrt{x+2}$ образуют геометрическую прогрессию.

8. За сколько лет можно накопить 16770 рублей, если в начале каждого года вносить по 1200 р. и банк начисляет 6% в год от текущей суммы?

Вариант №8

1. Акции предприятия подорожали на 150%, но через год спрос на продукцию упал и цена акций понизилась до первоначальной. На сколько процентов снизилась новая цена акций?

2. Из полного бака, содержащего 256 кг кислоты, отлили n кг и долили бак водой. После тщательного перемешивания отлили n кг раствора и снова долили бак водой. После того, как такая процедура была проделана 8 раз, раствор в баке стал содержать 1 кг кислоты. Найдите величину n.

3. Планом было предусмотрено, что предприятие на протяжении нескольких месяцев изготовит 6000 насосов. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготавливать в месяц на 70 насосов больше, чем было предусмотрено, и на один месяц раньше установленного срока перевыполнило задание на 30 насосов. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 насосов?

4. Если велосипедист увеличит скорость на 5 км/ч, то получит выигрыш во времени 12 минут при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 8 км/ч, то потеряет 40 минут на том же пути. Найдите скорость велосипедиста.

5. От пристани A к пристани B вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки 2 км/ч. Последнюю $\frac{1}{10}$ часть пути лодка шла с выключенным двигателем. На остальной части ее скорость была на 8 км/ч больше скорости байдарки. К пристани B лодка и байдарка прибыли одновременно. Найдите собственную скорость байдарки.

6. Решите уравнение $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3$, где x — целое положительное число.

7. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов её членов равна 192. Найдите первый член прогрессии.

8. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

Вариант №9

1. В прошлом году предприятие заплатило некоторый налог, ставка которого была равна 21%. Сумма налога составила 6300 рублей. В этом году ставка налога снизилась и стала равной 4%. Какую сумму налога предприятие должно заплатить в этом году, если сумма, облагаемая налогом, увеличилась в 1,3 раза?

2. К 100 г 20%-го раствора соли добавили 300 г 10%-го раствора соли. Определите процентную концентрацию раствора.

3. Бригада рыбаков намеревалась выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. Треть этого срока на море был шторм, поэтому плановое задание ежедневно не выполнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за 1 день до срока. Сколько центнеров рыбы намеревалась вылавливать бригада рыбаков ежедневно?

4. Два всадника выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу, и один прибывает в B через 27 мин, а другой в A через 12 мин после встречи. За сколько минут проехал первый всадник путь AB?

5. Два автомобиля выехали одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Скорость первого была на 15 км/ч меньше скорости второго, и поэтому он прибыл в город B на 40 минут позже, чем второй прибыл в A. Найдите скорость второго автомобиля, если расстояние между городами 300 км.

6. Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

7. Сумма членов геометрической прогрессии, стоящих на нечётных номерах, равна 138, а на чётных — 69. Найдите знаменатель заданной геометрической прогрессии, если количество членов этой прогрессии равно 1990.

8. В городе N было 100000 человек безработных, в течение четырех лет ежегодно их количество уменьшалось на $p\%$ по отношению к каждому предыдущему году. В результате безработных осталось 24010 человек. На сколько процентов ежегодно уменьшалось количество безработных?

Вариант №10

1. Банк предоставляет ипотечный кредит сроком на 10 лет под 19% годовых. Это значит, что ежегодно заёмщик возвращает 19% от непогашенной суммы кредита и 0,1 суммы кредита. Так, в первый год заёмщик выплачивает 0,1 суммы кредита и 19% от всей суммы кредита, во второй год заёмщик выплачивает 0,1 суммы кредита и 19% от 0,9 суммы кредита и т.д. Во сколько раз сумма, которую должен выплатить банку заёмщик, больше суммы заёма, если согласно договору досрочное погашение кредита невозможно?

2. Смешали 10%-й и 25%-й растворы соли и получили 3 кг 20%-го раствора. Сколько килограммов 10%-го раствора соли было использовано?

3. Двум операторам поручили на компьютере набрать текст рукописи объемом 288 страниц. Первый оператор взял себе 168 страниц книги, отдав остальные страницы второму. Первый оператор выполнил свою работу за 21 день, а второй свою — за 12 дней. Сколько страниц рукописи первый оператор должен был передать дополнительно второму, чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое число дней?

4. Из пункта A в B и из пункта B в A выехали одновременно два автомобиля и встретились через 3 часа. Первый автомобиль пришел в B на 1,1 часа позже, чем второй в A. Во сколько раз скорость второго автомобиля больше скорости первого?

5. Из пункта A выехал легковой автомобиль со скоростью 74 км/ч. После того, как он прошел 148 км, из пункта B навстречу ему выехал грузовой автомобиль со скоростью 50 км/ч. Сколько часов был в пути грузовой автомобиль до встречи с легковым, если расстояние между пунктами 520 км?

6. Найдите разность арифметической прогрессии, в которой первый член равен 66, а произведение второго и двенадцатого членов является наименьшим из возможных.

7. Найдите первый член геометрической прогрессии, в которой сумма квадрата девятого члена и восемнадцатого члена в 13 раз больше семнадцатого члена, а разность квадрата седьмого члена и четырнадцатого члена в 7 раз больше тринадцатого.

8. На базу завезли яблоки, содержание воды в которых составляло 80%. В результате хранения содержание воды уменьшилось на 0,5% и масса яблок составила 9,96 тонн. Какова была первоначальная масса яблок?

Вариант №11

1. Студент купил две книги за 130 рублей. Если бы первая книга стоила на 20% дороже, а вторая на 25% дешевле, то их цены были бы одинаковы. Сколько рублей стоит вторая книга?

2. В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначальной массы. Какое процентное содержание спирта оказалось окончательно в сосуде?

3. Два прокатных стана могут, если они будут работать одновременно, прокатать определённое количество железа за 4 часа 48 минут. Если будет работать только первый стан, то на прокатку того же количества железа надо будет затратить на 4 часа больше, чем при работе только второго стана. За сколько часов может прокатать это железо второй стан?

4. Мотоциклист предполагал проехать расстояние 90 км за определённое время. Проехав 54 км, он вынужден был остановиться у закрытого шлагбаума на 5 мин. Продолжив движение, он увеличил скорость на 6 км/ч и прибыл к месту назначения в намеченное время. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.

5. Автомобилист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и ещё 60 км, во второй — проехал $\frac{1}{4}$ всего пути и ещё 20 км, а в третий день он проехал $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найдите расстояние между городами.

6. Девятый член арифметической прогрессии равен −43, а сумма первых

пятнадцати членов равна -570. Найдите сумму седьмого, одиннадцатого и семнадцатого членов этой прогрессии.

7. У мальчика был один лист бумаги, который он разделил на четыре части. Четвертую часть количества имеющихся кусков бумаги мальчик выбросил. Каждый из оставшихся кусков мальчик разделил опять на четыре части и опять выбросил четвертую часть имеющихся кусков бумаги. После того, как мальчик повторил такую процедуру ещё 5 раз, он выбросил все имеющиеся у него куски бумаги. Сколько всего кусков бумаги мальчик выбросил?

8. В корзине были яблоки. Сначала из неё взяли половину яблок, затем треть оставшихся яблок и ещё 4 яблока, после чего осталось 12 яблок. Сколько яблок в корзине было первоначально?

Вариант №12

1. На залежавшуюся партию книг владелец книжного магазина решил понизить цену на 20%. Заметив, что теперь книги стали очень быстро раскупаться, на оставшуюся часть этой партии книг он повысил цену на 20%. На сколько процентов в результате этих двух операций понизилась или повысилась цена на оставшиеся книги? Если цена на книги понизилась, то перед числом процентов в ответе поставьте знак минус. Если цена вновь стала прежней, в ответе запишите ноль. Знак % в ответе не пишите.

2. Два спиртовых раствора борной кислоты одинаковой массы слили в один сосуд. Раствор какой концентрации получили в результате, если первый раствор был пятипроцентный (5% борной кислоты и 95% спирта), а второй — однопроцентный?

3. Два экскаватора различной мощности, работая с постоянной производительностью, вырыли вместе котлован заданного объёма за 2 часа 24 минуты. Первый экскаватор, работая в одиночку, завершил бы эту работу на 2 часа быстрее, чем второй экскаватор. За сколько часов вырыл бы котлован второй экскаватор, работая в одиночку?

4. Проехав 120 км, что составляло половину всего пути, пассажир лёг спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, который он проехал спящим. Сколько километров пути пассажир провёл в состоянии сна?

5. Катер, скорость которого в стоячей воде 15 км/ч, отправился от речного причала вниз по течению реки и, пройдя 36 км, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 ч до отправления катера. Найдите скорость течения реки.

6. Произведение второго и четвертого членов арифметической прогрессии равно 7. Сумма первых пяти членов равна -20. Найдите разность этой прогрессии, если известно, что она отрицательна.

7. Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, у которой произведение первых трёх членов равно 1000, а сумма их квадратов равна 525.

8. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ кг тяжелее $\frac{4}{5}$ этого кочана. Какова масса этого кочана капусты?

Вариант №13

1. Производительность труда второй бригады на 20% больше, чем первой бригады, а производительность труда третьей бригады на 25% меньше, чем второй. На сколько процентов производительность труда третьей бригады меньше, чем первой?

2. Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов 10%-го раствора было взято?

3. Автоматизированная мойка машин обслуживает 20 автомобилей на 5 часов быстрее, чем ручная мойка обслуживает 45 автомобилей. За сколько часов ручная мойка обслужит 105 автомобилей, если автоматизированная мойка обслуживает за 1 час на 7 автомобилей больше, чем ручная?

4. Спортсмен, стартуя с одного конца бассейна, доплывает до другого конца бассейна, поворачивает и плывёт обратно. В тот момент, когда он поворачивает, по соседней дорожке навстречу ему выплывает другой спортсмен, который проплывает бассейн за 60 секунд. Первый спортсмен вернулся к месту своего старта через 16 секунд после того, как поравнялся со спортсменом, плывшим ему навстречу. Предполагая, что скорость спортсменов всё время была постоянной, определите, через сколько секунд после начала своего заплыва первый спортсмен вернулся к месту старта.

