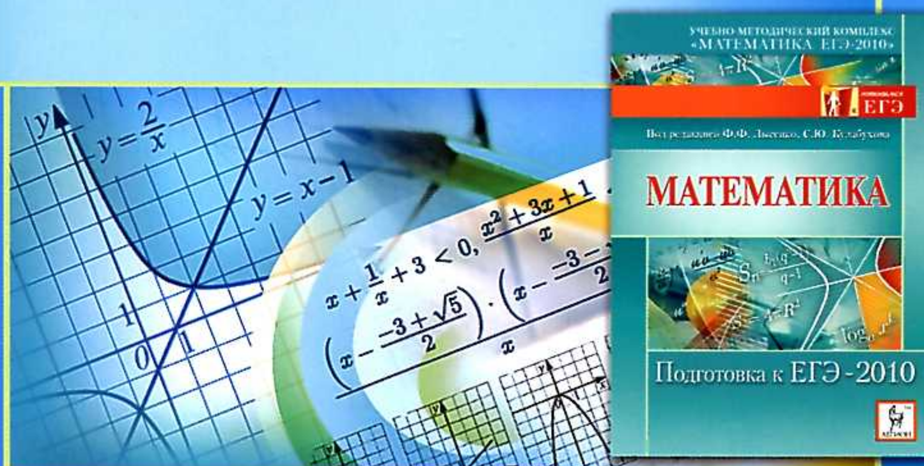
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ЕГЭ-2010»

готовимся к ЕГЭ

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА



Подготовка к ЕГЭ - 2010

УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

ЛЕГИОН

Готовимся к ЕГЭ

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ – 2010
УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

Учебно-методическое пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЛЕГИОН-М»
Ростов-на-Дону
2010

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *О. Б. Кожевников* — к.ф.-м.н., доцент
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель России

Авторский коллектив: **Лысенко Ф. Ф., Кулабухов С. Ю., Авилов Н. И., Ангельев В. Д., Войта Е. А., Горбачев А. В., Дерезин С. В., Евич Л. Н., Иванов С. О., Коннова Е. Г., Неймарк А. Б., Ольховая Л. С., Фофонов А. Е.**

М 34 **Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010. Учебно-тренировочные тесты** / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010. — 144 с. — («Готовимся к ЕГЭ»)

ISBN 978-5-91724-032-9

Это ежегодный сборник тестов, дополняющий изданную в августе 2009 года основную книгу «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010». Он выходит в то время, когда дискуссии на тему «Каким будет ЕГЭ-2010?» окончены и мы имеем полный перечень документов, регламентирующих ЕГЭ по математике в 2010 году (см. список литературы). Сборник составлен в соответствии с упомянутыми документами, что делает его актуальным.

Книга включает 20 авторских учебно-тренировочных тестов, ответы ко всем вариантам, подробное решение одного варианта и краткий теоретический справочник.

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки выпускников общеобразовательных учреждений к ЕГЭ по математике, а также может быть использовано учителями и методистами.

ISBN 978-5-91724-032-9

ББК 22.1

Оглавление

2. Зак. № 508

От авторов

Предлагаемое читателю пособие содержит 20 учебно-тренировочных тестов, составленных в соответствии с планом работы ЕГЭ-2010, с учётом в качестве ориентира демонстрационного варианта и планируемой ФИПИ трудностью заданий. Понятно, что демонстрационный вариант не охватывает весь спектр элементов содержания курса математики, которые могут проверяться на ЕГЭ. Поэтому в предлагаемые тесты мы включили все наиболее важные вопросы и темы плана, отдавая при этом предпочтение наиболее вероятным на ЕГЭ-2010. Прежде всего, значительная часть заданий посвящена отработке тем и идей, содержащихся в спецификации и получивших свое отражение в демонстрационном варианте. Тесты в целом носят «парный» характер, то есть каждый нечетный вариант и следующий за ним четный в какой-то мере подобны. Это удобно для организации работы преподавателей с учащимися в классе и дома.

В книге приведены решения одного варианта тестов. Ко всем вариантам приведены ответы. Отметим, что решения, приведенные в данной книге, не следует рассматривать как некие образцы; в них, скорее всего, просматривается процедура раскрытия ключевой идеи решения. Чтобы получить более ясное представление о степени детализации при записи решений, следует внимательно ознакомиться с оформлением решений демонстрационного варианта (см. сайт ФИПИ: www.fipi.ru [1]).

Для автономной работы с нашим пособием в него включен краткий теоретический справочник, который делает книгу самодостаточной и позволяет не пользоваться дополнительной литературой.

По сравнению с 2009 годом, структура экзаменационной работы существенно изменилась. Работа состоит из двух частей. Часть 1 (базовый уровень) содержит только задания с кратким ответом (B1–B12). Часть 2 (повышенный и высокий уровни) содержит только задания с развернутым ответом (C1–C6).

Основные отличия ЕГЭ по математике 2010 года от ЕГЭ 2009 года:

- количество заданий уменьшено с 26 до 18;

- число частей работы уменьшено до двух — отсутствует часть А (исключены задания с выбором ответа, «что отвечает существующим традициям преподавания математики в российской школе и позволяет качественно проверить усвоение математических знаний умений и навыков на базовом уровне» [3]);

- усилена геометрическая составляющая (3 задачи в части B и 2 — в части C), причём произошло смещение акцента от стереометрии к планиметрии (самая сложная геометрическая задача C4 теперь по планиметрии);
- в часть B включена группа заданий, «выполнение которых свидетельствует о наличии у выпускника общематематических навыков, необходимых человеку в современном обществе» [3];
- в часть C добавлена задача C6, уровень сложности которой примерно соответствует областному этапу Всероссийской математической олимпиады школьников.

В результате этих изменений в ЕГЭ увеличена доля заданий, не требующих для своего решения знаний старшей школы — примерно 8–9 задач части B и 2 задачи части C (C4 и C6) доступны выпускнику 9 класса. Наряду с уменьшением количества задач при неизменном времени экзамена — это большой плюс новой модели. Однако сами задачи стали более нестандартными, часто содержащими некоторую «изюминку», для их решения зачастую достаточно здравого смысла, а не формально усвоенных знаний. Это большой недостаток новой модели ЕГЭ с точки зрения слабого ученика.

В заключение поясним некоторые термины, связанные с единым государственным экзаменом.

Первичный балл — это балл, выставляемый за каждое выполненное задание. Согласно КИМ 2010 года, правильное решение каждого из заданий B1–B12 части 1 экзаменационной работы оценивается 1 баллом. Полное правильное решение каждого из заданий C1 и C2 оценивается 2 баллами, C3 и C4 — 3 баллами, C5 и C6 — 4 баллами. Максимальный балл за выполнение всей работы — 30.

Тестовый балл — это балл, который выставляется ученику в сертификат. Максимальное количество — 100 баллов.

Прежде чем, приступить к решению тестовых заданий, внимательно изучите инструкцию по выполнению работы, помещенную перед первым вариантом теста на стр. 62. Эта инструкция разработана ФИПИ, см. [1, 3].

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам книги за внимательное прочтение рукописи и доброжелательную конструктивную критику. Замечания и пожелания по содержанию этой книги можно сделать по телефону (863) 302-02-32, Лысенко Федор Федорович, Кулабухов Сергей Юрьевич, или прислать по e-mail: legionrus@legionrus.com, legion_r@aaanet.ru.

Краткий теоретический справочник

Предлагаемый справочник содержит основные результаты и формулы, предусмотренные программой 2002 года для общеобразовательных учреждений. В основу отбора материала положен курс B, по которому разрабатывались КИМы 2002–2010 годов. Однако, как при подготовке к ЕГЭ, так и при его сдаче, учащимся понадобятся сведения, которые требуют значительных усилий при их доказательстве, выводе, исследовании. Они не входят в нормативные рамки курса B, но большинство из них включено в курс углубленного изучения математики и отмечено звездочкой (*).

§ 1. Условные обозначения

При изложении теоретического материала, содержащегося в этой главе, мы будем пользоваться следующими общепринятыми математическими обозначениями.

N — множество всех натуральных чисел.
N_0 — множество всех неотрицательных целых чисел.
Z — множество всех целых чисел.
Q — множество всех рациональных чисел.
R — множество всех действительных (вещественных) чисел.
R^+ — множество всех положительных действительных чисел.
$\Rightarrow$ — следует.
$\Leftrightarrow$ — равносильно; эквивалентно; тогда и только тогда.
$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно.
$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.
$E(f)$ — множество (область) значений функции $y = f(x)$.
const — постоянная величина.
$\in$ — принадлежит, содержится; например:
$x \in R$ — x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом.
$n \,\vdots\, m$ (для $n, m \in Z$) — число n делится нацело на число m.

§ 2. Степени и корни

Определение степени и корня

1. Пусть $a \in R, n \in N$. Тогда:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}};$$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}, \text{ если } a \neq 0;$$

$$0^0 \text{ не определено};$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ и } b \geqslant 0 \text{ при } n \text{ четном};$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ при } n \text{ нечетном}.$$

2. Пусть $a \in R^+$; $m \in Z, n \in N, n > 1$. Тогда:

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Правила действий с радикалами

Пусть $m, n, k \in N, m, n > 1;\ a, b \in R^+$. Тогда:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Правила действий со степенями

Пусть $p, q \in Q,\ a, b \in R^+$. Тогда:

$$a^p a^q = a^{p+q}; \qquad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \qquad (ab)^p = a^p b^p.$$

Не приводя определения степени с действительным показателем, отметим, что правила действий с такими степенями «сохраняются», то есть приведенные правила верны и для $p,\ q \in R$.

Формулы сокращенного умножения

Пусть $a, b \in R$. Тогда:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

Таблица квадратов

$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$	$26^2 = 676$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$	$27^2 = 729$
$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$	$28^2 = 784$
$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$	$29^2 = 841$
$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$	$30^2 = 900$

§ 3. Модуль и его свойства

1. Определение модуля числа.

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad |x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до начала отсчета — точки O.

3. $|x - a|$ есть расстояние между точками x и a числовой оси.

4. Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|; \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ y \neq 0; \quad {}^*|x^n| = |x|^n, n \in Z, \left[\begin{array}{l} x \neq 0, \\ n > 0. \end{array}\right.$$

5. $\sqrt{x^2} = |x|$.

§ 4. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_{n+1} = a_n + d,\ a_n = a_1 + d(n-1),$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2*. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$b_{n+1} = b_n q,\ b_1 \neq 0,\ q \neq 0; \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},\ q \neq 1.$$

2*. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

§ 5. Логарифмы

Определение логарифма

Логарифмом данного числа x по данному основанию a называется показатель степени y, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить данное число x. $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$.

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ для } x > 0.$$

2. Логарифм произведения, частного и степени:

$$\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|, xy > 0;$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0;$$
$$\log_a x^k = k \log_a |x|, k \text{ — четное целое.}$$

3. Формула перехода к новому основанию. Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Тогда:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ в частности, } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \text{ при } x \neq 1.$$

Кроме того, $\log_a x \log_b y = \log_a y \log_b x$.

4. Пусть $b > 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, тогда:

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b, p \neq 0;$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_{|a|} b, k \neq 0, k \text{ — четное целое.}$$

5*. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

При решении задач бывает полезна следующая теорема.

Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

§ 6. Тригонометрия

Радианное измерение углов

Определение. Один радиан равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана}.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\varphi^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$
$$^*\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \qquad ^*\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \qquad ^*\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Если $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$, то

$$^{*}\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad ^{*}\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2\cdot\sin\frac{x\pm y}{2}\cdot\cos\frac{x\mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2};$$

$$^{*}\sin x + \cos y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^{*}\sin x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^{*}\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y};$$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а φ определяется из формулы $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а α определяется из формулы $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big);$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big);$$

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\big).$$

Определение обратных тригонометрических функций

$y \overset{\text{def}}{=} \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$.

***Свойства обратных тригонометрических функций**

$D(\arcsin x) = [-1; 1]$; $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$D(\arccos x) = [-1; 1]$; $E(\arccos x) = [0; \pi]$;

$D(\operatorname{arctg} x) = R$; $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$D(\operatorname{arcctg} x) = R$; $E(\operatorname{arcctg} x) = \Big(0; \pi\Big)$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $x \in [-1; 1]$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

$\sin(\arcsin x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arcsin(\sin x) = x_0$, где $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x_0 = \sin x$;

$\cos(\arccos x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arccos(\cos x) = x_0$, где $x_0 \in [0; \pi]$ и $\cos x_0 = \cos x$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x_0$, где $x_0 = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x_0$, где $x_0 \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} x_0 = \operatorname{ctg} x$.

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$; $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$;

$\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$;

$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{arctg}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a;\quad |a| \leqslant 1; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = 0;\quad x = \pi k; k \in Z;$

$\sin x = 1;\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = a;\quad |a| \leqslant 1;\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\cos x = 0;\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z;$

$\cos x = 1;\quad x = 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = -1;\quad x = \pi + 2\pi k; k \in Z;$

$\mathrm{tg}\, x = a;\quad x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n; n \in Z;$

$\mathrm{ctg}\, x = a;\quad x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n; n \in Z.$

§ 7. Многочлены и их корни

Определение многочлена

Многочленом степени n ($n \in N_0$) называется всякое выражение вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ и $a_n \neq 0$.

Всякое вещественное число, отличное от нуля, принято трактовать как многочлен нулевой степени. Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n — старший коэффициент, a_0 — свободный член.

Число x_0 называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Квадратный трёхчлен

Квадратный трехчлен — это многочлен степени 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если x_1, x_2 — корни $f(x)$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \textbf{(Теорема Виета)}.$$

Если второй коэффициент делится на 2, то есть

$f(x) = ax^2 + 2kx + c$, то $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Если старший коэффициент равен 1, то есть $f(x) = x^2 + px + q$,

то $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом соответствующего многочлена $f(x)$ (уравнения $f(x) = 0$). Дискриминант принято обозначать большой буквой D. Отметим, что $D = 0 \Leftrightarrow k^2 - ac = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$.

***Теорема Безу и схема Горнера**

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдется такой многочлен степени $n - 1$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

что справедливо равенство:

$$f(x) = (x - x_0)\, q(x) + f(x_0) \quad \textbf{(Теорема Безу)},$$

причем коэффициенты $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1},$$
$$b_{n-3} = x_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \ldots, \; b_{i-1} = x_0 b_i + a_i, \ldots$$
$$\ldots, \; b_1 = x_0 b_2 + a_2, \; b_0 = x_0 b_1 + a_1, \; f(x_0) = x_0 b_0 + a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу **(схему Горнера)**.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{i+1}	a_i	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_i	b_{i-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) \quad \textbf{(следствие из теоремы Безу).}$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 — не корень $f(x)$.

Приведём еще одну теорему о многочленах и следствие из нее, касающееся рациональных корней многочлена.

Теорема. Пусть $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) p/q является корнем многочлена $f(x)$, то:

1) $a_n \,\vdots\, q$;

2) $a_0 \,\vdots\, p$.

Следствие. Пусть $f(x) = x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми и являются делителями свободного члена a_0.

Эти теоремы являются очень полезными при выполнении некоторых заданий части B и части C, их использование существенно экономит время решения.

Пример 1. Найти целые корни уравнения $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение. По следствию целые корни находятся среди делителей свободного члена: ± 1; ± 2. Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	3	1	−3	−2	
1	1	4	5	2	0	корень
1	1	5	10	12		не корень (не кратный корень)
−1	1	3	2	0		корень
−1	1	2	0			корень (кратности 2)

$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$.

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; −1; −2, причем −1 — корень кратности 2.

Пример 2. Решить уравнение $6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = 0$.

Решение. По теореме все рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 \vdots q$, $3 \vdots p$.

Делители 3: ±1; ±3.

Делители 6: ±1; ±2; ±3; ±6.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ±1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{6}$; ±3; $\pm\frac{3}{2}$.