5. Точка движется по координатной прямой по закону
$x(t) = 0{,}75t^2 + t - 7$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t. В какой момент времени скорость точки будет равна 19 ?

6. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

7. Дан квадрат со стороной 128 см. Середины его сторон являются вер-

шинами второго квадрата. Середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т.д. Найдите длину стороны седьмого квадрата.

8. Необходимо положить рельсы на 16 километров одноколейной железной дороги. Есть рельсы длиной 20 метров и 10 метров. Если уложить все рельсы по 20 метров, то для окончания строительства необходимо использовать половину рельсов по 10 метров. Если уложить все рельсы по 10 метров, то для окончания строительства необходимо использовать $\frac{2}{3}$ рельсов длиной 20 метров. Определите общее количество рельсов, имеющихся в наличии.

Вариант №14

1. Количество элементов выпускаемой продукции неудачного предприятия с момента открытия ежемесячно падало на 40% по отношению к предыдущему месяцу. В последний пятый месяц работы предприятие выпустило 324 элемента продукции, после чего было закрыто. Сколько элементов продукции было выпущено предприятием за время своего существования?

2. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие — 12%. Сколько получится сухих грибов из 44 кг свежих?

3. Трое фермеров могут вспахать поле за 10 часов. Производительности их работы относятся как 2 : 3 : 4. Сколько времени должен проработать третий фермер в одиночку, чтобы после этого первый и второй могли вспахать оставшуюся часть поля за 14 часов?

4. При движении тела по прямой его скорость $v(t)$ (в м/с) изменяется по закону $v(t) = 7t^2 + t + 11$ (t — время движения тела в секундах). Каким будет ускорение тела (в м/с^2) через 2 секунды после начала движения тела?

5. Из пункта A в пункт B выезжает велосипедист и прибывает в пункт B через 45 минут. Одновременно с ним, по той же самой дороге, из пункта B в пункт A выходит пешеход. Пешеход прибывает в пункт A через 1 час после встречи с велосипедистом. Считая, что велосипедист и пешеход двигались с постоянной скоростью, определите, сколько минут прошло от начала движения велосипедиста и пешехода до момента их встречи.

6. За установку самого нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 2600 руб., а за каждое следующее кольцо платили на 200 руб. меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплаче-

но ещё 4000 руб. Средняя стоимость установки одного кольца оказалась равной $2244\frac{4}{9}$ руб. Сколько колец было установлено?

7. Произведение второго и седьмого членов геометрической прогрессии равно -2. Найдите произведение первых восьми членов этой прогрессии.

8. Сумма цифр трёхзначного числа равна 16, а произведение цифры сотен на цифру десятков равно 48. Если из этого числа вычесть 594, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное трёхзначное число.

Вариант №15

1. Бригада рабочих к определённому сроку должна была изготовить 360 деталей. Перевыполняя дневную норму на 9 деталей, бригада уже за 1 день до срока перевыполнила плановое задание на 5%. Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

2. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из неё металл содержит 4% примесей. Сколько тонн руды необходимо взять, чтобы выплавить из неё 15 тонн металла?

3. Насос может выкачать из бассейна $\frac{2}{3}$ воды за 7,5 мин. Проработав 0,15 ч, насос остановился. Найдите вместимость бассейна, если после остановки насоса в бассейне осталось еще 25 м^3 воды.

4. При движении тела по прямой расстояние $S(t)$ (в метрах) до тела от фиксированной точки P изменяется по закону $S(t) = 8t^2 + 7t + \sin t + 1$ (t — время движения тела в секундах). Какой была скорость тела (в м/с) в момент начала движения?

5. Турист, проплыв по течению реки на плоту 12 км, возвратился обратно на лодке, скорость которой в стоячей воде 5 км/ч. На всё путешествие турист потратил 10 часов. Найдите скорость течения реки, если известно, что она меньше, чем 3 км/ч.

6. Сумма первых семи членов арифметической прогрессии равна восьмому члену этой прогрессии, а третий член равен 2. Найдите число членов прогрессии, модуль которых не превосходит 13.

7. Школьники по очереди рисовали на доске отрезки. Каждый следующий рисовал в два раза меньше новых отрезков, чем предыдущий. Сколько детей рисовало отрезки, если в конце на доске оказалось нарисовано 2667 отрезков, а третий по очереди школьник нарисовал 336 отрезков?

8. Для проведения вступительного экзамена по математике заготовили 600 листов бумаги, предполагая полностью раздать их абитуриентам так, чтобы все абитуриенты получили одинаковое количество листов. Однако каждому абитуриенту смогли выдать на один лист бумаги больше, так как на предыдущих экзаменах отсеялось 20 человек. При этом все 600 заготовленных листов были израсходованы. Сколько человек сдавало экзамен по математике?

§ 2. Планиметрия

Вариант №1

1. В равнобедренном треугольнике $ABC(AB = BC)$ точки M и N — середины боковых сторон. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN, если периметр треугольника ABC равен 32, а длина отрезка MN равна 6.

2. Две стороны треугольника равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а медиана к третьей стороне равна 2 см. Найдите $(5-\sqrt{15})p$, где p — периметр треугольника.

3. В описанной около круга равнобочной трапеции расстояние от центра круга до дальней вершины трапеции втрое больше, чем до ближней вершины. Найдите тангенс острого угла трапеции.

4. В параллелограмме $ABCD$ длина отрезка AB равна 4. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K, а продолжение стороны CD в точке E. Найдите длину отрезка KC, если $EC = 1$.

5. Один из углов ромба равен 60°. В треугольник, образованный сторонами ромба и меньшей диагональю, вписана окружность, радиус которой равен $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найдите периметр ромба.

6. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17. Найдите диаметр этой окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5.

7. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ из вершины C на диагональ AD опущен перпендикуляр, длина которого равна $2\sqrt{3}$. Найдите периметр шестиугольника.

8. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найдите периметр треугольника.

Вариант №2

1. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ длина средней линии MN равна 6 $(M \in AB,\ N \in BC)$, а $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите BL, если AL — высота треугольника и AB=1 см, $AC=\sqrt{15}$ см, AD=2 см.

3. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 13, а расстояние от центра окружности до одного из катетов равно 2,5. Найдите площадь треугольника.

4. В равнобочной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 4 см. Найдите высоту трапеции.

5. Сторона ромба равна 5 см, а длины диагоналей относятся как 4 : 3. Найдите сумму длин диагоналей ромба.

6. Центры двух окружностей находятся на расстоянии $\sqrt{80}$. Радиусы окружностей равны 4 и 8. Найдите длину общей касательной.

7. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной, равной 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACE.

8. Высота трапеции равна 6 см, а ее площадь равна 24 см^3. Найдите $S\sqrt{3}$, где S — площадь равностороннего треугольника со стороной, равной длине средней линии заданной трапеции.

Вариант №3

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена медиана CD, длина которой 2,5 см. Найдите периметр треугольника, если один из катетов на 1 см меньше гипотенузы.

2. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен $3\sqrt{2}$ см. Найдите длину биссектрисы прямого угла треугольника.

3. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

4. В параллелограмме сторона и большая диагональ равны соответственно 3 и $\sqrt{37}$. Найдите периметр параллелограмма, если его острый угол равен 60°.

5. В описанном около окружности четырехугольнике сумма двух противоположных сторон равна 45 см. Остальные две стороны относятся как 2 : 3. Найдите длину большей из этих сторон.

6. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AC пересекает окружность в точках C и D. Найдите AD, если $AC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

7. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ радиус окружности, вписанной в треугольник ACE, равен 2. Найдите сторону шестиугольника.

8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина средней линии MN равна 8. Площади четырёхугольников $MBCN$ и $AMND$ относятся как 2 : 3 соответственно. На сколько длина AD больше длины BC?

Вариант №4

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точки M и N — середины сторон AB и BC, $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN, если $AB = 10$.

2. В треугольнике MNP проведена медиана MD. Найдите её длину, если $MN = 1$, $MP = \sqrt{15}$ и $\cos\angle MNP = \frac{1}{4}$.

3. Тангенс острого угла BAC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен $\frac{5}{12}$, а расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до катета AC равно 2,5. Найдите периметр этого треугольника.

4. В параллелограмме одна из диагоналей перпендикулярна стороне. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, образованный сторонами параллелограмма и этой диагональю, если стороны параллелограмма равны 5 и 3.

5. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. $AC = 8$, $BD = 6$. В треугольники AOB, BOC, COD и AOD вписаны окружности. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого служат центры окружностей.

6. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AM проходит через центр окружности и пересекает ее в точках M и N. Найдите квадрат расстояния от точки B до прямой AN, если $AM = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

7. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ из вершины C на диагональ AD опущен перпендикуляр CK. Найдите отношение длин отрезков AK и KD.

8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина средней линии MN равна 10. Площади четырёхугольников $MBCN$ и $AMND$ относятся как 3 : 5 соответственно. Во сколько раз длина AD больше длины BC?

Вариант №5

1. Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 26. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне длиной 27.

2. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{32}$, медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите длину боковой стороны.

3. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$. Найдите длину третьей стороны, если она равна длине проведенной к ней высоты.

4. Около круга радиусом 2 описана равнобедренная трапеция с острым углом 30°. Найдите длину средней линии трапеции.

5. В ромб вписан круг, а в круг вписан квадрат. Определите градусную меру острого угла ромба, если площадь квадрата в 4 раза меньше площади ромба.

6. В окружности радиусом 17,5 проведены диаметр AB, хорды AC и BC, перпендикуляр CD к диаметру AB. Найдите сумму длин хорд AC и BC, если $AC : AD = 5 : 3$.

7. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна его стороне. Точка K делит сторону BC так, что $BK : KC = 2 : 1$. Найдите площадь четырехугольника $ABKD$, если сторона ромба равна $6\sqrt[4]{3}$.

8. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей 2 и 4. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

Вариант №6

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, причем $AD = 5$, $CE = 3$, а угол между AD и CE равен 60°. Найдите утроенный квадрат длины AC.

2. В равнобедренном треугольнике проведена медиана к боковой стороне, равной 4. Найдите квадрат длины основания треугольника, если длина медианы равна 3.

3. В треугольнике известны длины двух сторон — 6 и 3. Найдите длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

4. Около круга описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 10. Определите периметр трапеции.

5. Периметр параллелограмма 90, а острый угол — 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найдите большую сторону параллелограмма.

6. Из точки, данной на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Отрезок, соединяющий их середины, равен 6. Найдите радиус окружности.

7. В ромб $ABCD$ вписана окружность радиусом $\sqrt{3}$. Найдите сторону ромба, зная, что она выражена целым числом и $BK = 2\sqrt{7}$, где K — середина отрезка CD.

8. Разность между площадью круга и площадью вписанного в него квадрата равна $2\sqrt{3}(\pi - 2)$. Найдите площадь правильного шестиугольника, вписанного в этот круг.

Вариант №7

1. Дан треугольник со сторонами 4, 8, 9. Найдите квадрат длины биссектрисы, проведенной к большей стороне.

2. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведённая к боковой стороне, равна 24. Найдите длину боковой стороны.

3. В равнобедренном треугольнике основание равно $\sqrt{21}$, угол при основании 30°. Найдите длину медианы, проведённой к боковой стороне.

4. Около окружности описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен $\frac{4}{5}$. Найдите площадь трапеции.

5. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 12$ и $AF : FD = 4 : 3$.

6. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23. Найдите радиус окружности.

7. Площадь ромба $ABCD$ равна 4. Найдите его сторону, зная, что она выражается целым числом и $AF = \sqrt{5}$, где F — середина отрезка BC.

8. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен $6\sqrt{6}$. Найдите периметр квадрата, вписанного в эту же окружность.

Вариант №8

1. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла делится центром O вписанной окружности в отношении $BO : OE =$

$= \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найдите градусную меру большего острого угла треугольника.

2. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на части длиной 15 и 6. Найдите длину боковой стороны.

3. У треугольника известны длины двух сторон, $a = 2$, $b = 3$, и площадь $S = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. Медиана, проведенная к его третьей стороне, меньше ее половины. Найдите $\sqrt{15}R$, где R — радиус описанной около этого треугольника окружности.

4. Диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна 4. Найдите высоту трапеции.

5. Площади двух треугольников, прилегающих к основаниям трапеции и ограниченных ее диагоналями, равны m^2 и n^2. Найдите площадь трапеции, если $m + n = 10$.

6. Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведенной к гипотенузе.

7. Правильный шестиугольник $ABCDEK$ вписан в окружность радиусом $3 + \sqrt{3}$. Найдите $\sqrt{3}r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ACD.

8. В выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке O, причём $AO = OC$, $BC = 5$, $CD = 12$, а угол DAB — прямой. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Вариант №9

1. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите гипотенузу треугольника.

2. Вычислите длину биссектрисы угла A треугольника ABC, если длины его сторон $a = 18$, $b = 15$, $c = 12$.

3. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найдите $\sqrt{13}p$, где p — сумма сторон AB и BC треугольника ABC.

4. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 5\sqrt{2}$, $CD = 10\sqrt{13}$.

5. Внутри параллелограмма расположены две одинаковые окружности радиусом 6, каждая из которых касается боковой стороны параллело-

грамма, обоих оснований и второй окружности. Боковая сторона делится точкой касания в отношении 9 : 4. Найдите площадь параллелограмма.

6. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите $12S$, где S — площадь четырехугольника $OMCD$.

7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) окружность касается основания AD, боковых сторон AB, CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD. Найдите $\frac{16}{\sqrt[4]{3}}R$, где R —радиус окружности, если $AD : BC = 5 : 3$, а площадь трапеции $S = 9$.

8. Через середину гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая катет BC в точке D, а продолжение катета AB за точку A — в точке E. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD = 1$, $AE = 2$, $\cos\angle CAB = \frac{3}{5}$.

Вариант №10

1. В треугольнике ABC медианы BK и CE взаимно перпендикулярны. Найдите $BC\sqrt{5}$, если $AB = 6$, $AC = 8$.

2. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон, противолежащих этим углам, соответственно равны 12 и 8. Найдите косинус угла C, увеличенный в 4 раза.

3. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пресекаются в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $CK = 5$, $KH = 1$.

4. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 2$, $CD = 10\sqrt{26}$.

5. Внутри параллелограмма расположены две одинаковые окружности радиусом 2, каждая из которых касается боковой стороны параллелограмма, обоих оснований и второй окружности. Боковая сторона делится точкой касания в отношении 1 : 4. Найдите площадь параллелограмма.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD, AOD равны соответственно 20, 40, 60. Найдите градусную меру угла BAO, если известно, что $AB = 15$, $AO = 8$.

7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) окружность касается основания AD, боковых сторон AB, CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD. Площадь трапеции $S = 4$, а $AD : BC = 7 : 5$. Найдите $12\sqrt[4]{\frac{3}{10}}R$, где R — радиус окружности.

8. Через середину катета AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая гипотенузу AC в точке E, а продолжение катета BC за точку B — в точке F. Найдите $\sqrt{3}S$, где S — площадь треугольника ABC, если $AE = 2$, $BF = 3$, $\angle ACB = 60°$.

Вариант №11

1. В прямоугольном треугольнике длины двух медиан, проведённых к катетам, равны 12 и $4\sqrt{11}$. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

2. Длины двух сторон треугольника равны 1 и $\sqrt{15}$, а длина медианы к третьей стороне равна 2. Найдите $(5-\sqrt{15})p$, где p — периметр треугольника.

3. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Найдите сторону AB этого треугольника, если $AC = 30$ и $BC = 12\sqrt{5}$.

4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K и прямую DC в точке L. Найдите периметр треугольника ABK, если $AD = 10$, $KL = 7{,}5$, $CL = 6$.

5. В трапецию $ABCD$ с прямым углом BAD вписана окружность радиусом 5. Найдите среднюю линию трапеции, если угол между ней и боковой стороной CD трапеции равен 30°.

6. Около треугольника BCD описана окружность. Через точку B к окружности проведена касательная, пересекающая прямую CD в точке A так, что D лежит на отрезке AC. Найдите длину AD, если $CD = 5$ и $AB = 6$.

7. Сторона правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равна $\sqrt{2\sqrt{3}+3}$. Биссектриса угла $A_6A_2A_3$ пересекает сторону A_4A_5 в точке O. Найдите площадь треугольника A_2A_5O.

8. Хорды AC и BD окружности перпендикулярны и пересекаются в точке P. PH — высота треугольника ADP. Угол $ADP = 30°$, $AH = 2$, $PC = 6$. Найдите отношение площади треугольника ADC к площади треугольника ABC.

Вариант №12

1. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна $2\sqrt{3}$ и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите больший катет.

2. Высота CH треугольника ABC равна 8, где основание высоты H лежит на отрезке AB. HN — высота треугольника BCH, а HM — высота треугольника ACH. Найдите длину отрезка MN, если $AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, а $BN = 12$.

3. Дан треугольник ABC. Известно, что $AC = 10$, $BC = 12$ и $\angle CAB = 2\angle CBA$. Найдите длину стороны AB.

4. Равнобедренная трапеция описана около окружности радиусом 2. Найдите площадь трапеции, если косинус угла при большем основании трапеции равен 0,6.

5. Через середину диагонали AC трапеции $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная AC. Эта прямая пересекает основания AD и BC в точках K и M соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $AMCK$, если $AM = 10$, $AC = 16$.

6. Около треугольника ABC описана окружность радиусом $4\sqrt{3}$, и в него же вписана окружность. Хорда описанной окружности, проходящая через центр вписанной окружности и вершину A, пересекает сторону BC в точке M. Найдите MC, если $\angle A = 60°$ и $AB = 2AC$.

7. Дан правильный восьмиугольник $A_1A_2...A_8$. Площадь треугольника $A_1A_4A_5$ равна $8\sqrt{2}$. Найдите $(\sqrt{2}-1)\cdot S$, где S — площадь треугольника $A_1A_4A_6$.

8. Отрезки KP и MH имеют равные длины и пересекаются в точке O так, что $KH \parallel MP$, $OH = 4$, $OM = 5$. Найдите отношение периметров треугольников OKM и OHP.

Вариант №13

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120°. Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника, до основания треугольника равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а до боковых сторон равно 3. Найти AC.

2. На гипотенузе прямоугольного треугольника взята точка, равноудалённая от катетов, которая разбивает гипотенузу на отрезки длиной 1и 3. Найдите высоту этого треугольника, проведённую из вершины прямого угла.

3. В треугольнике ABC сторона AB равна $\sqrt{84}$, и она больше половины AC. Найдите сторону BC, если медиана BM равна 5, а площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$.

4. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке L, лежащей на стороне AD. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если известно, что $CL = 12$, а площадь $\triangle ABL$ равна 15.

5. Найдите длину средней линии трапеции, в которой диагонали взаимно перпендикулярны, а их длины равны 10 и 24.

6. Около окружности радиусом $\sqrt{3}$ описан равносторонний треугольник. К этой же окружности параллельно одной из сторон треугольника проведена касательная, отсекающая от данного треугольника меньший треугольник. Найдите периметр меньшего треугольника.

7. Точка O является центром правильного двенадцатиугольника $A_1A_2\ldots A_{12}$, площадь треугольника A_1OA_9 равна $2\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника $A_1A_6A_7$.

8. В треугольнике ABC точка D делит сторону AC на отрезки $AD = 3$ и $DC = 13$; $\angle BAC = 60°$; $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите площадь треугольника ABC.