Видим, что корнями могут быть лишь отрицательные числа. Поэтому проверяем числа: -1; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; -3; $-\frac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
-1	6	11	9	5	-2	не корень
$-\frac{1}{2}$	6	14	13	$\frac{15}{2}$		не корень
$-\frac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x + \frac{1}{3}\right)(6x^3 + 15x^2 + 15x + 9) = 0$.

$x_1 = -\frac{1}{3}$; $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$.

Делители 3: ±1; ±3.

Делители 2: ±1; ±2.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ±1; $\pm\frac{1}{2}$; ±3; $\pm\frac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причем -1 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше).

Проверяем числа -3; $-\frac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
-3	2	-1	8	-21	не корень
$-\frac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+2x+2)=0$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x^2+x+1=0$ — корней нет.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

§ 8. Уравнения

Уравнения с одним неизвестным

Напомним, что в соответствии с [1], *уравнением* называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что *уравнение* (с одним неизвестным) — это пара функций от одной и той же переменной x, соединенных знаком равенства:

$$f(x)=g(x).$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функции $f(x)$ и $g(x)$:

$$D(f)\cap D(g).$$

Число a называется *корнем (или решением)* данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения x числа a уравнение обращается в верное числовое равенство: $f(a)=g(a)$.

Существуют эквивалентные определения корня уравнения в которых требуют принадлежность числа a ОДЗ исходного уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет. Отметим, что если мы нашли подбором какие-то корни уравнения и доказали, что других корней у данного уравнения быть не может, то тем самым мы уравнение решили.

Два уравнения называются *равносильными,* если множества их корней совпадают. Уравнение A является *следствием* уравнения B, если все корни уравнения B являются корнями уравнения A (но, быть может, среди корней уравнения A есть такие, которые не являются корнями B).

Преобразование уравнения называется *равносильным,* если преобразуемое уравнение равносильно исходному.

1. Если при решении уравнения вы производили лишь равносильные преобразования, то для найденных корней нет нужды делать проверку.

2. Если вы нашли ОДЗ и в пределах ОДЗ производили равносильные преобразования уравнения, то проверку также делать не нужно, но необходимо выяснить, входят ли найденные корни в ОДЗ.

3. Если не все преобразования были равносильными, но каждое уравнение было следствием предыдущего, то необходимо сделать проверку.

Отметим, что очень часто находить ОДЗ нецелесообразно, если экономнее (по времени) найти «корни» (среди которых, быть может, есть лишние) и сделать проверку.

Все сказанное в отношении проверки справедливо с чисто математической точки зрения. То есть, если все ваши преобразования были равносильны, то приводить в конце решения проверку нет необходимости. И в этом случае (при наличии соответствующей оговорки) ваше решение будет смотреться более грамотным с точки зрения математики.

Но совсем иное дело, если речь идёт о самоконтроле. Здесь мы рекомендуем делать в некоторых случаях не одну, а несколько проверок.

*Полезные неравенства

Отметим, что при решении уравнений (и неравенств) иногда бывают полезны следующие неравенства, истинные для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$:

$$a \leqslant \frac{a^2+1}{2}; \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}; \quad \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

Равенства достигаются при $a = b$ (в первом случае при $a = 1$).

Полезны также некоторые их следствия;

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \text{ при } a > 0; \quad a + \frac{1}{a} \leqslant -2 \text{ при } a < 0.$$

Равенства достигаются при $a = 1$ в первом случае и при $a = -1$ — во втором .

Системы уравнений с двумя неизвестными

***Уравнением с двумя неизвестными** x **и** y* называется пара функций от двух переменных (x и y), соединённых знаком равенства:

$$f(x, y) = g(x, y).$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0), подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ h(x, y) = t(x, y). \end{cases}$$

Решением системы называется всякая пара чисел (x_0, y_0), являющаяся решением и первого, и второго уравнения системы.

Решить систему — это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда:
$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0. \end{cases}$$

3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ или $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

§ 9. Неравенства

Неравенства и системы неравенств

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединённая одним из знаков: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, $\neq$.

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

Решить неравенство (систему неравенств) значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются *равносильными*, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ). Нахождение ОДЗ не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями. В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. ОДЗ в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают.

2. Находят ОДЗ. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в ОДЗ.

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств (систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись вида: $\left[\begin{array}{l} f(x)\geqslant g(x), \\ h(x)<u(x). \end{array}\right.$

Эту запись будем называть *объединением* неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида 1) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или вида 2) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Поскольку $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x) > 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(x)\cdot Q(x) \geqslant 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{array}\right.$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

Пример. Решите неравенство: $\frac{x^2-7x+10}{x-3} + \frac{6x-9}{x+1} \leqslant 1.$

Решение. $\frac{x^2-7x+10}{x-3} + \frac{6x-9}{x+1} - 1 \leqslant 0,$

$$\frac{(x^2-7x+10)(x+1)+(6x-9)(x-3)-(x-3)\cdot(x+1)}{(x-3)(x+1)} \leqslant 0,$$

$\dfrac{x^3-x^2-22x+40}{(x-3)\cdot(x+1)} \leqslant 0$. Числитель последней дроби разложим на множители. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем многочлена $x^3-x^2-22x+40$; деля данный многочлен (уголком или по схеме Горнера) на $x-2$, получаем: $x^3-x^2-22x+40 = (x-2)\cdot(x^2+x-20) = (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)$. Значит, исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x+1) \leqslant 0, \\ (x-3)\cdot(x+1) \neq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы методом интервалов (см. рис. 1) и выкалывая точки $x = -1$, $x = 3$, получаем ответ:

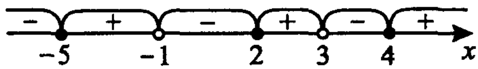


Рис. 1

$x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 2] \cup (3; 4]$.

§ 10. Функции

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, рассматривается функция $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. В данном случае $D(y) = [0;\ \pi]$, так как данной фразой функция $y = \sin x$ определена лишь на отрезке $[0;\ \pi]$. Если же рассматривается функция $y = \sin x$ без каких-либо оговорок, то это означает, что $D(y) = R$. В этом случае говорят также, что функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой. С другой стороны, пусть рассматривается функция $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$. В данной фразе также нет каких-либо оговорок относительно того, на каком числовом промежутке рассматривается функция. Вместе с тем мы видим, что эта функция не определена для $x < 1$, так как при $x < 1$ под корнем будет отрицательное число. Эта функция также не определена при $x = \pm 2$, так как при $x = \pm 2$ знаменатель обращается в нуль. Таким образом, для данной функции: $D(y) = [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Напомним области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R.

$D\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$ $D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;\ +\infty).$

$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R.$ $D\left(\log_a x\right)=(0;\ +\infty).$

$D(\sin x)=D(\cos x)=R.$ $D\left(a^x\right)=R.$

$^*D(\arcsin x)=D(\arccos x)=[-1;\ 1].$

$^*D(\operatorname{arctg} x)=D(\operatorname{arcctg} x)=R.$

$D(\operatorname{tg} x)=\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right),\ k\in Z.$

Или: $D(\operatorname{tg} x):\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$

$D(\operatorname{ctg} x)=(2\pi k;\pi+2\pi k)\cup(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k),\quad k\in Z.$

Или: $D(\operatorname{ctg} x):\ x\neq\pi k,\quad k\in Z.$

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ *функции* $y=f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдется число x_0 такое, что: $f(x_0)=y_0$.

Напомним области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m;\ +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $[-\infty;\ n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R.

$E\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$ $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;\ +\infty).$

$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R.$ $E\left(a^x\right)=(0;\ +\infty).$

$E\left(\log_a x\right)=R.$ $E(\sin x)=E(\cos x)=[-1;\ 1].$

$^*E(\arcsin x)=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right].$ $^*E(\arccos x)=[0;\ \pi].$

$E(\operatorname{tg} x)=E(\operatorname{ctg} x)=R.$ $^*E(\operatorname{arctg} x)=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right).$

$^*E(\operatorname{arcctg} x)=(0;\ \pi).$

Отметим, что задания на нахождение множества значений какой-то функции решаются преимущественно двумя методами: аналитическим и алгебраическим.

Приведем одно *замечание*. Предположим, что функция $f(x)$ является сложной функцией, в которой можно выделить «подфункцию» $t = t(x)$. Тогда $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$. Отметим, что неважно, какой является функция $t = t(x)$ (возрастающей, возрастающе-убывающей и т. д.). Если нам известна её область значений $E(t)$, то при нахождении области значений функции $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$ целесообразно считать, что t возрастает на $E(t)$ как какой-то новый аргумент. В соответствии с этим функцию $y = f(t)$ целесообразно считать такой, каковой она является от аргумента t на промежутке $E(t)$. Например, пусть нам дана функция $y = 2\cos x + 1$. Вводим новую переменную $t(x) = \cos x$. Понятно, что $E(t) = [-1;\ 1]$. Тогда функцию $y(t) = 2t + 1$ целесообразно считать линейной на промежутке $[-1;\ 1]$. Это никак не повлияет на нахождение $E(y)$, но, напротив, облегчит нам эту процедуру. Находим $E(y)$. Функция $y(t) = 2t + 1$ на промежутке $[-1;\ 1]$ является линейной и возрастающей, потому $E(y) = [2(-1) + 1;\ 2 \cdot 1 + 1] = [-1;\ 3]$.

При решении задач аналитическим методом будем пользоваться следующими фактами.

1. Пусть $f(x)$ — какая-то функция и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, где a — какое-то число или $a = +\infty$, или $a = -\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, причём при значениях x, достаточно близких к a, величина $\dfrac{1}{f(x)}$ будет достаточно близкой к нулю, но вместе с тем больше нуля. В этом случае мы будем говорить, что величина $\dfrac{1}{f(x)}$ стремится к нулю справа при x, стремящемся к a: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +0$. В этом смысле будем употреблять запись $\dfrac{1}{+\infty} = +0$.

2. В аналогичном смысле будем употреблять также запись вида: $\dfrac{1}{-\infty} = -0$.

3. Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, причём при всех x, достаточно близких к a, функция $f(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$. Этот факт мы будем записывать иногда в виде: $\dfrac{1}{+0} = +\infty$.

4. В подобном же смысле мы будем употреблять запись: $\dfrac{1}{-0} = -\infty$.

5. Ниже мы приводим записи, которые будем в дальнейшем использовать, но понимать эти записи следует не в буквальном смысле. Фактический смысл этих записей вам предлагается привести самим.

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ +0 \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} +0 \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\log_a(+0) = \begin{cases} -\infty \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \qquad \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ -\infty \text{ при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 2 – 7 изображены графики основных элементарных функций.

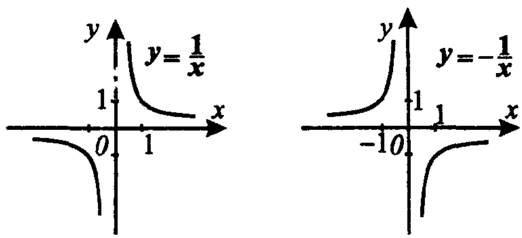


Рис. 2

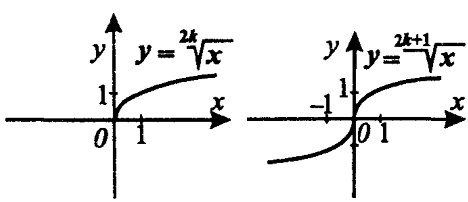


Рис. 3

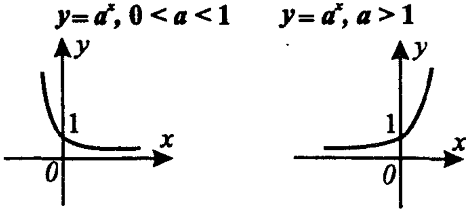


Рис. 4

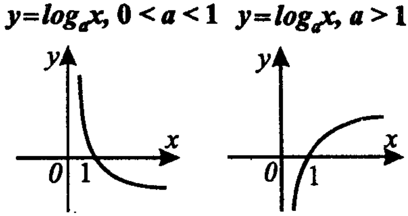


Рис. 5

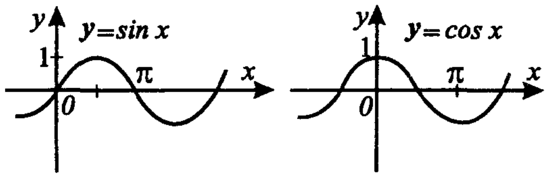


Рис. 6

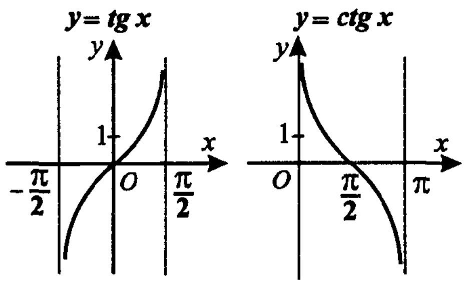


Рис. 7

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox, см. рис. 8.

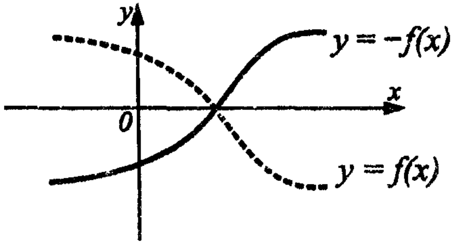


Рис. 8

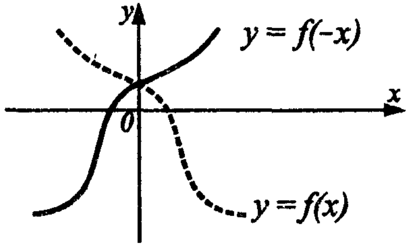


Рис. 9

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy, см. рис. 9.

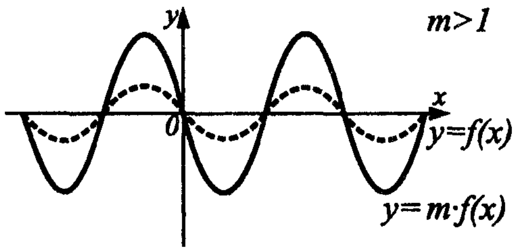


Рис. 10

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox, см. рис. 10.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\dfrac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox, см. рис. 11.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox, см. рис. 12.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$, получен из графика функции

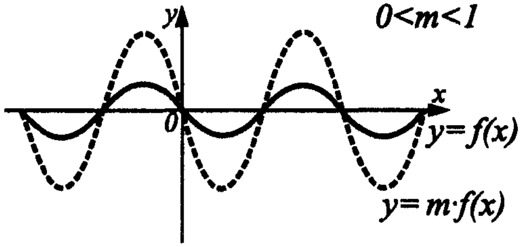


Рис. 11

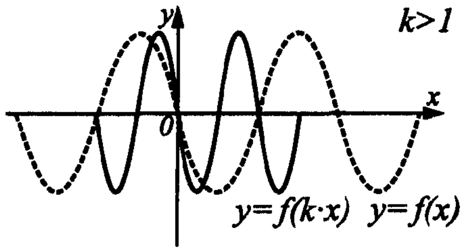


Рис. 12

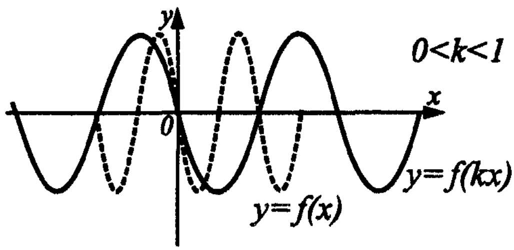


Рис. 13

$y = f(x)$ растяжением в $\dfrac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox, см. рис. 13.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$, см. рис. 14.

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$, см. рис. 15.

График функции $y = |f(x)|$ (рис. 17) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 16) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox.