Вариант №14

1. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность с центром O. Луч CO пересекает сторону AB в точке K, причём $AK : BK = 10 : 13$. Найдите длину отрезка BM, где M — точка пересечения медиан треугольника, если $AC = 20$.

2. Треугольник ABC — прямоугольный с гипотенузой AB. Найдите длину его биссектрисы BL, если известно, что она делит медиану CM в отношении $\frac{6}{5}$, считая от вершины C, а площадь треугольника ABC равна 120.

3. В треугольнике ABC сторона BC равна $2\sqrt{97}$, и она больше половины стороны AC. Найдите сторону AB, если медиана BM равна 12, а площадь треугольника ABC равна 96.

4. Основания трапеции равны 4 и 10, а её боковые стороны — $3\sqrt{13}$ и 15. Найдите косинус наименьшего угла этой трапеции.

5. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом при вершине B. Синус угла BAD равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, а длина стороны AB равна 6. Найдите периметр треугольника ABC, если площадь параллелограмма равна $20\sqrt{2}$.

6. Из точки A к окружности проведены две касательные, образующие

угол в 60° и касающиеся окружности в точках B и C. Третья касательная к данной окружности параллельна прямой BC и отсекает от треугольника ABC меньший треугольник. Найдите периметр меньшего треугольника, если периметр треугольника ABC равен 10,5.

7. Внешний угол правильного многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$ равен 30°. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из вершины A_5 на диагональ A_1A_7, если этот многоугольник вписан в круг радиусом $12\sqrt{3}$.

8. Радиус окружности, вписанной в ромб, в четыре раза меньше одной из его диагоналей и равен $4\sqrt{3}$. Найдите периметр этого ромба.

Вариант №15

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен 120°. Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника, до основания треугольника равно $2\sqrt{3}$, а до боковых сторон равно 1. Найдите основание AC.

2. Треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом C. Биссектриса BL и медиана CM пересекаются в точке K. Найдите отношение $\dfrac{LK}{BK}$, если известно, что $\dfrac{MK}{CK} = \dfrac{5}{6}$.

3. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла A, а длина стороны BC равна 40. Найдите сторону AB, если длина биссектрисы BD равна 39.

4. Боковые стороны равнобедренной трапеции при их продолжении пересекаются под углом 120°. Найдите длину меньшего основания трапеции, если её площадь равна $65 + 25\sqrt{3}$, а высота равна 5.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Известно, что $AC = 4$, $BD = 5$ и $\angle CAD = 2\angle BDA$. Найдите длину средней линии трапеции.

6. В окружности проведена хорда MN длиной $11\sqrt{3}$ и диаметр MP. В точке N проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра MP за точку P в точке Q под углом 30°. Найдите длину отрезка PQ.

7. Известно, что угол при вершине B_1 правильного многоугольника $B_1B_2B_3\dots B_n$ равен 150°, а радиус описанной около этого многоугольника окружности равен $8\sqrt{3}$. Найдите высоту B_4H треугольника $B_2B_4B_8$.

8. Основание равнобедренного треугольника равно 8. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках B и C, $BC = 6$. Найдите периметр треугольника.

§ 3. Стереометрия

Вариант №1

1. Площадь боковой поверхности куба равна 16. Найдите объем куба.

2. В основании прямоугольного параллелепипеда квадрат со стороной 3. Найдите площадь диагонального сечения, если высота параллелепипеда равна $2\sqrt{2}$.

3. Образующая конуса равна 13, диаметр основания — 10. Найдите объем конуса (число π принять равным 3).

4. Радиус основания цилиндра равен 3, высота — 8. Найдите диагональ осевого сечения.

5. В шаре радиусом 13 проведено сечение площадью 25π. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, P, Q — середины ребер AB, BC, CD и DA соответственно. Найдите объем пирамиды A_1MNPQ, если объем куба равен 60.

7. Осевое сечение конуса — правильный треугольник. В конус вписана сфера. Найдите площадь поверхности сферы, если образующая конуса равна 3 (число π принять равным 3).

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $3\sqrt{2}$. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD.

Вариант №2

1. Ребро куба равно $\sqrt[4]{2}$. Найдите площадь диагонального сечения.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 3$, $BC = 4$, $AA_1 = 7$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, D и C_1.

3. Радиус основания конуса равен 3. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найдите площадь осевого сечения.

4. Высота цилиндра равна 7, радиус основания — 5. В цилиндре проведено сечение — параллельно его оси. Найдите площадь сечения, если оно проведено на расстоянии 3 от оси цилиндра.

5. Найдите отношение площади поверхности шара радиусом 3 к его объему.

6. В шар вписана четырехугольная пирамида $SABCD$. Найдите радиус шара, если известно, что основание пирамиды — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$, $BC = 7$; грани SAB и SBC перпендикулярны основанию; $SB = 6$; SD — диаметр шара.

7. Осевое сечение конуса — правильный треугольник. Вокруг конуса описана сфера. Найдите площадь ее поверхности, если радиус основания конуса равен $2\sqrt{3}$ (число π принять равным 3).

8. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной 2, и углом между боковой гранью и плоскостью основания, равным 45°.

Вариант №3

1. Длина диагонали грани куба равна $\sqrt{6}$. Найдите длину диагонали куба.

2. Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна — 144, высота 14. Найдите диагональ призмы.

3. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 6, высота — 4. Найдите длину образующей конуса.

4. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси и отсекающей от окружностей оснований дуги по 120°. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна 4, радиус основания — $2\sqrt{3}$.

5. Сколько надо взять шаров радиусом 2, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиусом 6?

6. В шар вписан конус с высотой и образующей равными 5 и 6 соответственно. Найдите радиус шара.

7. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем описанного около пирамиды конуса, если сторона основания пирамиды равна 3 (число π принять равным 3).

8. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой, равной 6, вписан шар. Найдите объем пирамиды, если объем шара равен $\frac{32\pi}{3}$.

Вариант №4

1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3. Точка M — середина ребра B_1C_1. Найдите длину MD.

2. Основанием прямой призмы служит ромб с диагоналями 5 и 8. Найдите объем призмы, если ее высота равна 2.

3. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 7, образующая — 5. Найдите площадь осевого сечения.

4. Радиус цилиндра равен 4. Найдите отношение объема цилиндра к его площади боковой поверхности.

5. Отношение объемов двух шаров равно 8. Как относятся площади их поверхностей?

6. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ в основании $ABCD$ — ромб, $AC = 8$, $BD = 6$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, если высота пирамиды равна 1 и все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом.

7. Шар описан около цилиндра. Найдите объем шара, если высота цилиндра равна $2\sqrt{7}$, а сторона правильного треугольника, вписанного в его основание, равна $3\sqrt{3}$ (число π принять равным 3).

8. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4. Площадь сечения, проведенного через другой катет и противолежащую ему вершину верхнего основания, равна 15. Найдите объем призмы, если длина бокового ребра равна 3.

Вариант №5

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите градусную меру угла между прямыми DC_1 и AC.

2. Боковое ребро наклонного параллелепипеда равно 15 и наклонено под углом 30° к плоскости основания. Найдите высоту параллелепипеда.

3. Высота конуса равна 6. Плоскость, параллельная основанию конуса, делит образующую конуса в отношении 1 : 3, считая от вершины. Найдите объем конуса, если площадь сечения конуса данной плоскостью равна 3.

4. Высота цилиндра равна 12, радиус основания — 10. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от сечения до оси цилиндра.

5. Диаметр первого шара равен радиусу второго шара. Найдите отношение площади поверхности первого шара к площади поверхности второго шара.

6. Шар вписан в правильный тетраэдр. Найдите радиус шара, если ребро тетраэдра равно $\sqrt{6}$.

7. В правильную треугольную пирамиду вписана сфера, центр которой делит высоту пирамиды в отношении 5 : 4, считая от вершины. Найдите площадь поверхности сферы, если сторона основания пирамиды равна $12\sqrt{3}$ (число π принять равным 3).

8. Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна 2, угол между диагоналями основания 30°. Плоскость сечения, проведенного через диагональ основания и противолежащую ей вершину верхнего основания, составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Вариант №6

1. Дан куб с ребром $\sqrt{6}$. Найдите расстояние между вершиной куба и его диагональю.

2. Найдите диагональ правильной четырёхугольной призмы, если диагональ основания равна 8, а диагональ боковой грани равна 7.

3. Образующая усеченного конуса равна 8 и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Диагональ осевого сечения делит этот угол пополам. Найдите периметр осевого сечения.

4. Высота цилиндра на 10 больше радиуса основания. Площадь полной поверхности равна 144π. Найдите высоту цилиндра.

5. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот куб?

6. В правильную треугольную призму вписан шар. Найдите объем призмы, если радиус шара равен $\sqrt{3}$.

7. В конус высотой 12 вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник со сторонами 6 и 8. Найдите отношение объемов пирамиды и конуса (число π принять равным 3).

8. Равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 4, а один из углов 120°, вращается вокруг прямой, содержащей большую сторону. Найдите площадь поверхности полученного тела (число π принять равным 3).

Вариант №7

1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4, точка M — середина AA_1. Найдите площадь сечения, проведенного через вершины D_1, C и точку M.

2. Все ребра наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 2. Найдите его объем, если $\angle BAD = 60°$, $\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 45°$.

3. В конусе проведено осевое сечение — треугольник, один из углов которого 120°. Найдите отношение площади основания к площади боковой поверхности. В ответе укажите квадрат коэффициента отношения.

4. Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 13, расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно 5. Найдите высоту цилиндра, если прямая AB составляет с плоскостью основания угол 45°.

5. В шаре через одну точку проведены два взаимно перпендикулярных сечения. Найдите радиус шара, если площади сечений равны 36π и 64π.

6. В четырёхугольную правильную пирамиду можно вписать шар, причём радиус шара в 5 раз меньше высоты этой пирамиды. Во сколько раз площадь боковой поверхности пирамиды больше площади её основания?

7. Сфера вписана в цилиндр. Найдите отношение площади полной поверхности цилиндра к площади поверхности сферы.

8. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $3\sqrt{3}$, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α, где $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$. Найдите высоту пирамиды.

Вариант №8

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через ребро AD проведено сечение под углом 30° к плоскости основания ABC. Найдите площадь сечения, если $AB = \sqrt[4]{3}$.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $4\sqrt{2}$ и составляет угол 30° с плоскостью основания и 45° с боковой гранью. Найдите объем параллелепипеда.

3. В конусе проведено сечение через вершину на расстоянии 12 от центра основания. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна 20 и окружность основания делится сечением в отношении 1 : 3.

4. Имеются два цилиндра. Высота первого в два раза больше высоты второго. Разверткой боковой поверхности каждого цилиндра является один и тот же прямоугольник. Найдите отношение объемов этих цилиндров (первого ко второму).

5. В каком отношении находятся объемы двух шаров, если площади их поверхностей относятся как 9 : 4?

6. Шар вписан в конус. Найдите площадь поверхности шара, если диаметр основания конуса равен 6, а образующая — 5 (число π принять за 3).

7. Цилиндр вписан в сферу. Найдите отношение площади полной поверхности цилиндра к площади поверхности сферы, если высота цилиндра равна диаметру основания.

8. Боковое ребро наклонной призмы равно $3\sqrt{2}$ и наклонено к плоскости основания под углом $45°$. Основанием призмы является параллелограмм со сторонами 8 и 4 и тупым углом в $150°$. Найдите объем призмы.

Вариант №9

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A_1, B и середину ребра DD_1 проведено сечение. Найдите длину ребра куба, если периметр сечения равен $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

2. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в основании лежит квадрат. Диагональ грани D_1A перпендикулярна основанию $ABCD$. Найдите длину D_1A, если площадь боковой поверхности параллелепипеда равна $6\cdot(2+\sqrt{3})$ и боковое ребро DD_1 составляет с плоскостью основания угол, равный $60°$.

3. Через середину высоты конуса проведено сечение, параллельное основанию. В каком отношении разделился объем конуса (в ответе укажите отношение большего объема к меньшему)?

4. Два тела получены поочередным вращением прямоугольника со сторонами 15 и 5 вокруг его неравных сторон. Найдите отношение площадей полной поверхности полученных тел.

5. Стороны треугольника 13, 14 и 15. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника, если радиус шара равен 5.

6. В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 4, вписан шар. Найдите отношение объемов усеченного конуса и шара.

7. Высота конуса равна 6, объем равен 72π. Найдите площадь полной поверхности куба, вписанного в конус.

8. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, высота — $2\sqrt{2}$. AH — высота основания ABC. Найдите градусную меру угла между прямыми A_1B и AH.

Вариант №10

1. Найдите длину диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если расстояние от точки пересечения диагоналей куба до ребра DC равно $\sqrt{6}$.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в основании лежит квадрат $ABCD$, точка M — середина AB, точка N — середина AD, точка O — центр параллелепипеда. Найдите площадь сечения, проходящего через точки M, N и O, если $AB = 1$, $AA_1 = 2$.

3. Образующая конуса равна 1 и наклонена к его оси под углом 60°. Найдите объём конуса (π принять равным 3).

4. Осевое сечение цилиндра — квадрат. На оси цилиндра выбрана точка, равноудалённая от центра нижнего основания и некоторой точки окружности верхнего основания. В каком отношении эта точка делит отрезок оси цилиндра, заключённый между основаниями (считать от верхнего основания)?

5. Диагонали ромба равны 15 и 20. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара равен 10. Найдите расстояние от плоскости ромба до центра шара.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро MA, равное 8, наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь поверхности описанного около пирамиды шара (π принять за 3).

7. Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна 100π. Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна 6π. Найдите радиус основания конуса.

8. В наклонной треугольной призме площади двух боковых граней равны 16 и 25. Они образуют двугранный угол 30°. Найдите объем призмы, если ее боковое ребро равно 10.

Вариант №11

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите градусную меру угла между прямыми AC_1 и CB_1.

2. Расстояние между серединами рёбер AB и A_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{41}$. Найдите площадь его полной поверхности, если $A_1D_1 : A_1B_1 : AA_1 = 1 : 2 : 3$.

3. Сечение, параллельное плоскости основания, делит образующую конуса на отрезки 10 и 5, считая от вершины. Расстояние между плоскостью основания и плоскостью сечения равно 4. Найдите объём части конуса, заключённой между этими плоскостями, уменьшенный в π раз.

4. Объём цилиндра равен 600π. Хорда основания удалена от центра этого основания на 8 и равна 12. Найдите высоту цилиндра.

5. Объём шара равен $\frac{500\pi}{3}$. Найдите расстояние от центра шара до отрезка длиной 6, соединяющего две точки поверхности шара.

6. В конус с образующей длиной 3 и радиусом основания 2 вписан шар. Найдите отношение объёма конуса к объёму шара.

7. В конус вписан куб таким образом, что одна из граней куба лежит на основании конуса. Вычислите объём конуса, если ребро куба равно $a = \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$, а угол, образованный высотой конуса и образующей, равен $30°$. В ответе укажите целую часть полученной величины.

8. Высота прямой призмы $KMLK_1M_1L_1$ равна 6. Основание призмы — треугольник KML, в котором $KM = 6$, а $\sin \angle M = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$. Найдите синус угла между плоскостями KML и K_1ML.

Вариант №12

1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до плоскости BDC_1.

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 4$, $BC = 3$, $BB_1 = \dfrac{4\sqrt{91}}{5}$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA_1.

3. Высота конуса равна 20, радиус основания равен 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, расстояние до которого от центра основания конуса равно 12.

4. Высота цилиндра равна $2\sqrt{11}$. Вершины A и B правильного треугольника ABC со стороной, равной 12, расположены на окружности одного основания этого цилиндра, а вершина C — на окружности другого основания. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки A и C.

5. Радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, равен $\sqrt{6}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

6. В правильный тетраэдр вписан шар радиусом $\sqrt{0{,}75}$. Найдите объём тетраэдра.

7. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой составляет с плоскостью основания угол в $45°$, вписан куб так, что точки его верхнего основания лежат на рёбрах пирамиды, а точки нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды, если ребро куба равно $5(2 - \sqrt{2})$.

8. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$ со стороной, равной 7. Площадь ромба равна 28. Тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью ABC_1 равен 2,75. Найдите длину бокового ребра призмы.

Вариант №13

1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точка K — середина ребра DD_1. Точки M и H лежат на рёбрах A_1B_1 и AB соответственно, причём $A_1M : MB_1 = 1 : 3$, $AH : HB = 3 : 1$. Найдите градусную меру угла между прямыми MH и KC_1.

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 6$, $BC = 8$, $BB_1 = 1{,}4$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA_1.

3. Найдите длину образующей конуса, если его высота равна 12, а объём равен 100π.

4. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра, пересекает верхнее основание по хорде длиной 5, стягивающей дугу в β радиан. Найдите тангенс угла наклона данной плоскости к плоскости основания, если длина высоты цилиндра равна 8, а $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{3}{4}$.

5. В конус, осевое сечение которого — равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объём конуса, если объём шара равен 8.

6. Около правильного тетраэдра описан шар радиусом $3\sqrt{3}$. Найдите объём тетраэдра.

7. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан куб, объём которого равен $3(10 - 7\sqrt{2})$. Вершины верхнего основания куба лежат на боковых рёбрах пирамиды, а вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найдите объём пирамиды, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол 45°.

8. Высота правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна 4, а диаметр описанной около основания окружности равен $2\sqrt{3}$. Найдите синус угла между плоскостью A_1CD и плоскостью основания призмы.

Вариант №14

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, K — середина AA_1, L — середина A_1B_1, M — середина A_1D_1. Найдите косинус острого угла между плоскостями KLM и A_1BD. В ответе укажите, во сколько раз значение найденного косинуса меньше единицы.

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 12$, $BC = 16$, $BB_1 = 2{,}8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA_1.

3. Найдите высоту конуса, если её длина меньше длины образующей на 2, а площадь основания конуса равна 64π.

4. Нижнее основание цилиндра радиусом 2 пересекается с плоскостью α по хорде MN длиной $2\sqrt{3}$. AB — диаметр нижнего основания, перпендикулярный к MN. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если известно, что плоскость α пересекает ось цилиндра и отсекает от его образующей, проходящей через точку A, отрезок AK длиной $\sqrt{3}$.

5. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3. Боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла основания, равно $\sqrt{15}$ и перпендикулярно плоскости основания. Найдите другой катет основания, если радиус сферы, описанной около пирамиды, равен $\frac{7}{2}$.

6. В шар вписан конус с площадью основания, равной 16π. Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через ось конуса, равна 25π. Найдите высоту конуса, если центр шара находится внутри конуса.

7. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описан шар. Найдите объём призмы, если объём шара равен 64π.

8. В правильном тетраэдре расстояние между скрещивающимися ребрами равно $\sqrt[4]{3}$. Найдите площадь поверхности тетраэдра.

Вариант №15

1. На стороне KK_1 куба $KMLFK_1M_1L_1F_1$ отмечена точка N так, что $K_1N : NK = 3 : 2$. Найдите тангенс угла между плоскостями KML и NML.

2. Боковые рёбра призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, наклонены к плоскости основания под углом в 30°. Отрезок D_1A перпендикулярен плоскости основания. Найдите длину стороны основания призмы, если площадь её боковой поверхности равна $8\sqrt{3}$.

3. Через две образующие конуса, угол между которыми равен 120°, проведена плоскость, удалённая от центра основания конуса на расстояние, равное $3\sqrt{3}$. Прямая, по которой пересекаются проведённая плоскость и плоскость основания конуса, удалена от центра основания конуса на расстояние, равное 6. Найдите образующую конуса.