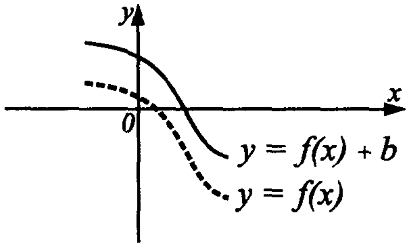


Рис. 14

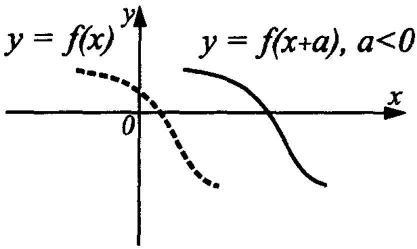


Рис. 15

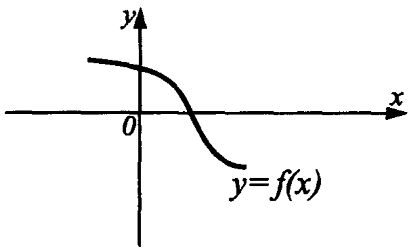


Рис. 16

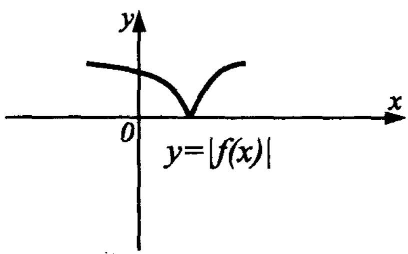


Рис. 17

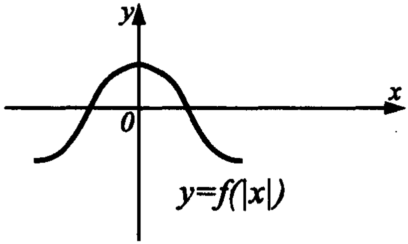


Рис. 18

График функции $y = f(|x|)$ (рис. 18) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 16) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy.

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности (интервале, содержащем точку x). Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

$(c)' = 0$ $(c$ — const); $\quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ $(\alpha$ — const);

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

$(\sin x)' = \cos x$; $\quad (\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$; $\quad (e^x)' = e^x$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$^*(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $^*(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$^*(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $^*(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Основные правила дифференцирования

$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, c — const; $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

$y = f\big(g(x)\big)$, $y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x)$, где $u = g(x)$.

Отметим, что справедливо следующее свойство:

если функция $f(x)$ чётна (нечётна) и дифференцируема на всей области определения, то функция $f'(x)$ является нечётной (чётной).

Геометрический смысл производной

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной

Пусть $S = S(t)$ — уравнение зависимости пути от времени при движении какого-то тела. Тогда $S'(t)$ — скорость движения этого тела в момент времени t. $S''(t)$ — ускорение движущегося тела в момент времени t.

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ *возрастает (убывает)* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\big(f(x_1) > f(x_2)\big)$.

Замечание. Если функция возрастает (убывает) на двух промежутках, из этого ещё не следует, что она возрастает (убывает) на объединении этих промежутков. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но она не является убывающей на области определения.

Если на каком-то промежутке функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и дифференцируема на этом промежутке, то $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$, причём равенство нулю не может быть на промежутке ненулевой длины.

Верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в частном случае. Именно, если на каком-то промежутке $f'(x) \geqslant 0$ $\left(f'(x) \leqslant 0\right)$, причём равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек этого промежутка, то функция $y = f(x)$ на этом промежутке возрастает (убывает). Отсюда следует, что если производная в точке x_0 меняет знак с «$+$» на «$-$» (с «$-$» на «$+$»), то функция $y = f(x)$ в этой точке меняет возрастание на убывание (убывание на возрастание). А это значит, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум).

Предлагаем доказать самостоятельно, что для сложной функции $f\big(g(x)\big)$ двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива данная ниже табличка, в которой «$+$» означает возрастание функции, а «$-$» — убывание.

$f(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f\big(g(x)\big)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Наибольшее, наименьшее значения функции

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется ***наибольшим (наименьшим)*** значением этой функции, если для любого x из $D(f)$ выполняется неравенство:

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \big(f(x_0) \leqslant f(x)\big).$$

Справедлива следующая теорема.

Дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из стационарных точек на интервале $(a; b)$.

В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Механический смысл производной

Пусть $S = S(t)$ — уравнение зависимости пути от времени при движении какого-то тела. Тогда $S'(t)$ — скорость движения этого тела в момент времени t. $S''(t)$ — ускорение движущегося тела в момент времени t.

Применение свойств функций при решении уравнений

Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$.

1. Пусть на ОДЗ уравнения функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает. Тогда уравнение не может иметь более одного корня.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и выполняются неравенства $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. Тогда уравнение имеет по крайней мере один корень на интервале $(a; b)$.

3. Зак. № 508

3. Пусть число A является наибольшим значением функции $f(x)$ и наименьшим значением функции $g(x)$. Тогда исходное уравнение равносильно на ОДЗ системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на некотором числовом промежутке A. Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на промежутке A.

Отметим, что две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную. И обратно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то для любого c (c — const) функция $F(x) + c$ тоже первообразная для функции $f(x)$.

Приведем таблицу первообразных для основных элементарных функций. Буквой c везде обозначается произвольная постоянная.

$F(x^\alpha) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ (\alpha \neq -1).$ $\quad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln|x| + c.$

$F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln x + c,\ \ x > 0.$ $\quad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(-x) + c,\ \ x < 0.$

$F(\sin x) = -\cos x + c.$ $\quad F(\cos x) = \sin x + c.$

$F\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{tg} x + c.$ $\quad F\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg} x + c.$

$F(a^x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c.$ $\quad F(e^x) = e^x + c.$

$^*F\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + c.$ $\quad ^*F\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c.$

Применение первообразной

Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a;\ b]$, причём на этом отрезке $f(x) \geqslant 0$. Обозначим через S площадь фигуры (криволинейной трапеции), ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Тогда: $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$.

§ 11. Планиметрия

Параллельные прямые

Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом: внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют 180°.

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.
3. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.
4. Сумма внешних углов n-угольника равна 360°.
5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.
6. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.
7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.
3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.
4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.
2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.
3. Против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона.
4. Против большей стороны треугольника лежит бóльший угол.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.
6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то

   1) перпендикуляр короче наклонных;

   2) большей наклонной соответствует бóльшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна ее половине.

Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружности соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведенная к стороне c, то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. **Обобщённая теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Элементы равностороннего треугольника. Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a. Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольник

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма.

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника.

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба.

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.
3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции.

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.

3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.

3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник.

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда:

$$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \cdot r_n; \quad r_n = R_n \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удаленных от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же положительное расстояние.

Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности. Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая a, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

6. Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

Свойства хорд окружности

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E, равны, то есть $|AE| \cdot |EB| = |CE| \cdot |ED|$.

Вписанные и описанные окружности

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.

2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника — середина гипотенузы.

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё

1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

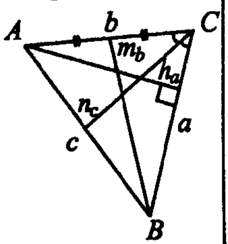
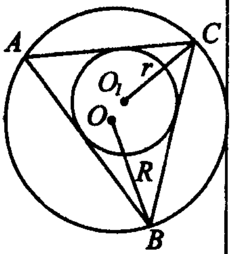
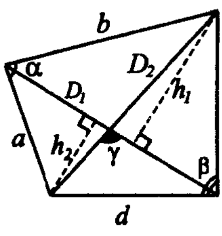
2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

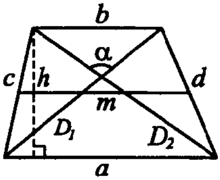
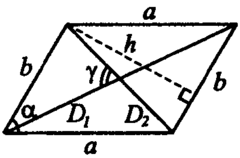
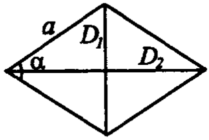
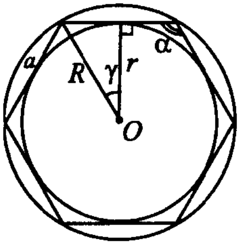
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

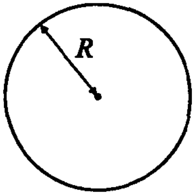
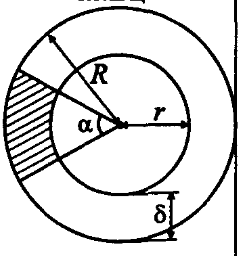
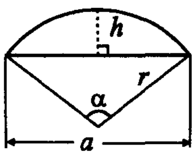
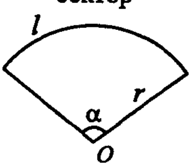
Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник  	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведенные к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведенные к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведенные к соответствующим сторонам; $\mu = \frac{(m_a+m_b+m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.	$h_b = \frac{2S}{b}$ $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $n_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b = \sqrt{ac - b_a b_c}$ $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C$ $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$ $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ $S = r^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ $S = pr = \frac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \frac{4}{3}\sqrt{\mu\cdot(\mu-m_a)(\mu-m_b)(\mu-m_c)}$
Четырёхугольник 	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.	$S = \frac{h_1+h_2}{2}D_1$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2\sin\gamma$ $S = \frac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta)$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Трапеция 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \frac{1}{2}(a+b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\alpha$
Параллелограмм 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.	$S = bh$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\gamma$
Ромб 	a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2 \sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2$
Правильный многоугольник 	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180° - 2\gamma$ — угол многоугольника $\left(\gamma = \frac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR\sin\gamma = 2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma$ $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2\sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг 	R — радиус; l — длина окружности.	$S=\pi R^2$ $l=2\pi R$
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho=\dfrac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta=R-r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S=\pi(R^2-r^2)$ $S=\dfrac{\pi}{4}(D^2-d^2)$ $S=2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца $S=\dfrac{\pi\alpha}{360}(R^2-r^2)$ $S=\dfrac{\pi\alpha}{90}(D^2-d^2)$ $S=\dfrac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$
Круговой сегмент 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l=\dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P=l+a$ $S=\dfrac{1}{2}r^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)$ $S=\dfrac{r(l-a)+ah}{2}$
Круговой сектор 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l=\dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.	$P=l+2r$ $S=\dfrac{lr}{2}$ $S=\dfrac{\pi r^2\alpha}{360}$

§ 12. Стереометрия

Аксиомы стереометрии

Основные аксиомы

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.

2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α.

2. Если через прямую a, параллельную плоскости α, провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b, то прямые a и b параллельны.

3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a, пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b.

4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то плоскость α параллельна плоскости γ.

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.

2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M.

5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

Параллельное проектирование

1. Прямая, непараллельная проектирующей, переходит в прямую.

2. Пара параллельных прямых, непараллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

2. Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

5. Если M — середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

6. Если M — середина AB, а N — середина CD, то $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

7. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

8. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

10. **Свойства скалярного произведения векторов:**

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

б) $\alpha \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$;

е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

ж) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

11. **Расстояние между точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

12. **Угол между ненулевыми векторами.** Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

13. **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет вид:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

14. **Параметрические уравнения прямой,** проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид:

$$\begin{cases} x - x_0 = at; \\ y - y_0 = bt; \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

15. **Уравнения прямой, проходящей через две точки** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

16. **Прямая как пересечение двух плоскостей** задается системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ и $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

17. **Угол между плоскостями.** Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

18. **Уравнение плоскости «в отрезках».** Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$ $(a, b, c \neq 0)$, то ее уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

19. **Расстояние от точки до плоскости.** Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

1. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8. **Теорема о трех перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует бóльшая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

10. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

11. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

12. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

13. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудаленных от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

Многогранные углы

1. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360°$.

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

5. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Пирамида

Правильная пирамида

1. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D, высотой DM и стороной основания a, а A_1, B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB, то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \frac{AA_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD.

2. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

3. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P, высотой PM и стороной основания a, а A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD, то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP.

5. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Правильный тетраэдр. Пусть a — ребро правильного тетраэдра, а R и r — радиусы описанной и вписанной сфер, V — объём тетраэдра. Тогда:

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Пирамида

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

2. Если все боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые рёбра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3. **Теорема о медианах тетраэдра.** Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

Параллелепипед

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основанию.

2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.

3. **Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда:**

а) диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

4. **Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.** Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника A_1BD и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A.

Площади поверхности многогранников

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объёмы многогранников

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

2. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

3. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

4. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

5. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объем пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

8. Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах соответственно DA, DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

9. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

10. Объём тетраэдра V равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер a и b на расстояние между ними c и на синус угла φ между ними, то есть $V = \frac{1}{6}abc\sin\varphi$.

11. Объём тетраэдра V равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, делённому на их общее ребро a, то есть $V = \frac{2}{3}\frac{PQ\sin\varphi}{a}$.

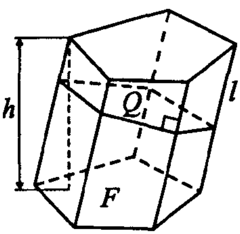
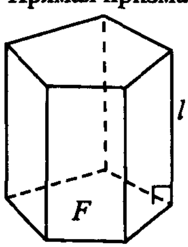
12. А. Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

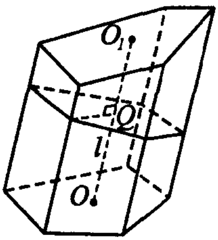
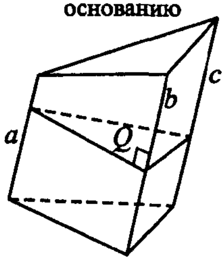
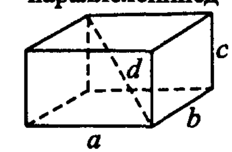
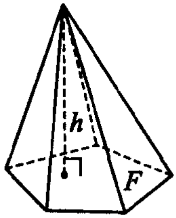
Б. Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

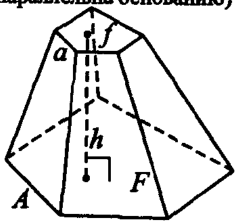
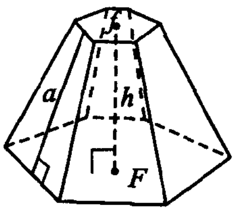
Основные формулы

Далее V — объём тела, $S_б$ и S — его боковая и полная поверхности.

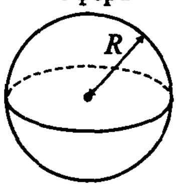
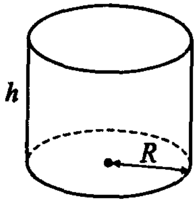
Многогранники

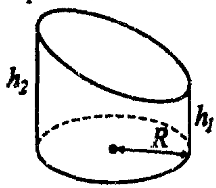
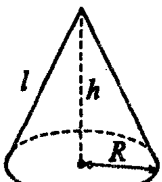
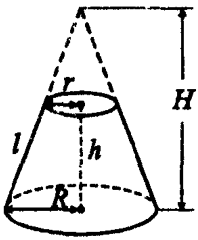
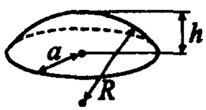
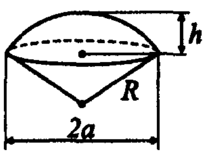
Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма  	F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.	$V = Fh = Ql$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$
Прямая призма  	F и P — площадь и периметр основания; l — боковое ребро.	$V = Fl$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$

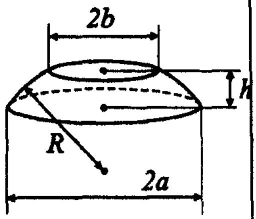
Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма, усечённая непараллельно основанию 	l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO_1.	$V = Ql$
Треугольная призма, усечённая непараллельно основанию 	a, b и c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к рёбрам.	$V = \frac{1}{3}(a+b+c)Q$
Прямоугольный параллелепипед 	a, b и c — рёбра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.	$V = abc$ $S = 2(ab+bc+ac)$
Пирамида 	F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды).	$V = \frac{1}{3}Fh$ Правильная пирамида $S_6 = \frac{1}{2}Pa$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Усечённая пирамида (плоскость сечения параллельна основанию) 	F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $V = \frac{1}{3}hF\left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$
Правильная усечённая пирамида 	F, f — площади оснований; P, p — периметры оснований; h — высота; a — апофема (высота боковой грани).	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_б = \frac{P + p}{2} \cdot a$

Тела вращения

Чертежи	Обозначения	Формулы
Сфера 	R — радиус.	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
Цилиндр 	R — радиус основания; h — высота.	$V = \pi R^2 h$ $S_б = 2\pi Rh$ $S = 2\pi R(h + R)$

Цилиндр, усечённый непараллельно основанию 	R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие.	$V = \frac{1}{2}\pi R^2(h_1 + h_2)$ $S_б = \pi R(h_1 + h_2)$ $S = \pi R\left(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right)$
Конус 	R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образующая.	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $S_б = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ $S_б = \pi Rl$ $S = \pi R(R + l)$
Усечённый конус 	R и r — радиусы оснований; h — высота; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ — образующая; H — высота неусечённого конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$.	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ $S_б = \pi l(R + r)$ $S = \pi(R^2 + r^2 + l(R + r))$
Шаровой сегмент 	h — высота сегмента; R — радиус шара; $a = \sqrt{h(2R - h)}$ — радиус основания сегмента.	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ $S_б = 2\pi Rh$ $S_б = \pi(a^2 + h^2)$ $S = \pi(2a^2 + h^2)$ $S = \pi(a^2 + 2Rh)$
Шаровой сектор 	h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента.	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $S = \pi R(a + 2h)$

Шаровой слой 	h — высота слоя; a и b — радиусы оснований ($a > b$); R — радиус шара.	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2+3b^2+h^2)$ $V = V_1 + \frac{1}{6}\pi h l^2$, где V_1 — объём вписанного в шаровой слой усечённого конуса, радиусы оснований которого a и b, высота h и образующая l. $S_б = 2\pi Rh$ $S = \pi(a^2+b^2+2Rh)$

Учебно-тренировочные тесты

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Вариант №1

Часть 1

B1. Теплоход рассчитан на 840 пассажиров и 26 членов команды. Спасательная шлюпка может вместить 72 человека. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

B2. Владимир Николаевич купил 100 унций золота в 2000 году (см. рис. 19). Сколько лет он должен был ждать (минимум), чтобы, продав всё золото, получить прибыль не менее 35 тыс. долларов США?

B3. Решите уравнение $\log_3(4 - x) = 4$.

B4. В равнобедренном треугольнике PKM с основанием PM боковая сторона PK равна 13, а $\cos P = \frac{\sqrt{105}}{13}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

B5. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План «0»	Нет	1,2 руб. за 1 Mb
2. План «800»	650 руб. за 800 Mb трафика в месяц	2 руб. за 1 Mb сверх 800 Mb
3. План «Безлимитный»	900 руб. в месяц	Нет

Пользователь планирует, что его трафик составит 950 Mb, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 950 Mb?

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 20). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

B7. Найдите значение выражения $49^{\log_7 4}$.

B8. Прямая $y = 38x - 28$ параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 + 8x - 2$. Найдите абсциссу точки касания.

B9. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt[3]{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

B10. Брандспойт, закреплённый под определённым углом на пожарной машине, выстреливает струю воды с постоянной начальной скоростью.

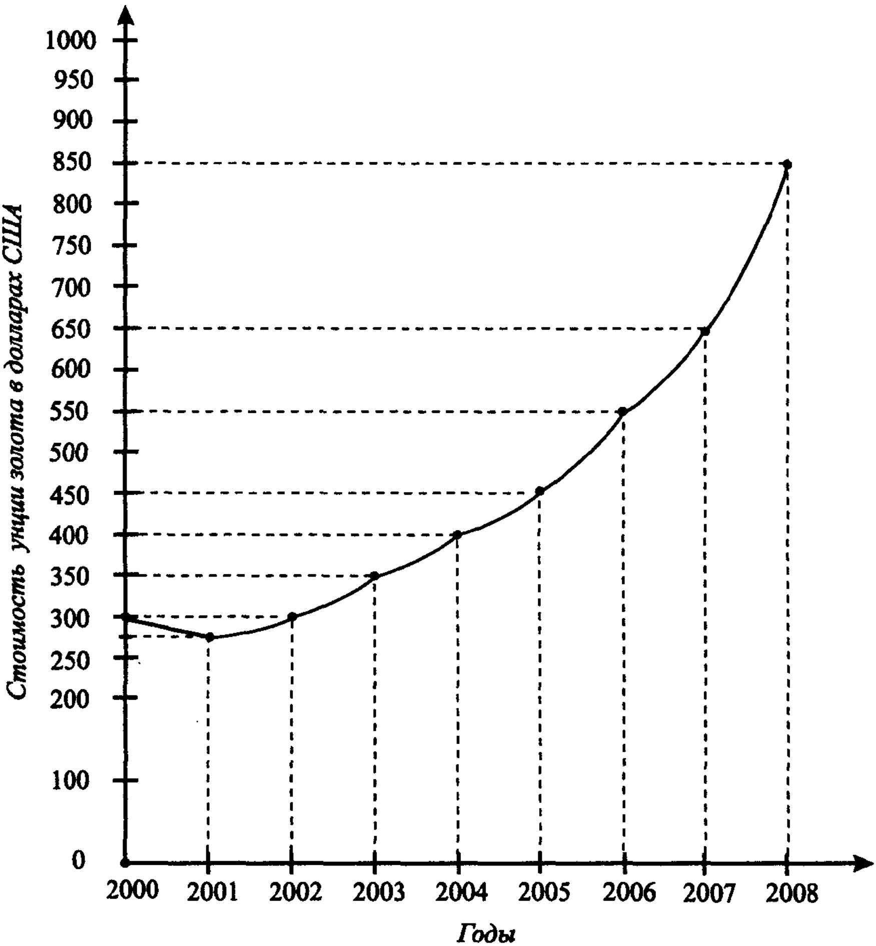


Рис. 19. График цен на золото

Траектория струи воды описывается формулой: $y = ax^2 + bx + c$, где $a = -\frac{1}{450}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 1$ — постоянные параметры. На каком минимальном расстоянии в метрах от забора нужно расположить машину, чтобы вода перелетала через его верх? Высота забора — 13 м.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+3)e^{x+2}$ на отрезке $[-5; -3]$.

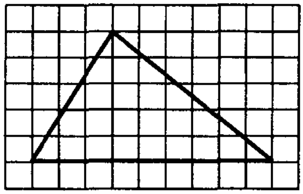


Рис. 20

B12. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 30 км/ч, а вторую половину пути со скоростью на 20 км/ч больше скорости первого. В результате они прибыли в пункт B одновременно. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} (5x^2+6x-1)^2+3(5x^2+6x-1)+2 \geqslant 0, \\ \sqrt{2x+1} > -1. \end{cases}$$

C2. В прямоугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение через вершину A и середины рёбер BB_1 и B_1C_1. Сечение разделило призму на 2 части. Найдите объём меньшей из них, если высота призмы 10, а площадь $\triangle ABC$ равна 36.

C3. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек координатной плоскости, координаты которых $(x; y)$ являются решениями системы
$$\begin{cases} |x-y|+|x| \geqslant 6, \\ x^2+y^2 \leqslant 6x+7. \end{cases}$$

C4. В четырёхугольнике $ABMD$ $\angle MCB = 360° - \angle M - \angle B - \angle A$, где C — точка на стороне MD. $\angle ADB$ в 2 раза меньше угла ACB. Известно, что $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найдите площадь $ABCD$.

C5. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнение $x^3 - 5x^2 + 7x = a$ имеет ровно 2 различных корня, которые будут являться корнями уравнения $x^3 - 13x + b = 0$.

C6. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причём m и n взаимно просты и $m > n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 клеток прямоугольника. Найдите все возможные значения m и n.

Вариант №2

Часть 1

B1. Флакон шампуня стоит 180 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей, когда скидка составляет 30%?

B2. Бизнесмен приобрёл несколько унций золота в 2002 году (см. рис. 21), а продал их в 2008 году. В результате этих операций его прибыль составила 3850 долларов США. Сколько унций золота у него было?

B3. Решите уравнение $\log_{11}(3x + 6) = \log_{11} 12$.

B4. В равнобедренном треугольнике PKM с основанием PM боковая сторона MK равна 20, а высота, проведённая к основанию, равна 16. Найдите $\cos\angle P$.

B5. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План «0»	Нет	1,1 руб. за 1 Mb
2. План «800»	650 руб. за 800 Mb трафика в месяц	2 руб. за 1 Mb сверх 800 Mb
3. План «Безлимитный»	900 руб. в месяц	Нет

Пользователь планирует, что его трафик составит 950 Mb, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик окажется равен 700 Mb?

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 22). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

B7. Найдите значение выражения $9^{\log_3 \sqrt{17}}$.

B8. Прямая $y = 4x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

B9. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Объём параллелепипеда равен 24. Найдите высоту цилиндра.

B10. Брандспойт, закреплённый под определённым углом на пожарной машине, выстреливает струю воды с постоянной начальной скоростью. Траектория струи воды описывается формулой: $y = ax^2 + bx + c$, где $a = -\frac{1}{450}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 2$ — постоянные параметры. На каком максималь-

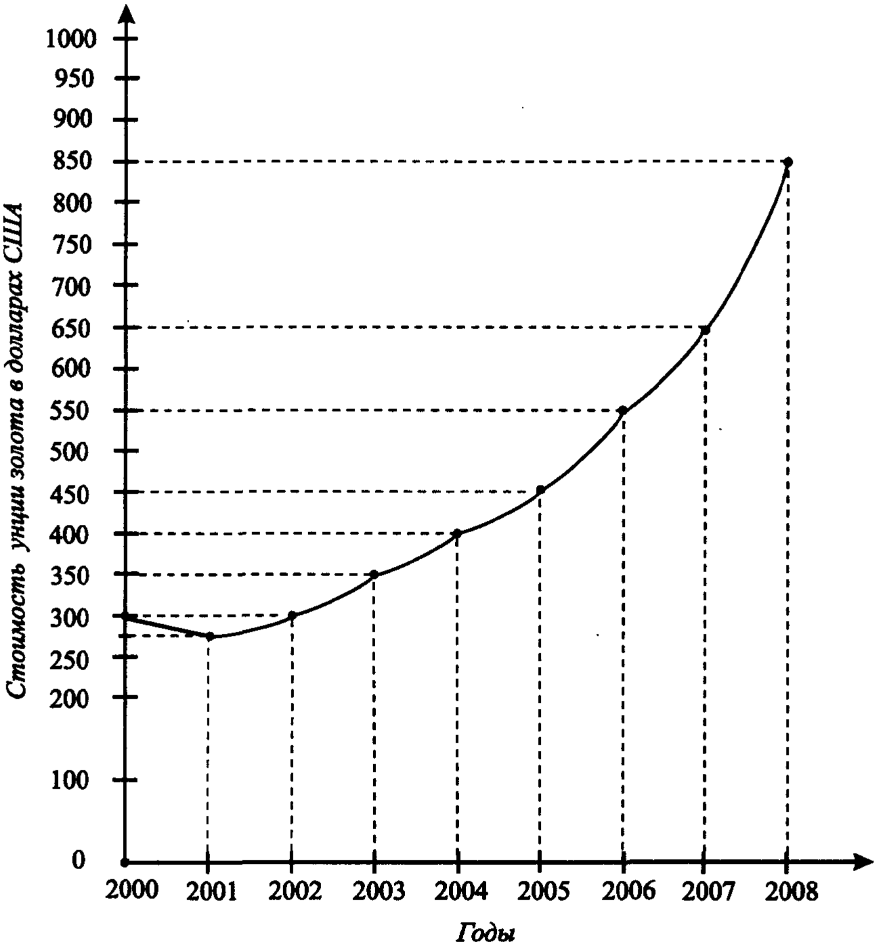


Рис. 21. График цен на золото

ном расстоянии в метрах от забора нужно расположить машину, чтобы вода перелетала через его верх? Высота забора — 14 м.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sin x + \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

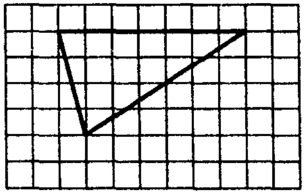


Рис. 22

B12. Из пункта A в пункт B выехали одновременно два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал $\frac{3}{4}$ пути со скоростью на 12 км/ч больше скорости первого, а оставшуюся часть пути со скоростью 40 км/ч, в результате чего, они прибыли в пункт B одновременно. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \sqrt{x+2{,}1} \geqslant 0, \\ (3x^2+7x+4)^2 - 6(3x^2+7x+4) + 8 < 0. \end{cases}$$

C2. Через вершины M и P треугольной пирамиды $AMPK$ провели сферу, пересекающую рёбра MA и PA в точках C и D соответственно. Через точки P и D провели вторую сферу, пересекающую ребро AK в точках L и Q, при этом $LQ = \frac{1}{3}AK$. Найдите отношение $QK : AK$ $(QK < LK)$, если $AK = \frac{3}{2}AM$, C — середина AM.

C3. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек координатной плоскости, координаты которых $(x; y)$ являются решениями системы
$$\begin{cases} (x^2-25)(y+5-|x|) \leqslant 0, \\ x^2+y^2 \leqslant -10y-9. \end{cases}$$

C4. В пятиугольнике $ABCFN$ луч CF пересекает сторону AN в точке D, $F \in BN$. $\angle FDN = 540° - \angle A - \angle B - \angle F - \angle N$, $BC = 3$, $AD = 5$. Расстояние от C до AN равно 5, $CF = FD$. Точка E лежит на стороне BC, $EC = 1$. M — точка пересечения BN и AE. Найдите площадь $AMFD$.

C5. Найдите все значения параметров p и k, при которых уравнение $x^3 - 2x^2 + x + p = 0$ имеет ровно 2 различных корня, которые будут являться корнями уравнения $5x^3 - 7x^2 + k = 0$.

С6. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причём m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 124 клетки прямоугольника. Найдите все возможные значения m и n.

Вариант №3

Часть 1

В1. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 80 рублей за штуку. Торговая наценка составляет 40%. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 900 рублей?

В2. Бизнесмен купил несколько унций золота в 2000 году (см. рис. 23). Три унции он продал в 2004 году, а остальные — в 2007 году. В результате этих операций его прибыль составила 4500 долларов США. Сколько всего унций золота было у бизнесмена в 2000 году?

В3. Решите уравнение $2^{3-2x} = 32$.

В4. В треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = 14$, $AC = \sqrt{147}$. Найдите $\sin \angle A$.

В5. Для изготовления стеклянных столов требуется заказать 42 одинаковых стекла в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,3 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стёкол и шлифовку края. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	415	43,5
Б	465	31,5
В	425	42,5

В6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 дм × 1 дм изображён треугольник (см. рис. 24). Найдите его площадь в квадратных дециметрах.

В7. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 9}{\log_{25} 81}$.

В8. Прямая $y = 21x + 13$ параллельна касательной к графику функции $y = -3x^2 + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

В9. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 3,5. Найдите его объём.