4. Дан цилиндр с высотой, равной $\frac{\sqrt{3}}{2}$, и радиусом основания 1. Плоскость α пересекает нижнее основание цилиндра по хорде MN длиной $\sqrt{3}$,

пересекает ось цилиндра и касается верхнего основания. Найдите расстояние от точки O, которая является центром верхнего основания цилиндра, до плоскости α.

5. Шар, объём которого $\frac{32\pi}{3}$, вписан в конус. Найдите высоту конуса, если радиус его основания равен $2\sqrt{3}$.

6. В правильный октаэдр вписан куб так, что вершинами куба являются центры граней октаэдра. Сторона октаэдра равна $\sqrt{18}$. Найдите объём куба.

7. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, а угол боковой грани с плоскостью основания равен $60°$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

8. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 3, её объем равен 64. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответы

§ 1. Текстовые задачи

№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,5	32	12	30	84	5	2	2
2	11000	1,55	5	900	4	4	5	121
3	32	12	36	60	36	7	10	1,5
4	0,425	3,4	80	50	3	3	0,25	228
5	135000	1,5	50	120	80	10	7	40
6	156250	268	40	2	4	14	5	2
7	10	9	25	5	60	9	14	10
8	60	128	10	20	8	7	6	410
9	1560	12,5	100	45	90	1665	0,5	30
10	2,045	1	40	1,2	3	−36	10	8,2
11	80	8	8	48	400	−169	3280	48
12	−4	3	6	80	3	−3	2	4
13	10	450	15	80	12	8	16	2800
14	5764	5	5	29	30	9	16	862
15	432	24	125	8	2	4	7	100

§ 2. Планиметрия

№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,5	10	0,75	1	16	21,25	24	30
2	1,5	0,25	30	4	14	8	2	12
3	12	3	2	14	27	3	4	6,4
4	1,5	2	30	1	8	0,75	3	3
5	20	6	3	8	30	49	45	4
6	76	10	4	40	30	6	4	9
7	14	25	3,5	20	66	17	2	16
8	75	10	8	2	100	2,4	3	60

№	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	10	39	135	300	5	15	3,84
10	10	2,25	30	270	36	30	7	13,5
11	8	10	18	13	15	4	3	2
12	6	8	4,4	20	4,8	4	8	1
13	14	1,2	8	39	13	6	4	48
14	16	15	10	0,8	20	7	18	64
15	16	0,375	62,4	13	1,125	11	12	40

§ 3. Стереометрия

№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	8	12	300	10	12	10	9	3
2	2	18,5	9	56	1	5,5	192	6
3	3	22	5	24	27	3,6	9	96
4	4,5	40	30	2	4	0,48	256	36
5	60	7,5	96	8	0,25	0,5	48	0,5
6	2	9	40	14	3	54	0,64	48
7	18	4	0,75	24	10	4	1,5	5
8	2	32	375	0,5	3,375	27	0,75	48
9	2	3	7	3	3	1,75	96	60
10	6	2,25	0,375	0,6	8	256	15	10
11	90	88	228	6	4	3,125	1	0,75
12	1	20	500	3,75	4	9	5	11
13	90	25	13	2,4	18	72	1	0,8
14	3	100	15	1,5	5	8	27	6
15	0,4	2	24	0,5	6	8	3	80

Решения вариантов №10

§ 1. Текстовые задачи

1. Пусть S рублей — сумма займа, а S_1 рублей — сумма, которую должен выплатить банку заёмщик. Зная, что в течение 10 лет заёмщик возвращает 0,1 суммы займа и 19% от непогашенной суммы, найдём, сколько рублей должен выплатить заёмщик сверх суммы займа.
Составим последовательность: $0{,}19 \cdot S$; $0{,}19 \cdot 0{,}9 \cdot S$; $0{,}19 \cdot 0{,}8 \cdot S$; ...; $0{,}19 \cdot 0{,}1 \cdot S$.
Заёмщик сверх суммы займа должен выплатить:
$0{,}19(S + 0{,}9S + 0{,}8S + ... + 0{,}1S) = 0{,}19 \cdot 5{,}5S = 1{,}045S$.
Тогда $S_1 = S + 1{,}045S = 2{,}045S$.
$\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{2{,}045S}{S} = 2{,}045$.
В 2,045 раза сумма, которую должен выплатить банку заёмщик, больше суммы займа.

Ответ: 2,045.

2. Пусть x кг было 10%-го раствора соли, тогда $(3 - x)$ кг было 25%-го раствора. $0{,}1x$ кг — соли в 10%-ом растворе, а $(3 - x) \cdot 0{,}25$ кг — соли в 25%-ом растворе. По условию получили 3 кг 20%-ой смеси, значит, эта смесь содержала $3 \cdot 0{,}2$ кг соли, то есть 0,6 кг. Составим уравнение:
$0{,}1x + (3 - x) \cdot 0{,}25 = 0{,}6$;
$0{,}1x + 0{,}75 - 0{,}25x = 0{,}6$; $x = 1$.
В смеси содержался 1 кг 10%-го раствора соли.

Ответ: 1.

3. 1) $288 - 168 = 120$ страниц рукописи набирал второй оператор.
2) $168 : 21 = 8$ страниц рукописи набирает первый оператор за 1 день.
3) $120 : 12 = 10$ страниц рукописи набирает второй оператор за 1 день.
4) Пусть x страниц рукописи дополнительно первый оператор отдаст второму. Тогда $168 - x$ страниц останется у первого оператора, а $120 + x$ страниц станет у второго оператора. За $\dfrac{168 - x}{8}$ дней выполнит свою работу первый оператор, за $\dfrac{120 + x}{10}$ — второй. По условию операторы выполнили свою работу за одинаковое число дней, поэтому
$\dfrac{168 - x}{8} = \dfrac{120 + x}{10}$; $x = 40$.

40 страниц рукописи первый оператор должен передать дополнительно второму.

Ответ: 40.

4. Пусть v_1 км/ч — скорость первого автомобиля, ($v_1 > 0$); v_2 км/ч — скорость второго автомобиля ($v_2 > 0$). $(v_1 + v_2)$ км/ч — скорость сближения; $3(v_1+v_2)$ км — расстояние между пунктами A и B; $\frac{3(v_1+v_2)}{v_1}$ ч — время в пути первого автомобиля; $\frac{3(v_1+v_2)}{v_2}$ ч — время в пути второго автомобиля.

По условию первый автомобиль затратил времени на 1,1 часа больше, чем второй, поэтому

$$\frac{3(v_1+v_2)}{v_1} - \frac{3(v_1+v_2)}{v_2} = 1{,}1,$$

$$3v_1v_2 + 3v_2^2 - 3v_1^2 - 3v_1v_2 = 1{,}1v_1v_2,$$

$$3v_2^2 - 3v_1^2 - 1{,}1v_1v_2 = 0,$$

$$3\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1{,}1\left(\frac{v_2}{v_1}\right) - 3 = 0.$$

Обозначим $\frac{v_2}{v_1} = t$, $t > 0$. Уравнение примет вид:

$$3t^2 - 1{,}1t - 3 = 0,$$

$t_1 = 1{,}2$, $t_2 = -\frac{5}{6}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.

Скорость второго автомобиля в 1,2 раза больше скорости первого автомобиля.

Ответ: 1,2.

5. 1) $520 - 148 = 372$ (км) расстояние между автомобилями в момент выезда из пункта B грузового автомобиля.

2) $74 + 50 = 124$ (км/ч) скорость сближения автомобилей.

3) $372 : 124 = 3$ (ч) был в пути грузовой автомобиль до встречи с легковым.

Ответ: 3.

6. $a_2 = a_1 + d$, $a_2 = 66 + d$, $a_{12} = a_1 + 11d$, $a_{12} = 66 + 11d$.
$a_2 \cdot a_{12} = (66 + d)(66 + 11d) = 4356 + 792d + 11d^2$.
Квадратный трехчлен $11d^2 + 792d + 4356$ принимает наименьшее значение

при $d_0 = -\frac{b}{2a}$, где $b = 792$, $a = 11$, $d_0 = \frac{-792}{2 \cdot 11} = -36$.

Ответ: -36.

7. Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} (b_1q^8)^2 + b_1q^{17} = 13 \cdot b_1q^{16}, \\ (b_1q^6)^2 - b_1q^{13} = 7 \cdot b_1q^{12}; \end{cases} \text{где } b_1 \neq 0,\ q \neq 0;$$

$$\begin{cases} b_1^2q^{16} + b_1q^{17} = 13b_1q^{16}, \\ b_1^2q^{12} - b_1q^{13} = 7b_1q^{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 + q = 13, \\ b_1 - q = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 10, \\ q = 3. \end{cases}$$

Ответ: 10.

8. Пусть x (т) — яблок завезли на базу, тогда $0{,}2x$ (т) — масса сухой части, а $0{,}8x$ (т) — масса воды. В результате хранения воды в яблоках стало $0{,}8x \cdot 0{,}995$ (т), то есть $0{,}796x$ (т). Зная, что масса яблок составила 9,96 (т), составим уравнение:

$0{,}2x + 0{,}796x = 9{,}96$, $x = 10$.

10 т яблок завезли на базу.

Ответ: 10.

§ 2. Планиметрия

1. Пусть медианы CE и BK пересекаются в точке O, тогда $OC : OE = 2 : 1$ и $BO : OK = 2 : 1$ (см. рис. 1).

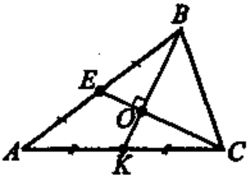


Рис. 1.

Обозначим $CE = x$, $BK = y$. Получим $OE = \frac{1}{3}x$, $OC = \frac{2}{3}x$, $OK = \frac{1}{3}y$, $OB = \frac{2}{3}y$.

В прямоугольных треугольниках BOE и COK имеем:

$BE^2 = OE^2 + OB^2$; $KC^2 = OC^2 + OK^2$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = 9, \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + \left(\frac{1}{3}y\right)^2 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 81, \\ 4x^2 + y^2 = 144; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 33, \\ y^2 = 12. \end{cases}$$

Треугольник BOC прямоугольный, значит, $BC^2 = OB^2 + OC^2$,

$BC^2 = \frac{4}{9} \cdot 12 + \frac{4}{9} \cdot 33 = \frac{4}{9} \cdot 45 = 20,$

$BC = 2\sqrt{5}$, $BC \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10.$

Ответ: 10.

2. Пусть $\angle B = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 180° - 3\alpha$ (см. рис. 2).

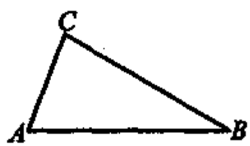


Рис. 2.

В треугольнике ABC по теореме синусов имеем:

$\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A}$; $\frac{8}{\sin\alpha} = \frac{12}{\sin 2\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$,

$\frac{8}{\sin\alpha} = \frac{12}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, $8\cos\alpha = 6$, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

$\angle C = 180° - 3\alpha$, $\cos\angle C = \cos(180° - 3\alpha) = -\cos 3\alpha$.

Зная, что $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, имеем:

$\cos\angle C = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}5625,$

$4\cos\angle C = 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}25.$

Ответ: 2,25.

3. Проведём $ME \perp AB$, тогда $ME \parallel CH$ (см. рис. 3).

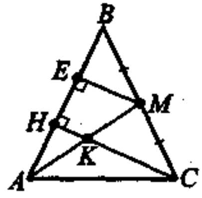


Рис. 3.

По условию AM — медиана, отсюда $BM = MC$, значит, ME — средняя линия $\triangle HBC$, $ME = \frac{1}{2}HC = 3$.

Обозначим $BM = x$, $AB = BC = 2x$.

В прямоугольном треугольнике BEM $BE = \sqrt{BM^2 - EM^2} = \sqrt{x^2 - 9}$.

Из подобия треугольников EAM и HAK имеем:

$\frac{AE}{AH} = \frac{EM}{HK}$, $\frac{2x - \sqrt{x^2-9}}{2x - 2\sqrt{x^2-9}} = \frac{3}{1}$,

$2x - \sqrt{x^2-9} = 6x - 6\sqrt{x^2-9}$, $x > 0$, $x = 5$, $AB = 2x = 10$.

$S_{ABC} = 2S_{AMB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot ME = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 30$.

Ответ: 30.

4. 1) $\angle ACB = \angle CAD$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC (см. рис. 4).

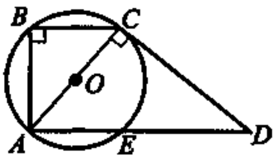


Рис. 4.

2) $\angle ABC = 90^\circ$ как вписанный, опирающийся на диаметр AC.

3) Прямоугольные треугольники ABC и ACD подобны по первому признаку подобия, следовательно, $\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{AC}$. Обозначим $AB = h$, $AC = 2r$, $\frac{h}{10\sqrt{26}} = \frac{2}{2r}$, $r = \frac{10\sqrt{26}}{h}$.

4) В $\triangle ABC$: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $(2r)^2 = h^2 + 4$, $\frac{4 \cdot 2600}{h^2} = h^2 + 4$,

$h^4 + 4h^2 - 10400 = 0$, $h > 0$, $h = 10$. $r = \frac{10\sqrt{26}}{10} = \sqrt{26}$.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}AB \cdot BC + \frac{1}{2}AC \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{26} \cdot 10\sqrt{26} = 270.$$

Ответ: 270.

5. Пусть M, E, F, K, P, N — точки касания окружностей со сторонами параллелограмма, Q — точка касания окружностей (см. рис. 5).

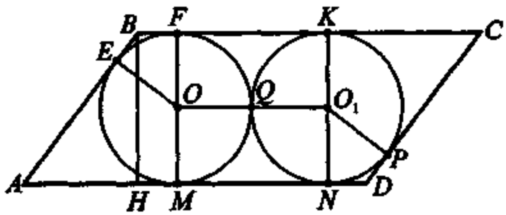


Рис. 5.

По свойству касательной имеем: $OM \perp AD$, $O_1N \perp AD$, $OF \perp BC$, $O_1K \perp BC$, $OE \perp AB$ и $O_1P \perp CD$.

Обозначим $BE = DP = x$, $AE = CP = 4x$. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, $AM = AE = 4x$, $CK = CP = 4x$, $BF = BE = x$, $DN = DP = x$.

$AD = AM + MN + ND$, $AD = 4x + 4 + x = 5x + 4$.

Проведем $BH \perp AD$, тогда $AH = AM - HM$, $HM = BF = x$, $AH = 4x - x = 3x$.

В прямоугольном треугольнике AHB:

$AB^2 = AH^2 + BH^2$, $(5x)^2 = (3x)^2 + 4^2$, $25x^2 = 9x^2 + 16$, $x > 0$, $x = 1$, $AD = 5 + 4 = 9$.

$S_{ABCD} = AD \cdot BH$, $S_{ABCD} = 9 \cdot 4 = 36$.

Ответ: 36.

6. Пусть $\angle AOB = \angle COD = \alpha$, $\angle BOC = \angle AOD = 180° - \alpha$ (см. рис. 6).

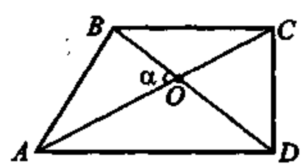


Рис. 6.

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OD \cdot \sin\angle AOD, \quad 8 \cdot OD \cdot \sin(180° - \alpha) = 120,$$

$$OD \cdot \sin\alpha = 15, \ OD = \frac{15}{\sin\alpha}.$$

$S_{COD} = \frac{1}{2}OD \cdot OC \cdot \sin\angle COD$, $OD \cdot \sin\alpha \cdot OC = 80$, $15 \cdot OC = 80$,

$OC = \frac{16}{3}$.

$S_{BOC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin\angle BOC$, $OB \cdot \frac{16}{3} \cdot \sin\alpha = 40$, $OB = \frac{120}{16 \cdot \sin\alpha} =$

$= \frac{7,5}{\sin\alpha}$.

$AC = OA + OC = 8 + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}$, $BD = OB + OD = \frac{7,5}{\sin\alpha} + \frac{15}{\sin\alpha} = \frac{22,5}{\sin\alpha}$,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{3} \cdot \frac{22,5}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = 150$,

$S_{AOB} = S_{ABCD} - (S_{AOD} + S_{COD} + S_{BOC}) = 150 - 120 = 30$,

$S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot AO \cdot \sin\angle BAO$,

$\sin\angle BAO = \frac{60}{15 \cdot 8} = 0,5$, $\angle BAO = 30°$.

Ответ: 30°.

7. 1) По условию трапеция $ABCD$ — равнобедренная. Проведём прямую l — ось трапеции (см. рис. 7).

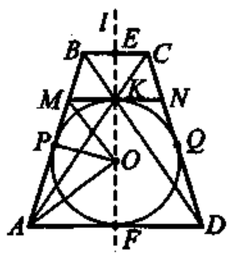


Рис. 7.

Прямая l пересекает основания трапеции AD и BC в точках F и E. Поэтому отрезок EF перпендикулярен основаниям, а точки E и F делят основания пополам. Имеем:
$BE = EC$, $AF = FD$, EF — высота трапеции. Диагонали трапеции AC и BD пересекаются в точке K, $K \in EF$. Окружность проходит через точку K и касается сторон трапеции в точках P, F, Q. Пусть точка O — центр окружности, $O \in KF$, тогда KF — диаметр, $KF = 2R$, где R — радиус окружности. Через точку K проведём $MN \parallel AD$. По свойству ка-

сательных, проведённых к окружности из одной точки, имеем:
$MP = MK$, $AP = AF$ и $\angle OMP = \angle OMK$, $\angle OAP = \angle OAF$.
$\angle MAD + \angle AMN = 180°$ как односторонние при $MN \parallel AD$ и секущей AM, $2\angle OAP + 2\angle OMP = 180°$, $\angle OAP + \angle OMP = 90°$, тогда $\angle AOM = 90°$.

Проведем радиус OP, по свойству касательной $OP \perp AM$. Имеем: OP — высота прямоугольного треугольника AOM, проведенная из вершины прямого угла, следовательно:
$OP^2 = MP \cdot AP$, $OP = R$, $R^2 = MP \cdot AP$ (1).
Выразим MP и AP через R.

2) Пусть $BC = 5x$, $AD = 7x$. Прямоугольные треугольники CEK и AFK подобны ($\angle ECK = \angle FAK$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC), поэтому $\frac{EC}{AF} = \frac{KE}{KF}$, $\frac{2{,}5x}{3{,}5x} = \frac{KE}{2R}$, $KE = \frac{10}{7}R$,

$EF = KE + KF = \frac{10}{7}R + 2R = \frac{24}{7}R$.

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot EF$, $\frac{12x}{2} \cdot \frac{24}{7}R = 4$, $x = \frac{7}{36R}$, $AD = \frac{49}{36R}$,

$AF = \frac{49}{72R}$.

3) Отрезки KE и EF равны высотам треугольников MBK и ABD соответственно. Из подобия треугольников MBK и ABD
($\angle B$ — общий, $\angle BMK = \angle BAD$ — как соответственные при $MN \parallel AD$ и секущей AB) следует:
$\frac{MK}{AD} = \frac{KE}{EF}$, $\frac{MK \cdot 36R}{49} = \frac{10R \cdot 7}{7 \cdot 24R}$, $MK = \frac{49 \cdot 5}{36 \cdot 12R}$.

Имеем: $AP = AF = \frac{49}{72R}$, $MP = MK = \frac{49 \cdot 5}{36 \cdot 12R}$.

4) Подставим найденные значения AP и MP в равенство (1):
$R^2 = \frac{49 \cdot 5}{36 \cdot 12R} \cdot \frac{49}{72R}$, $R = \sqrt[4]{\frac{49 \cdot 49 \cdot 5}{36 \cdot 36 \cdot 24}} = \frac{7}{6}\sqrt[4]{\frac{5}{24}}$,

$12\sqrt[4]{\frac{3}{10}} \cdot \frac{7}{6} \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{24}} = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7$.