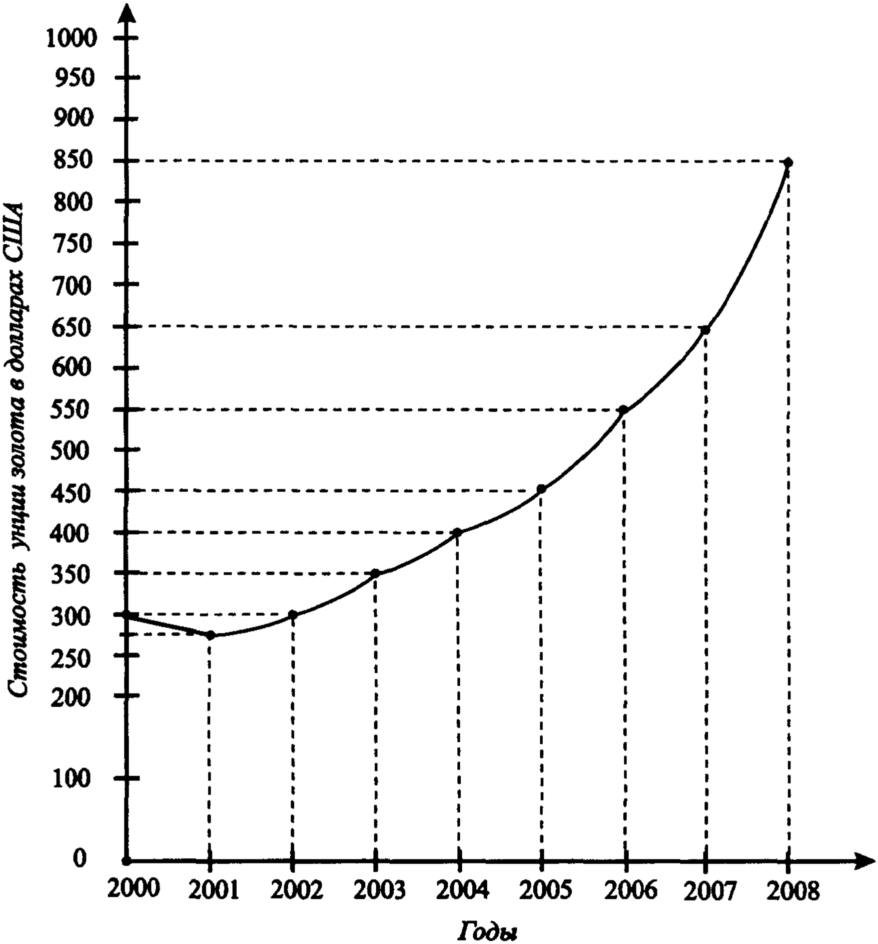


Рис. 23. График цен на золото

B10. Эльфийский мастер Феанор делает уникальные луки со стрелами, которые всегда попадают в нужную цель.

Зависимость количества комплектов «лук — колчан со стрелами» q (единиц в год) от цены комплекта p (рублей) задаётся формулой

$$q = 320 - 16 \cdot p.$$

Определите максимальный уровень цены p (в рублях), при котором значение выручки Феанора за год $r = q \cdot p$ составит не менее 816 рублей.

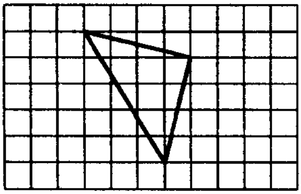


Рис. 24

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = 6 + 2\pi - 8x - 8\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

B12. Турист вышел с постоянной скоростью из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 38,5 км. На следующий день он отправился обратно в пункт A со скоростью на 1,5 км/ч больше прежней. В пути он сделал остановку на полтора часа. В результате турист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость туриста на пути из пункта B в пункт A. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите неравенство $9^{\log_{\frac{1}{2}} x} - 27 \geqslant 2 \cdot 3^{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

C2. Задана призма $ABCDEF$ $(\triangle ABC = \triangle DEF)$. Точки A', B' и C' — проекции точек A, B и C на плоскость DEF. $S_{ABC} = 60$, $V_{ABCDEF} = 420$, $BC = 10$, $AE = 7$, $AB' = AC'$. Найдите DB'.

C3. Найдите количество корней уравнения
$2^{4+x} + 2^{4-x} = 7\ln 2 \cdot (x^2 + 12 \cdot |x|)$.

C4. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ как на диаметре построена окружность, пересекающая AB в точке E. Медиана AD и отрезок CE пересекаются в точке P. Найдите площадь $\triangle ABC$, если $CP = 7$, $PE = 3$.

C5. Число $x = \dfrac{2009\pi}{4}$ является корнем уравнения
$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = (a - 3)(\sin x + \cos x)^2$. Найдите остальные корни.

C6. На доске написано число 2009. Каждый шаг мы стираем все числа с доски и на место каждого числа n пишем 2 числа: $n^3 + 1$ и $3n - 1$. Будет ли шаг, когда все числа на доске станут взаимно просты с 3? Если станут, то на каком шаге?

Вариант №4

Часть 1

B1. В пачке бумаги 500 листов формата А4. За неделю в офисе расходуется 1100 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 9 недель?

B2. Бизнесмен приобрёл 6 унций золота в 2001 году и ещё 5 унций золота в 2002 году (см. рис. 25). Какую прибыль он получит, если продаст все 11 унций в 2007 году?

B3. Решите уравнение $3^{2x-1} = \frac{1}{27}$.

B4. В треугольнике ABC угол C — прямой, $AC = 20$, $\sin\angle A = \frac{\sqrt{33}}{7}$.

Найдите AB.

B5. Для изготовления стеклянных столов требуется заказать 38 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,3 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стёкол и шлифовку края. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	415	47,5
Б	465	35,5
В	425	42,5

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображён треугольник (см. рис. 26). Найдите его площадь, ответ укажите в квадратных дециметрах.

B7. Найдите значение выражения $\log_4 12 \cdot \log_{12} 8$.

B8. Прямая $y = -25x + 1$ параллельна касательной к графику функции $y = -x^2 - 7x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

B9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 27 (все двугранные углы многогранника прямые).

B10. Эльфийский мастер Феанор делает уникальные луки со стрелами, которые всегда попадают в нужную цель.

Зависимость количества комплектов «лук — колчан со стрелами» q (единиц в год) от цены комплекта p (рублей) задаётся формулой

$$q = 276 - 12 \cdot p.$$

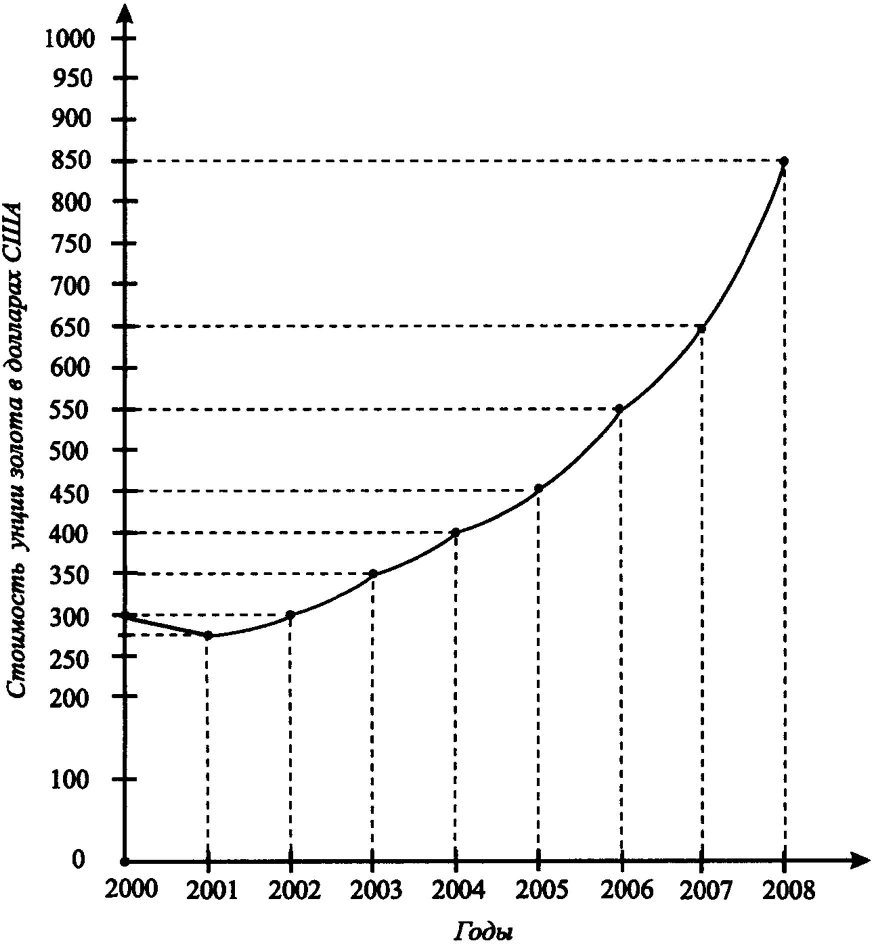


Рис. 25. График цен на золото

Определите максимальный уровень цены p (в рублях), при котором значение выручки Феанора за год $r = q \cdot p$ составит не менее 912 рублей.

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = 3\sin x - \frac{24}{\pi}x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

B12. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 58 км. На следующий день он отпра-

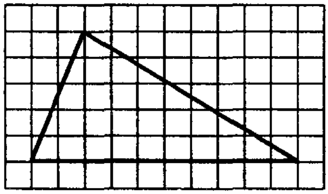


Рис. 26

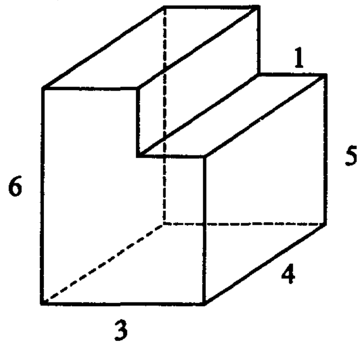


Рис. 27

вился обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 43,5 минуты. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

С1. Решите неравенство $4^{\log_3 x} - 2^{\log_3(9x)} \leqslant 32$.

С2. $ABCDEFGH$ — прямая призма. Основание $ABCD$ — прямоугольная трапеция ($\angle DAB = \angle ABC = 90°$, $\angle ADC$ — острый). Прямые AB и CD пересекаются в точке K, EF и GH — в точке L. На прямой AG отмечена точка P так, что $PKL \parallel EADH$. Известно, что $\frac{AB}{BK} = 2$, $\left(\frac{BD}{AC}\right)^2 = 5$, $AP^2 = \frac{153}{2}$, $S_{AEHD} = 36$. Найдите объём призмы.

С3. Найдите количество корней уравнения $\operatorname{tg} x = 4x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

С4. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 14$. Окружность, касающаяся AD и CD, проходит через точку B, а стороны AB и BC пересекает в точках E и F. Известно, что $AE : EB = 1 : 3$, $BF : FC = 7 : 9$. Найдите BC.

С5. При каких значениях параметра α уравнение $\sin x \cos(\alpha \sin x) = \operatorname{ctg}(\alpha \sin x)$ имеет корни?

С6. На доске написано число 1000. Каждый шаг мы стираем все числа с доски и на место каждого числа n пишем 2 числа: $n^2(n-1)+1$ и n^2-1. Будет ли шаг, когда сумма всех чисел на доске станет делиться на 3? Если станет, то на каком шаге?

Вариант №5

Часть 1

В1. Аня купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 54 поездки. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 700 рублей, а разовая поездка 18 рублей?

В2. По данным, представленным на графике (см. рис. 28), определите, чему была равна максимальная стоимость обучения в частных американских университетах за период с 1967 по 1981 годы. Ответ дайте в тыс. у.е.

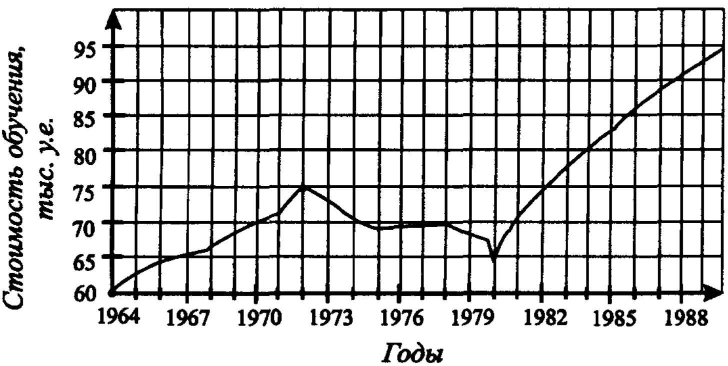


Рис. 28. График стоимости обучения в частных американских университетах

В3. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = \frac{1}{16}$.

B4. В треугольнике DEF угол F — прямой, $EF = 17$, $\sin \angle E = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Найдите DE.

B5. Для изготовления книжного шкафа требуется заказать 230 одинаковых досок в одной из трёх фирм. Площадь каждой доски 0,25 м^2. В таблице приведены цены на доски, а также на обработку краёв и шлифовку поверхности. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость досок (руб. за 1 м^2)	Обработка краёв и шлифовка поверхности (руб. за одну доску)
А	560	25
Б	540	32
В	490	47,5. Бесплатно при сумме заказа больше чем 25000 руб.

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображены два треугольника (см. рис. 29). Найдите, на сколько квадратных сантиметров площадь одного из них больше площади другого.

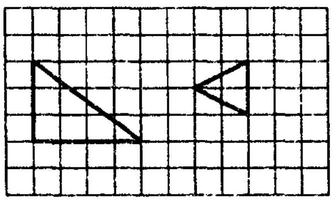


Рис. 29

B7. Найдите значение выражения $28 \log_3 \sqrt[4]{3}$.

B8. Прямая $y = 15x + 94$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 8x^2 - 20x - 200$. Найдите абсциссу точки касания.

B9. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 10 см. На какой высоте (в см) будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же формы сосуд, у которого сторона основания в 5 раз больше, чем у первого?

B10. Кран в днище бочки для летнего душа, уходя, забыли закрыть. Вода вытекает из бочки, пока она не станет пустой.

Высота столба воды в бочке меняется по закону:

$$H(t) = 0{,}25 - 0{,}8 \cdot t + 0{,}64 \cdot t^2,$$

где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бочки?

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 14x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

B12. Два велосипедиста одновременно отправляются в 138-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 0,5 км/ч большей, чем второй, а прибывает к финишу на 30 минут раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите неравенство $\dfrac{5x-4}{x^2-x+1} + \dfrac{x^2+4x-3}{5x-4} \leqslant 3$.

C2. Плоскость, проходящая через вершину конуса S, пересекает основание этого конуса по отрезку AB, равному 3. При этом проведённая плоскость удалена от центра основания конуса на расстояние $\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$, а высота конуса равна $3\sqrt{3}$. Пусть точки A_1, B_1 и S_1 развёртки боковой поверхности конуса соответствуют точкам A, B и S поверхности конуса. Найдите площадь треугольника $S_1A_1B_1$.

C3. Найдите все значения аргумента x, при которых точки графика функции $y = \log_{1,5}(x+2) - \log_x(x+2) + 2$ расположены выше точек графика функции $y = \dfrac{2}{\log_x 3 - \log_x 2}$ на координатной плоскости xOy.

C4. Дана трапеция $KLMN$ с основанием KN и диагоналями LN и KM. Известно, что $\angle MKN = 2\angle LNK$, $KM = 9$ и $LN = 12$. Найдите площадь трапеции $KLMN$.

C5. Найдите все целые значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos^2 x + \frac{a-1}{3}\cos^3 x + (6a^2 - 6a - 1)\cdot 2^{-6}\cdot\cos^2 x = \cos^2 x \sin^2 x - 3a\cdot 2^{-16}$$

имеет ровно четыре различных действительных корня на отрезке $[0; \pi]$.

C6. Даны натуральные числа n и m, причём $m \leqslant 14$. В десятичной записи дроби $\dfrac{n}{m}$ после запятой на некотором месте оказываются последовательно цифры 1; 5; 3. Найдите все возможные значения m.

Вариант №6

Часть 1

В1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 780 рублей. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 19 школьников и 4 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

В2. По данным, представленным на графике (см. рис. 30), определите, в каком году стоимость обучения в частных американских университетах была минимальной за период с 1970 по 1990 годы.

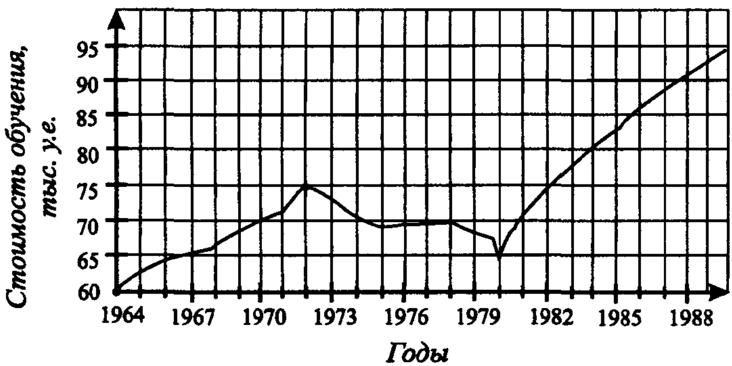


Рис. 30. График стоимости обучения в частных американских университетах

В3. Решите уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{12-3x} = 125$.

В4. В треугольнике DEF угол F — прямой, $DE = 30$, $\cos\angle E = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите DF.

В5. Для изготовления книжного шкафа требуется заказать 36 одинаковых досок в одной из трёх фирм. Площадь каждой доски 0,2 м^2. В таблице приведены цены на доски, а также на обработку краёв и шлифовку поверхности. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость досок (руб. за 1 $м^2$)	Обработка краёв и шлифовка поверхности (руб. за одну доску)
А	700	82
Б	760	68
В	580	105

B6. На клетчатой бумаге изображены два треугольника (см. рис. 31). Найдите, во сколько раз площадь одного из них больше площади другого.

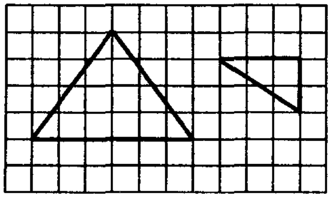


Рис. 31

B7. Найдите значение выражения $\log_9 \log_3 27$.

B8. Прямая $y = 4x - 1$ является касательной к графику функции $y = 4x^3 - 4x^2 + 5x - 1$. Найдите абсциссу точки касания.

B9. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Боковые рёбра равны $\frac{3}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

B10. Кран в днище бочки для летнего душа, уходя, забыли закрыть. Вода вытекает из бочки, пока она не станет пустой. Высота столба воды меняется по закону:

$$H(t) = 0{,}049 - 0{,}112 \cdot t + 0{,}064 \cdot t^2,$$

где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бочки?

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = 3\cos x + 15x + 9$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

B12. Моторная лодка прошла против течения реки 140 км, и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

С1. Решите неравенство $\frac{x+8}{x^2+2x+2}+\frac{x^2-14}{8+x}>0$.

С2. Площадь боковой поверхности конуса с вершиной S в два раза больше площади основания этого конуса. Плоскость, проходящая через точку S, пересекает основание конуса по отрезку AB, длина которого составляет половину длины образующей конуса. Пусть точки A_1, B_1 и S_1 развёртки боковой поверхности конуса соответствуют точкам A, B и S поверхности конуса. Найдите отношение площади треугольника $S_1A_1B_1$ к площади треугольника SAB.

С3. Найдите все значения аргумента x, при которых точки графика функции $y = \log_2(4x-3)+2$ расположены ниже точек графика функции $y = 2\log_2 x + \log_x(4x-3)$ на координатной плоскости xOy.

С4. Точки P и Q выбраны соответственно на основании BC и боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Прямые AP и BQ пересекаются в точке K, причём $AK = 3KP$, $KQ = 2BK$. Найдите отношение $CQ : QD$.

С5. Найдите все целые значения параметра a, при которых уравнение $\sin^2 x\left(1+\frac{a}{3}\sin x\right)+(2a^2-a-1)\cdot 2^{-5}\cdot\sin^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4}+3(a-1)\cdot 2^{-14}$ имеет ровно четыре различных действительных корня на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

С6. Даны натуральные числа n и m, причём $51 \leqslant m \leqslant 100$. В десятичной записи дроби $\frac{n}{m}$ после запятой на некотором месте оказываются последовательно цифры 2; 0; 4. Найдите все возможные значения m.

Вариант №7

Часть 1

В1. Цена на электрический чайник была повышена на 18% и составила 1534 рублей. Сколько рублей стоил товар до повышения цены?

В2. По данным, представленным на графике (см. рис. 32), определите, в каком году стоимость обучения в частных американских университетах была максимальной за период с 1967 по 1980 годы.

В3. Решите уравнение $36^{\frac{x+5}{2}} = \frac{1}{6}$.

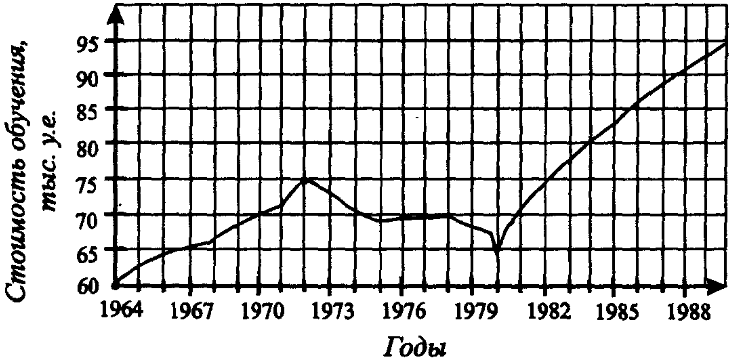


Рис. 32. График стоимости обучения в частных американских университетах

B4. В треугольнике KLM угол M — прямой, $KL = \sqrt{481}$, $LM = 20$. Найдите $\operatorname{ctg} \angle K$.

B5. Клиент планирует арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 900 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды, клиент должен оплатить топливо автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Цена топл. за 1 л (руб.)	Расход топлива на 100 км (л)	Арендная плата за одни сутки (руб.)
1	Дизельное	17	8	3600
2	Бензин	22	10	2920
3	Газ	12	14	3500

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 33). Найдите его площадь. (Ответ укажите в квадратных сантиметрах.)

B7. Найдите значение выражения $\lg 500 - \lg 5$.

B8. Прямая $y = 2x + 4$ является касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 2$. Найдите наименьшее значение из абсцисс точек касания.

B9. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной $\sqrt{6}$. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

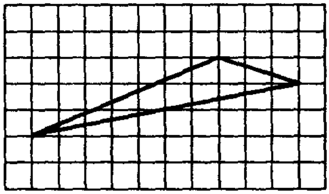


Рис. 33

B10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением:

$$T(t) = T_0 + a \cdot t + b \cdot t^2,$$

где $T_0 = 260$ K, $a = 35$ K/мин, $b = -1$ K/мин^2.

Известно, что при нагреве прибора свыше 510 K он может выйти из строя, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое время после начала работы нужно отключать прибор.

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\sin x - 12x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

B12. Моторная лодка прошла против течения реки 143 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 12 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите систему неравенств $\begin{cases} x + \log_{0,25} x \leqslant 2\sqrt{x \cdot \log_{0,25} x}, \\ x \cdot \log_{0,25} x \geqslant \log_{0,25} \sqrt{x}. \end{cases}$

C2. В правильной треугольной пирамиде угол между боковым ребром и стороной основания равен 60°. Через середину бокового ребра параллельно боковой грани проведено сечение, площадь которого равна 0,5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

C3. Решите уравнение $\frac{x^8 - 1}{8x^3} = \frac{x^4 - 1}{(x+1)^2}$.

C4. В квадрат со стороной 1 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит ровно одна вершина прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что длина его диагонали равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2 - ax - 1}{x^2 + x + 4}\right| < 2$ выполняется при всех значениях x.

C6. Известно, что многочлен $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ принимает целые значения при всех целых значениях x. Может ли оказаться, что $a = \dfrac{1}{6}$?

Вариант №8

Часть 1

B1. Футболка стоила 900 рублей. После снижения цены она стала стоить 720 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

B2. По данным, представленным на графике (см. рис. 34), определите, сколько лет прошло между максимальной и минимальной стоимостями обучения за период с 1970 по 1980 годы.

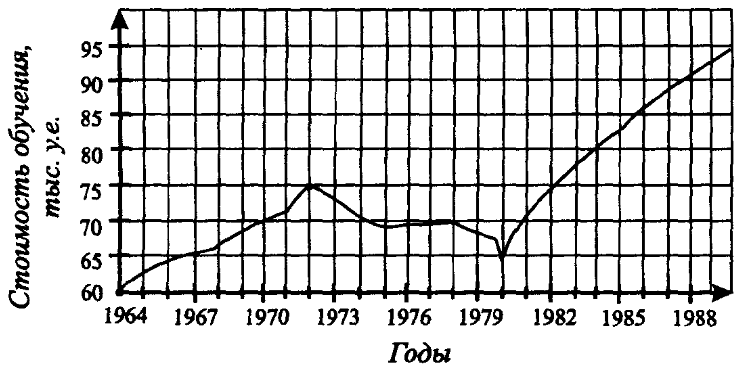


Рис. 34. График стоимости обучения в частных американских университетах

B3. Решите уравнение $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+3} = 2$.

B4. В треугольнике KLM угол M — прямой, $KL = 25$, $LM = 7$. Найдите значение выражения $6\,\mathrm{tg}\,\angle K$.

B5. Клиент планирует арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью маршрута 800 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды, клиент должен оплатить топливо автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Цена топл. за 1 л (руб.)	Расход топлива на 100 км (л)	Арендная плата за одни сутки (руб.)
1	Дизельное	18	6	3800
2	Бензин	23	9	3000
3	Газ	14	12	3400

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 35). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

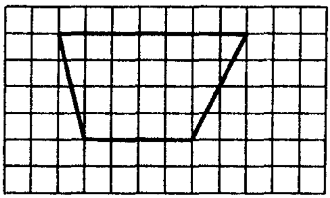


Рис. 35

B7. Найдите значение выражения $5 \cdot 6^{\log_6 3}$.

B8. Прямая $y = 6x - 10$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 2x + 10$. Найдите наибольшее значение из абсцисс точек касания.

B9. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 5,5.

B10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением:

$$T(t) = T_0 + a \cdot t + b \cdot t^2,$$

где $T_0 = 250$ К, $a = 13$ К/мин, $b = -\frac{1}{3}$ К/мин^2.

Известно, что при нагреве прибора свыше 340 К он может выйти из строя, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое время после начала работы нужно отключать прибор.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = \cos x + \frac{9}{\pi}x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

B12. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 286 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч, стоянка длится 18 часов, а в пункт отправления он возвращается через 42 часа, после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{1}{x} + \log_{0,5} x \geqslant 2\sqrt{\frac{\log_{0,5} x}{x}}, \\ \frac{\log_{0,5} x}{x} \leqslant \log_{0.5} \sqrt{x}. \end{cases}$

C2. В правильной треугольной пирамиде через середину бокового ребра параллельно боковой грани проведено сечение, площадь которого равна 0,25. Найдите угол между боковым ребром и стороной основания пирамиды, если площадь полной поверхности пирамиды равна $3 + \sqrt{3}$.

C3. Решите уравнение $\frac{x^8 - 1}{x^2 - 1} = 4x^3$.

C4. В квадрат со стороной 1 вписан прямоугольник площадью $\frac{1}{2}$ так, что на каждой стороне квадрата лежит ровно одна вершина прямоугольника. Найдите длину диагонали прямоугольника.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\frac{ax^2 + x + 1}{x^2 + x + 3}\right| < 1$ выполняется при всех значениях x.

C6. Известно, что многочлен $q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$ принимает целые значения при всех целых значениях x. Может ли оказаться, что $a = \frac{1}{24}$?

Вариант №9

Часть 1

B1. В городе N живёт 300000 жителей. Среди них 13% детей и подростков. Среди взрослых 40% не работают (пенсионеры, домохозяйки, безработные). Сколько взрослых работают?

B2. По графику (2) (см. рис. 36) определите, на сколько промилле выросла смертность в России в 1995 году по сравнению с 1986 годом (промилле — одна тысячная доля).

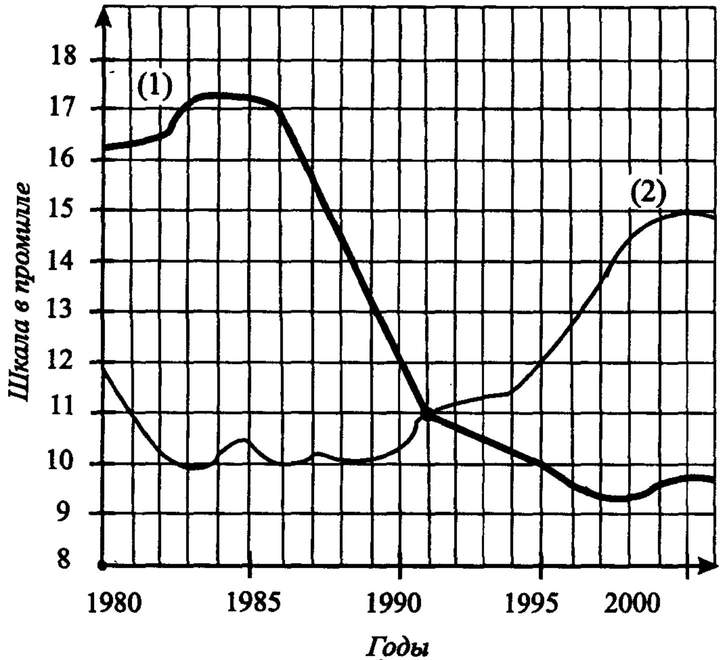


Рис. 36. Динамика рождаемости и смертности (на 1000 чел.) в России в 1978 — 2003 гг. (1) — рождаемость, (2) — смертность

B3. Решите уравнение $\sqrt{40-6x}=2$.

B4. В треугольнике KLM угол M — прямой, $KL=29$, $LM=21$. Найдите $\operatorname{tg}\angle K$.

B5. Семья из трёх человек едет из Ростова-на-Дону в Гагры. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд стоит 650 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 км, а цена бензина равна 22 рубля за литр. Расстояние между городами по шоссе 700 км. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 37). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

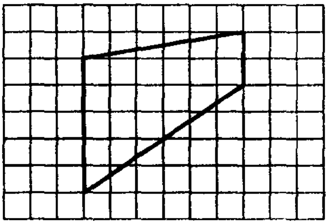


Рис. 37

B7. Найдите значение выражения $\frac{72}{7^{\log_7 6}}$.

B8. На рисунке 38 изображён график функции $y = g(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Определите количество целочисленных значений аргумента, при которых $g'(x) > 0$.

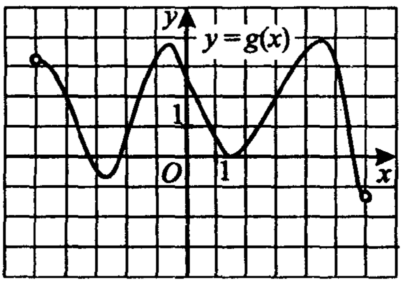


Рис. 38

B9. Объём конуса равен 28. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.

B10. Коэффицент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%.$$

При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 20%, если температура холодильника $T_2 = 560°$ К?

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 10\sin x + \frac{32}{\pi}x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

B12. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 234 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения реки, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 22 км/ч, стоянка длится 4 часа и в пункт отправления он возвращается через 26 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{1+2x} + 3^{2(1-x)} = 28, \\ y^2 + \sqrt{x} = 10. \end{cases}$

C2. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$ со стороной $AB = 6$. Ребро SA пирамиды перпендикулярно его основанию. Точка K лежит на ребре SA так, что $SK : KA = 2 : 3$. Плоскость, проходящая через точку K и прямую BD, образует с основанием пирамиды угол, тангенс которого равен $\sqrt{2}$.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+3x+1)}{x^2-2x} \geqslant 0, \\ x^2 + x - 6 \leqslant 0. \end{cases}$

C4. Диагонали трапеции $ABCD$ равны 8 и 10, отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Найдите площадь трапеции.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3\sqrt[3]{x+2} - a\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[6]{x^2-4} = 3a\sqrt[6]{x^2-4}$ имеет единственное решение.