Ответ: 7.

8. Проведём $EK \perp OA$, $EK = \frac{1}{2}AE$ как катет, лежащий против угла 30°,

$EK = 1$, $\frac{EK}{AK} = \operatorname{tg} 30°$, $AK = \frac{EK}{\operatorname{tg} 30°} = \sqrt{3}$ (см. рис. 8).

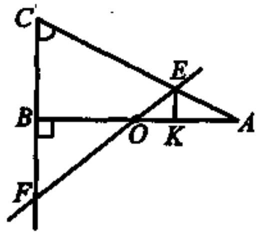


Рис. 8.

Пусть $OA = OB = x$. Из подобия прямоугольных треугольников OBF и OKE имеем:
$\frac{OK}{OB} = \frac{EK}{BF}$, $\frac{x-\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{3}$, $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $AB = 2x = 3\sqrt{3}$, $\frac{BC}{AB} = \operatorname{tg} 30°$,

$BC = AB \cdot \operatorname{tg} 30° = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB$, $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = 4{,}5\sqrt{3}$, $\sqrt{3} \cdot S = 4{,}5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 13{,}5$.

Ответ: 13,5.

§ 3. Стереометрия

1. Пусть O — точка пересечения диагоналей куба и $OK \perp DC$, тогда $OK = \sqrt{6}$ (см. рис. 9).

Проведём $OF \perp ABC$, отсюда ΔOFK — прямоугольный и $OF =$ $= FK = \frac{a}{2}$, где a — длина ребра куба. $OK^2 = OF^2 + FK^2$, $6 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$,

$a > 0$, $a = 2\sqrt{3}$.
Диагональ куба B_1D равна $a\sqrt{3}$, $B_1D = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

Ответ: 6.

2. 1) Пусть $MM_1K_1F_1N_1N$ — сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M_1, N_1, O (см. рис. 10).

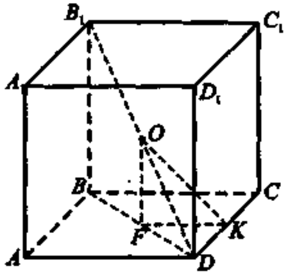


Рис. 9.

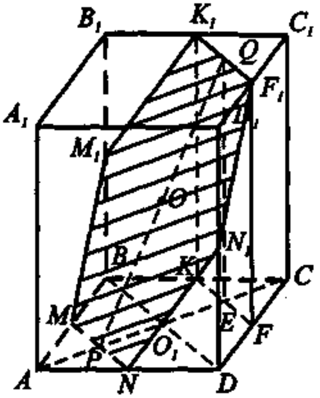


Рис. 10.

$S_{\text{сеч.}} = \dfrac{S_{MBKEDN}}{\cos\angle QPE}$.

2) По условию $ABCD$ — квадрат и MN — средняя линия $\triangle BAD$, тогда проекция отрезка K_1F_1 на плоскость основания $ABCD$ отрезок KF — средняя линия $\triangle BCD$. Таким образом, $AP = PO_1 = O_1E = EC =$

$= \dfrac{1}{4}AC$.

Ребро квадрата $ABCD$ равно 1, значит, диагональ $AC = \sqrt{2}$, $\dfrac{1}{4}AC =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $PE = PO_1 + O_1E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольном треугольнике QEP имеем:

$\operatorname{tg}\angle QPE = \dfrac{QE}{PE} = \dfrac{2\cdot 2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}^2\angle QPE + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\angle QPE}$,

$\cos\angle QPE > 0$, $\cos\angle QPE = \frac{1}{3}$.

$S_{MBKFDN} = S_{ABCD} - 2S_{AMN} = 1 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot AM\cdot AN = 1 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

$S_. = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 1} = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

Ответ: 2,25.

3. $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания конуса, h — высота конуса (см. рис. 11).

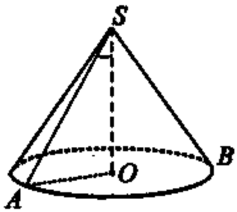


Рис. 11.

В прямоугольном треугольнике SOA имеем: $AO = AS\cdot\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$SO = AS\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $V = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = 0{,}375$.

Ответ: 0,375.

4. Пусть квадрат $ABCD$ — осевое сечение цилиндра (см. рис. 12).

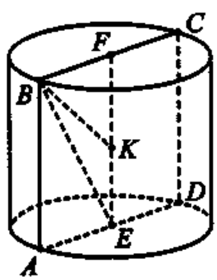


Рис. 12.

Примем сторону квадрата за единицу длины. Тогда $AB = EF = 1$,

$BF = \frac{1}{2}$. Обозначим $x = KE = BK$. В прямоугольном треугольнике BKF имеем: $FK = \sqrt{BK^2 - BF^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$.

$FK + KE = 1$; $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + x = 1$; $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} = 1 - x$. Так как $\frac{1}{2} < x < 1$, то $x^2 - \frac{1}{4} = x^2 - 2x + 1$; $2x = \frac{5}{4}$; $x = \frac{5}{8}$. $FK = 1 - KE = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

$\frac{FK}{KE} = \frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

5. Шаровая поверхность касается всех сторон ромба, значит, сечением шара плоскостью ромба будет окружность, вписанная в ромб. (см. рис. 13). $AC = 20$, $BD = 15$.

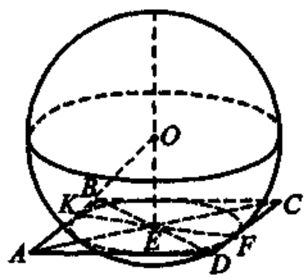


Рис. 13.

Пусть r — радиус окружности, вписанной в ромб. OE — расстояние от центра шара до плоскости ромба. В $\triangle OEK$ имеем:

$OK^2 = OE^2 + KE^2$, $OE = \sqrt{10^2 - r^2}$. Найдем r. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = CD \cdot KF$, где KF — высота ромба, $KF = 2r$. Из $\triangle CED$ сторона ромба $CD = \sqrt{CE^2 + ED^2}$; $CE = \frac{1}{2}AC = 10$; $ED = \frac{1}{2}BD = 7{,}5$; $CD = \sqrt{10^2 + 7{,}5^2} = 12{,}5$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 12{,}5 \cdot 2r;\ r = 6;\ OE = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$

Ответ: 8.

6. По условию пирамида $MABCD$ — правильная и $\angle MAC = 60°$, значит, $\triangle AMC$ — равносторонний (см. рис. 14).

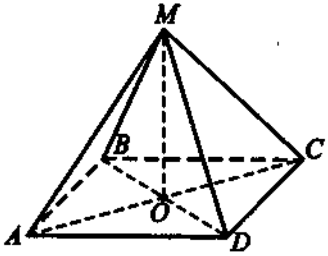


Рис. 14.

Задача сводится к нахождению радиуса окружности, описанной около равностороннего треугольника. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, где a — длина стороны равностороннего треугольника. $R = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

$S_{\text{пов.}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 = 256.$

Ответ: 256.

7. Рассмотрим осевое сечение конуса (см. рис. 15).

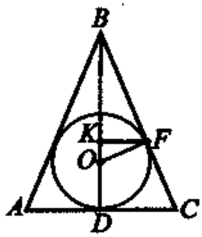


Рис. 15.

Пусть O — центр шара, тогда $OF = OD = R$, R — радиус шара, K — центр окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, $KF = r$, r — радиус окружности, S — площадь поверхности сферы.

$S_{.} = 4\pi R^2,\ 4\pi R^2 = 100\pi,\ R = 5.$
$C = 2\pi r,\ 6\pi = 2\pi r,\ r = 3.$
В прямоугольном треугольнике OKF имеем: $OF = 5,\ KF = 3$, значит, $OK = 4$. По свойству касательной $BC \perp OF$, отсюда $\triangle BFO$ — прямоугольный, FK — высота, проведенная из вершины прямого угла, поэтому $OF^2 = OK \cdot OB$ по свойству катета $OB = \dfrac{OF^2}{OK} = \dfrac{5^2}{4} = 6{,}25.$
$BD = OD + OB = 5 + 6{,}25 = 11{,}25,\ BK = OB - OK = 6{,}25 - 4 = 2{,}25.$
Из подобия треугольников BKF и BDC имеем

$$\frac{BK}{BD} = \frac{KF}{DC},\ DC = \frac{BD \cdot KF}{BK} = \frac{11{,}25 \cdot 3}{2{,}25} = 15.$$

Ответ: 15.

8. Проведем $A_2B_2 \perp AA_1,\ A_2C_2 \perp AA_1$, тогда $\angle C_2A_2B_2$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями AA_1B и AA_1C (см. рис. 16).

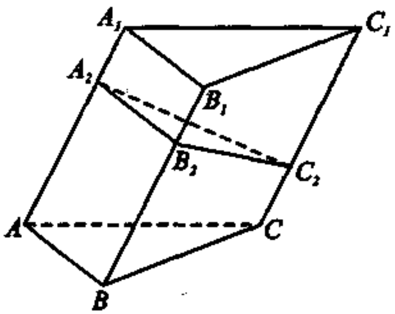


Рис. 16.

Так как сечение $B_2A_2C_2$ перпендикулярно ребрам призмы, то

$$V\text{призмы} = S_{A_2B_2C_2} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} A_2B_2 \cdot A_2C_2 \cdot \sin\angle B_2A_2C_2 \cdot AA_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{AA_1B_1B}}{AA_1} \cdot \frac{S_{AA_1C_1C}}{AA_1} \cdot \sin\angle B_2A_2C_2 \cdot AA_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{AA_1B_1B} \cdot S_{AA_1C_1C}}{AA_1} \cdot \sin\angle B_2A_2C_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 25}{10} \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

Ответ: 10.