C6. Найдите все такие целые числа x, что $x^2 = \overline{aabbcc}$, где a, b и c — некоторые цифры, $a \neq 0$.

Вариант №10

Часть 1

B1. В летнем лагере 260 детей и 28 воспитателей. В автобус вмещается не более 50 пассажиров. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

B2. По графикам (1) и (2) (см. рис. 39) определите, во сколько раз в 1995 году смертность превышала рождаемость.

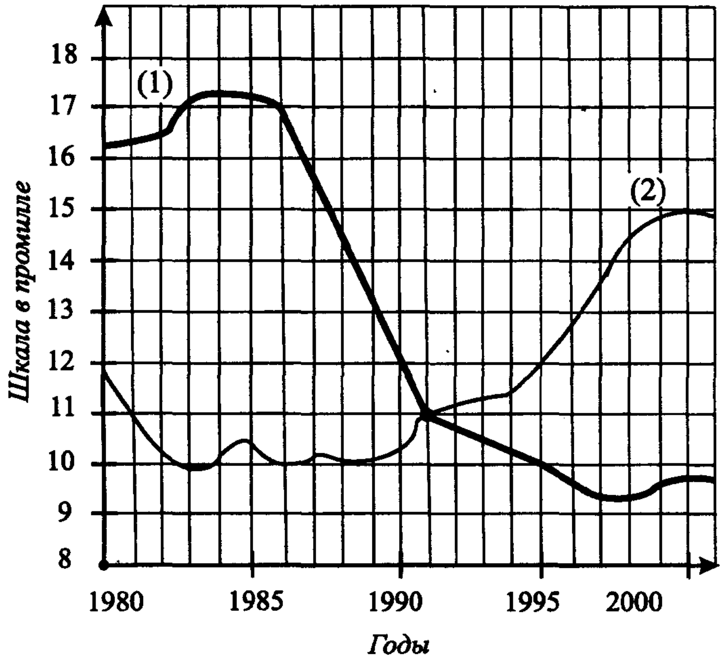


Рис. 39. Динамика рождаемости и смертности (на 1000 чел.) в России в 1978 — 2003 гг. (1) — рождаемость, (2) — смертность

B3. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{18}{2x+32}} = \dfrac{1}{4}$.

B4. В треугольнике KLM угол M — прямой, $KM = 24$, $\sin\angle K = \dfrac{15}{17}$. Найдите LM.

B5. Семья из трёх человек едет из Ростова-на-Дону в Гагры. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд стоит 700 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 11 литров бензина на 100 км, а цена бензина равна 23 рубля за литр. Расстояние между городами по шоссе 700 км. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён параллелограмм (см. рис. 40). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

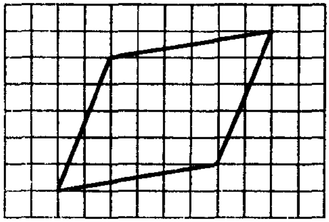


Рис. 40

B7. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{12}} \sqrt{12}$.

B8. На рисунке 41 изображён график функции $y = g(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику этой функции параллельна прямой $y = 100$.

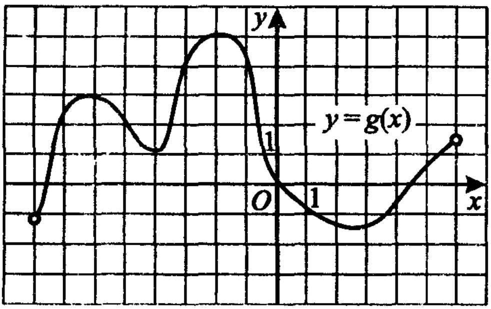


Рис. 41

B9. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2,5 и 6. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 64. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

B10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%.$$

При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 35%, если температура холодильника $T_2 = 325^\circ$ K?

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = 3\cos x - \frac{24}{\pi}x + 10$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

B12. Первый рабочий делает за час на 4 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 396 деталей, на 6 часов раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 432 таких же деталей. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2 \cdot 2^{3x} + 7 = 2^{2-3x}, \\ y^2 + 12x = 0. \end{cases}$

C2. Основанием правильной пирамиды $SABCD$ является квадрат со стороной, равной 4. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через середину бокового ребра SA и сторону основания DC, если высота пирамиды равна 8.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{\log_5 (x^2 + 4x - 4)}{x^2 + 7x + 10} \leqslant 0, \\ x^2 + x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$

C4. Длины оснований трапеции равны 12 и 22, длина одной из боковых сторон рана 8, сумма углов при нижнем основании равна $\frac{\pi}{2}$. Найдите площадь трапеции.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a\sqrt[6]{1-x^2} - 2a\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2\sqrt[6]{1-x^2}$ имеет единственное решение.

C6. Найдите все такие целые числа x, что $x^2 = \overline{\underbrace{a...a}_{n}\underbrace{b...b}_{n}}$, где каждая из двух ненулевых цифр a и b повторена n раз, $n > 1$.

Вариант №11

Часть 1

B1. Сырок стоит 7 руб. 80 коп. Какое наибольшее количество сырков можно купить на 70 рублей?

B2. По графикам (1) и (2) (см. рис. 42) определите, во сколько раз рождаемость превышала смертность в 1986 году.

B3. Решите уравнение $\log_5(7 + x) = 2$.

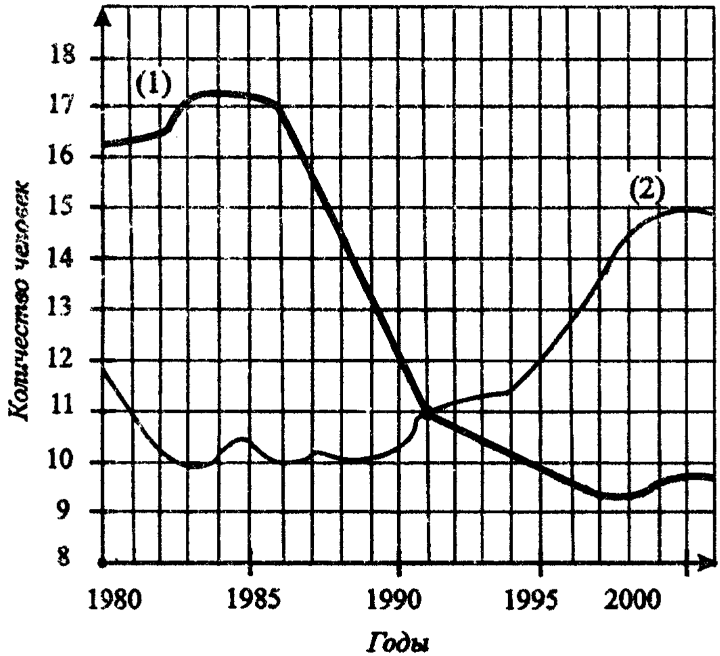


Рис. 42. Динамика рождаемости и смертности (на 1000 чел.) в России в 1978 — 2003 гг. (1) — рождаемость, (2) — смертность

В4. В треугольнике PQT угол T — прямой, $QT = 24$, $PQ = 25$. Найдите $\sin \angle Q$.

В5. Для транспортировки 37 тонн груза на 1200 км можно использовать одного из трёх перевозчиков. Причём у каждого из них своя грузоподъёмность используемых автомобилей. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку за один рейс?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
А	3400	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

В6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён параллелограмм (см. рис. 43). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

В7. Найдите значение выражения $\log_3 20{,}25 + \log_3 4$.

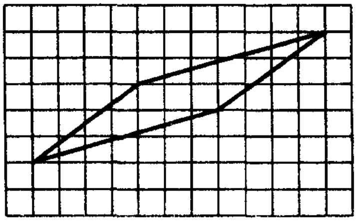


Рис. 43

B8. На рисунке 44 изображён график производной функции $y = h(x)$, определённой на интервале $(-7; 6)$. В какой точке отрезка $[-6; 1]$ функция $h(x)$ принимает минимальное значение?

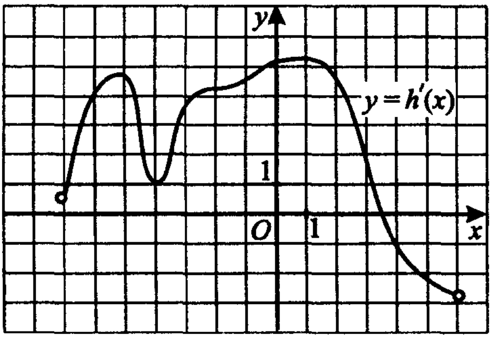


Рис. 44

B9. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 3, а высота — 7.

B10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%.$$

При каком наибольшем значении температуры холодильника T_2 КПД этого двигателя будет не менее 75%, если температура нагревателя $T_1 = 1000°$ K?

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = 4\sin x + \frac{24}{\pi}x + 26$ на $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

B12. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 930 литров она наполняет на 1 минуту быстрее, чем первая труба?

Часть 2

C1. Решите неравенство $\dfrac{x^3 \cdot 5^{\log_2 x}}{x^{\log_6 3^x}} < x^{\log_6 2^x}$.

C2. Дан шар радиусом 7 с центром в точке O и два его сечения с центрами в точках O_1 и O_2. Точка O лежит на отрезке O_1O_2, длина которого равна 6. Площадь одного из сечений в 2 раза больше площади другого. Найдите радиус меньшего сечения.

C3. Решите неравенство

$$4\sqrt{\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}}}+3\sqrt{\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4}}} \leqslant 7\sqrt{x+5}.$$

C4. В правильном многоугольнике $A_1, A_2, \ldots A_n$ сторона A_1A_2 равна радиусу описанной окружности. На описанной окружности выбрана точка M такая, что отрезки A_1A_2 и MO перпендикулярны (O — центр описанной окружности). Найдите значение выражения $2\sqrt{3} - \dfrac{S_{A_1A_2\ldots A_n}}{n \cdot S_{A_1A_2M}}$.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых разрешима система

$$\begin{cases} ax^4 - 3x^2 + (2a+1)x + 1 \geqslant 0, \\ \dfrac{\sqrt{x-a}-\sqrt{x}-\sqrt{a}}{a^2x^4 + 6a^2x^3 + (9a^2+2a)x^2 + 6ax + 1} \geqslant 0. \end{cases}$$

C6. О натуральном числе $C > 10$ известно следующее: первая и последняя его цифры отличны от нуля, а остальные цифры (если они есть) равны нулю. Найдите все такие числа C, являющиеся точными квадратами.

Вариант №12

Часть 1

B1. Шариковая ручка стоит 15 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на 10%?

B2. По графикам (1) и (2) (см. рис. 45) определите, в каком году смертность сравнялась с рождаемостью.

B3. Решите уравнение $\log_7(x+7) = \log_7(2x-1)$.

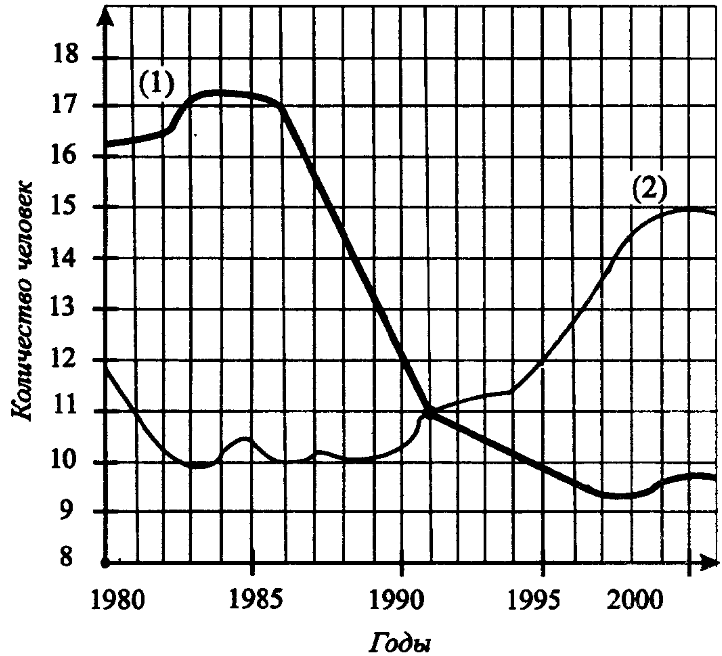


Рис. 45. Динамика рождаемости и смертности (на 1000 чел.) в России в 1978 — 2003 гг. (1) — рождаемость, (2) — смертность

В4. В треугольнике PQT известно: $PT = QT$, $PQ = 6$, $\cos \angle P = 0{,}6$. Найдите высоту TH.

В5. Для транспортировки 83 тонн груза на 700 км можно использовать одного из трёх перевозчиков. Причём у каждого из них своя грузоподъёмность используемых автомобилей. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку за один рейс?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
А	3100	3,5
Б	4450	5
В	9500	12

В6. На клетчатой бумаге изображены трапеция и параллелограмм (см. рис. 46). Найдите, во сколько раз площадь трапеции больше площади параллелограмма.

В7. Найдите значение выражения $6^{\log_{36} 9}$.

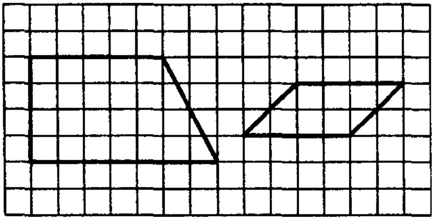


Рис. 46

B8. На рисунке 47 изображён график производной функции $y = h(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. В какой точке отрезка $[0,5; 5,5]$ функция $h(x)$ принимает максимальное значение?

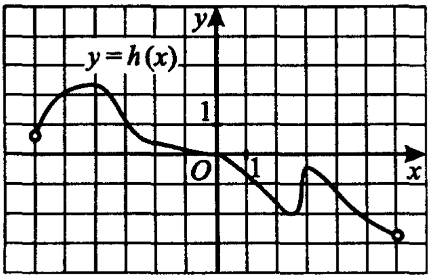


Рис. 47

B9. Если каждое ребро куба уменьшить на 2, то площадь его поверхности уменьшается на 48. Найдите ребро куба.

B10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%.$$

При каком наибольшем значении температуры холодильника T_2 КПД этого двигателя будет не менее 45%, если температура нагревателя $T_1 = 800°$ K?

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\operatorname{tg} x - 4x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

B12. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту больше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 30 литров она заполняет на 6 мин. быстрее, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 196 литров?

Часть 2

C1. Решите неравенство $x^{\log_{35} 7^x} > x^{7+\log_{35}\left(\frac{1}{5}\right)^x} \cdot 5^{\log_3 x}$.

C2. Дан шар радиусом 11 с центром в точке O и два его сечения с центрами в точках O_1 и O_2. Точка O лежит на отрезке O_1O_2, длина которого равна 10. Площадь одного из сечений в 3 раза больше площади другого. Найдите площадь большего сечения.

C3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-5}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}}}\leqslant 2\sqrt{x-5}.$$

C4. Точка O — центр правильного двенадцатиугольника $A_1, A_2, \ldots A_{12}$. На описанной около двенадцатиугольника окружности выбрана точка K так, что отрезки A_1A_3 и KO перпендикулярны. Площадь треугольника KA_1A_3 равна $2+\sqrt{3}$. Найдите радиус описанной около двенадцатиугольника окружности.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых оба неравенства не имеют решений:

$$(a-1)\sqrt[4]{x}-2x^2+x-3+a\geqslant 0;$$

$$\frac{\sqrt{2x-a+1}-\sqrt{2x}-\sqrt[4]{a-1}}{a^4x^4-20a^2x^3+(2a^3+100)x^2-20ax+a^2}<0.$$

C6. Сколько существует различных целых чисел, которые можно представить в виде разности $a-b$, где a — некоторое четырёхзначное число с ненулевыми первой и последней цифрами; b — число, полученное при записи цифр a в обратном порядке? Например, в требуемом виде можно представить число $-2088 = 2014 - 4102$.

Вариант №13

Часть 1

B1. Тетрадь стоит 20 рублей. Какое наибольшее количество таких тетрадей можно купить на 200 рублей после понижения цены на 20%?

B2. По информации, представленной на графике (см. рис. 48), определите, какого максимального значения достиг уровень безработицы (в процентах) в России за период с сентября 2007 года по сентябрь 2008 года.

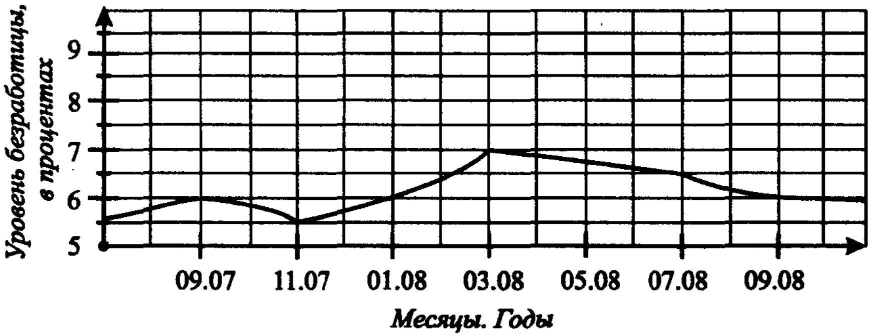


Рис. 48. График уровня безработицы

B3. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{4}}(9 - x) = -2$.

B4. В треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = 20$, $BC = 3\sqrt{39}$. Найдите $\cos\angle A$.

B5. Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров строительного бруса. У неё есть 3 поставщика. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость бруса (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	3900	8500	
Б	4300	9000	При заказе на сумму больше 230000 руб. доставка бесплатно
В	4100	11000	При заказе на сумму больше чем 200000 руб. доставка бесплатно

B6. На клетчатой бумаге изображены трапеция и параллелограмм (см. рис. 49). Найдите, во сколько раз площадь трапеции меньше площади параллелограмма.

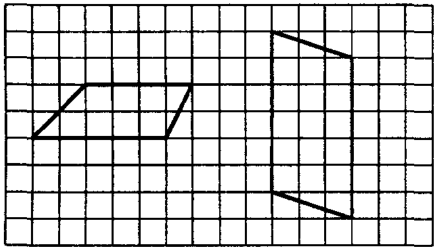


Рис. 49

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 \sqrt[6]{12}}{\log_{125} 12}$.

B8. Функция $h(x)$ определена на промежутке $[-8; 8]$. На рисунке 50 изображён график её производной. В какой точке отрезка $[-4; 5]$ функция $h(x)$ принимает минимальное значение?

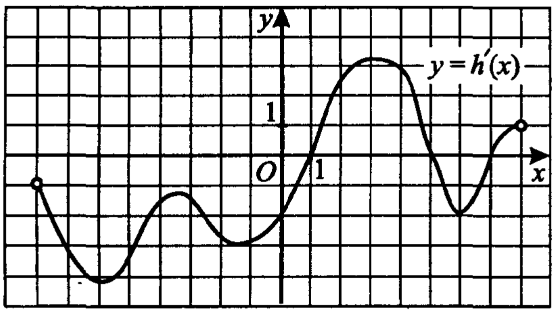


Рис. 50

B9. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 5 и 12, если боковое ребро призмы равно 11.

B10. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 80 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить утюг. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление утюга, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 30 Ом.

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = 8\operatorname{tg} x - 8x + 3$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

B12. Первая труба за одну минуту пропускает на 3 литра воды меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом в 108 литров она заполняет на 6 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 240 литров?

Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6y}{x+y}} + 3 = 4\sqrt{\dfrac{x+y}{6y}}, \\ xy + 1 = x + y. \end{cases}$

C2. Стороны равнобедренной трапеции касаются кругового цилиндра, ось которого перпендикулярна параллельным сторонам трапеции. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если синус угла, который образует ось цилиндра с плоскостью трапеции, равен $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, а основания трапеции равны 2 и 8.

C3. Решите неравенство

$$\sqrt{3^x - 3^{-x} + 3} \leqslant \sqrt{2 \cdot 3^x + 2\sqrt{6} \cdot 3^{-\frac{x}{2}} - \sqrt{3^x + 3^{-x} - 3}}.$$

C4. Даны две окружности, радиусы которых относятся как $3 : 2$. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найдите стороны треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной к окружностям, если третья (наибольшая) сторона этого треугольника равна 10.

C5. Может ли система

$$\begin{cases} bx^2 - 6x = \dfrac{8}{b} - \dfrac{4\ln\left(-\dfrac{2}{b}\right)}{b} + y, \\ -4\ln\dfrac{x}{2} = by \end{cases}$$

иметь единственное решение?

C6. Решите уравнение $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x = 18y^2 - 15$ в целых числах.

Вариант №14

Часть 1

В1. Аня купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 48 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 600 рублей, а разовая поездка 16 рублей?

В2. По информации, представленной на графике (см. рис. 51), определите, какого минимального значения достиг уровень безработицы (в процентах) в России за период с сентября 2007 года по сентябрь 2008 года.

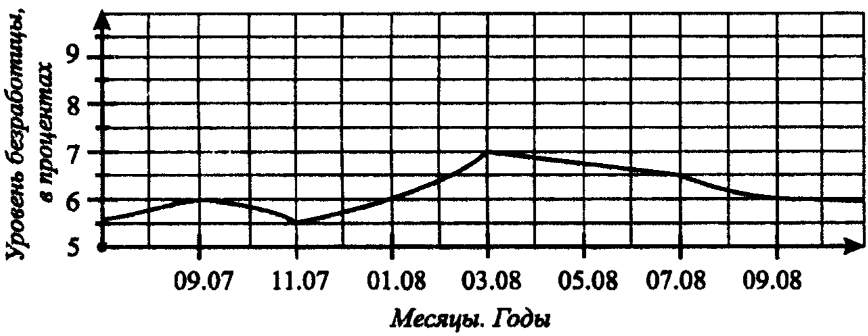


Рис. 51. График уровня безработицы

В3. Решите уравнение $\log_3(5x-2) = 3\log_3 2$.

В4. В треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = 10$, $BC = 5\sqrt{3}$. Найдите $\cos\angle A$.

В5. Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров строительного бруса. У неё есть 3 поставщика. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость бруса (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	4200	15000	При заказе на сумму больше, чем 200000 руб. доставка бесплатно

Поставщик	Стоимость бруса (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
Б	4400	9000	
В	3850	20000	При заказе на сумму больше 230000 руб. доставка бесплатно

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 52). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

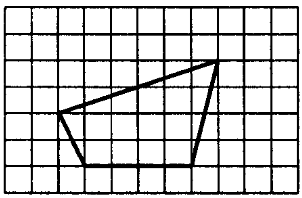


Рис. 52

B7. Найдите значение выражения $6^{2+\log_6 3}$.

B8. Функция $h(x)$ определена на промежутке $[-8; 6]$. На рисунке 53 изображён график её производной. В какой точке отрезка $[-4; 4]$ функция $h(x)$ принимает максимальное значение?

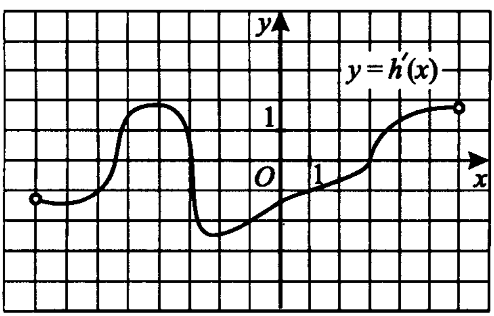


Рис. 53

B9. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра (см. рис. 54), радиус основания которого равен 5, а высота равна $2\sqrt{3}$.

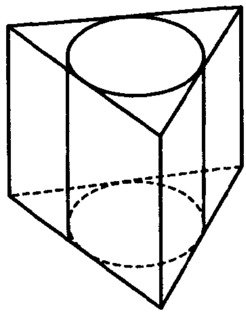


Рис. 54

B10. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 120 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить фен. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление фена, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 40 Ом.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 9\operatorname{tg} x - 9x + 2{,}25\pi - 2$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

B12. Лодка в 5 часов вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 45 км от A. Пробыв в пункте B 1 час, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 20 часов. Определите собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{8x}{x+y}} + 4\sqrt{\dfrac{x+y}{8x}} = 4, \\ 2xy = 12 + x + y. \end{cases}$

C2. Стороны равнобедренной трапеции касаются кругового цилиндра, ось которого перпендикулярна параллельным сторонам трапеции. Найдите угол, который образует ось цилиндра с плоскостью трапеции, если основания трапеции равны 4 и 3, а её высота равна $4\sqrt{3}$.

C3. Решите неравенство

$$\sqrt{5^x - 5^{-x} + 2} \leqslant \sqrt{2 \cdot 5^x + 4 \cdot 5^{-\frac{x}{2}}} - \sqrt{5^x + 5^{-x} - 2}.$$

С4. Даны две окружности с радиусами $R = 6$ и $r = 5$. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной окружностей.

С5. Может ли система $\begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{a} = \dfrac{3}{4a^2} - \dfrac{\ln\frac{1}{2a}}{a^2} + y, \\ \ln x = a^2 y \end{cases}$

иметь единственное решение?

С6. Решите уравнение $81x^4 - 2y^2 = 81$ в целых числах.

Вариант №15

Часть 1

В1. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 18 дней. Лекарство выпускается в упаковках по 10 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок потребуется на весь курс лечения?

В2. По данной диаграмме (см. рис. 55) определите, сколько раз падение цен на нефть сменялось их подъёмом.

В3. Решите уравнение $4^x = 32$.

В4. В треугольнике ABC угол C — прямой, $BC = 10$, $\cos\angle A = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$. Найдите AB.

В5. Из пункта A в пункт D ведут 3 дороги. Через пункт B едет грузовик со средней скоростью 44 км/ч, через пункт C едет автобус со средней скоростью 36 км/ч. Третья дорога — без промежуточных пунктов, по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 52 км/ч. На рисунке 56 показана схема дорог и расстояние между пунктами по дорогам.

Все 3 автомобиля одновременно выехали из A. Для автомобиля, который добрался до D позже других, в ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

В6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 57). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

В7. Найдите значение выражения $4^{\log_2 5}$.

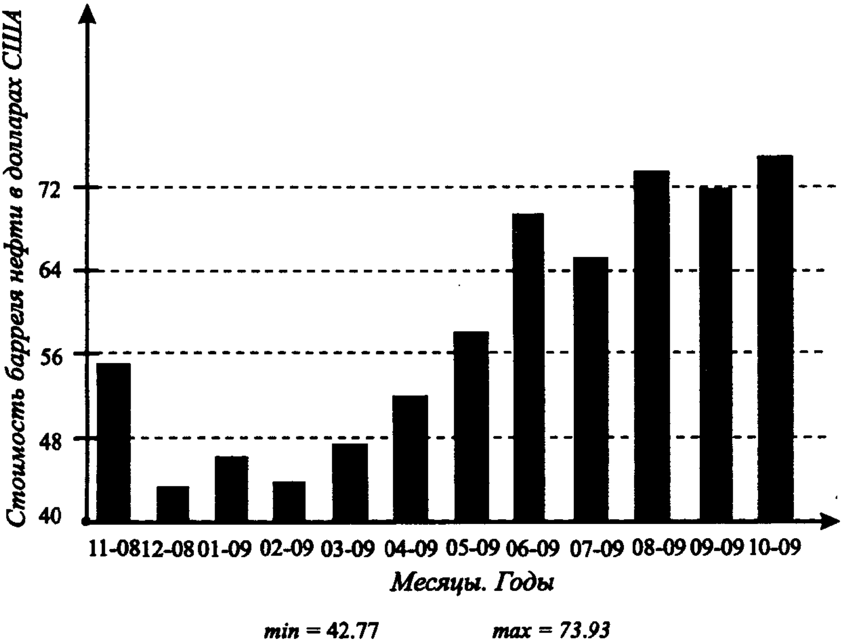


Рис. 55. Динамика мировых цен на нефть

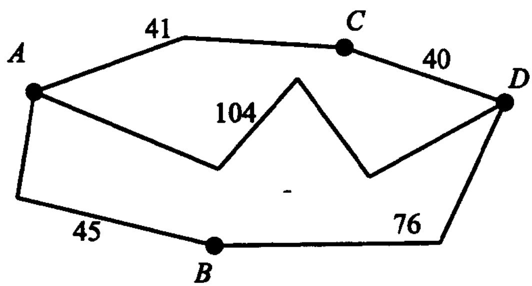


Рис. 56

B8. На рисунке 58 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 10$ или совпадает с ней.

B9. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 13, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

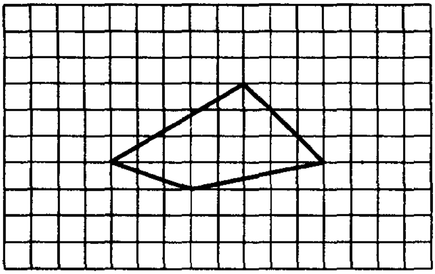


Рис. 57

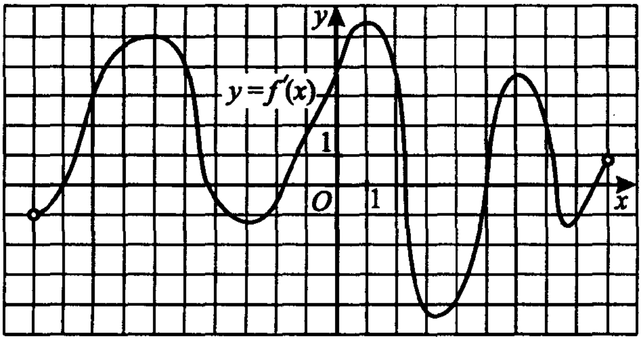


Рис. 58

B10. Для определения температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma \cdot S \cdot T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная Стефана-Больцмана, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах.

Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = 1{,}5 \cdot 10^{10}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $8{,}55 \cdot 10^{18}$ ватт. Определите температуру этой звезды.

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = 16\,\mathrm{tg}\,x - 16x - 4\pi + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

B12. Баржа в 10 ч вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв 45 минут в пункте B, баржа отправилась обратно и вернулась в пункт A в 16 ч. Определите скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите уравнение $4(t-2)\cdot\sqrt{\dfrac{t-8}{4t-8}}-\dfrac{12}{8-t}\cdot\sqrt{\dfrac{t-8}{t-2}}=11.$

C2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки K, L, M и N — середины рёбер AB, B_1C_1, C_1D_1 и AD соответственно. Найдите отношение площади треугольника AB_1C к площади четырёхугольника $KLMN$.

C3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}6\cos\beta-8\cos\alpha=5,\\ \sin\alpha-5\cos\beta=4.\end{cases}$$

C4. Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC, провели три прямые, параллельные сторонам AB, BC и AC соответственно, которые разделили площадь треугольника на шесть частей. Три части являются треугольниками с площадями 1; 4 и 16 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых указанная система уравнений имеет единственное решение. Для каждого полученного a найдите соответствующее решение системы $\begin{cases}2x^2=z-2y^2,\\ a-3x=z+3y.\end{cases}$

C6. Найдите все пары чисел p и k, где $p-1$ — простое, k — целое, при которых верно равенство
$$1+14+141+\ldots+\underbrace{141..41}_{2p-1\text{ цифр}}=k^2+6k+10.$$

Вариант №16

Часть 1

B1. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 13 г лимонной кислоты. Хозяйка готовит 9 литров маринада. В магазине продаются пачки лимонной кислоты по 10 г. Какое наименьшее число пачек нужно купить хозяйке для приготовления маринада?

B2. Владимир Дмитриевич купил 100 унций палладия в декабре 2008 года, и продал их в октябре 2009 года. По данным, представленным на диаграмме (см. рис. 59), определите величину его прибыли (в долларах США).

B3. Решите уравнение $\sqrt{42-3x}=3.$

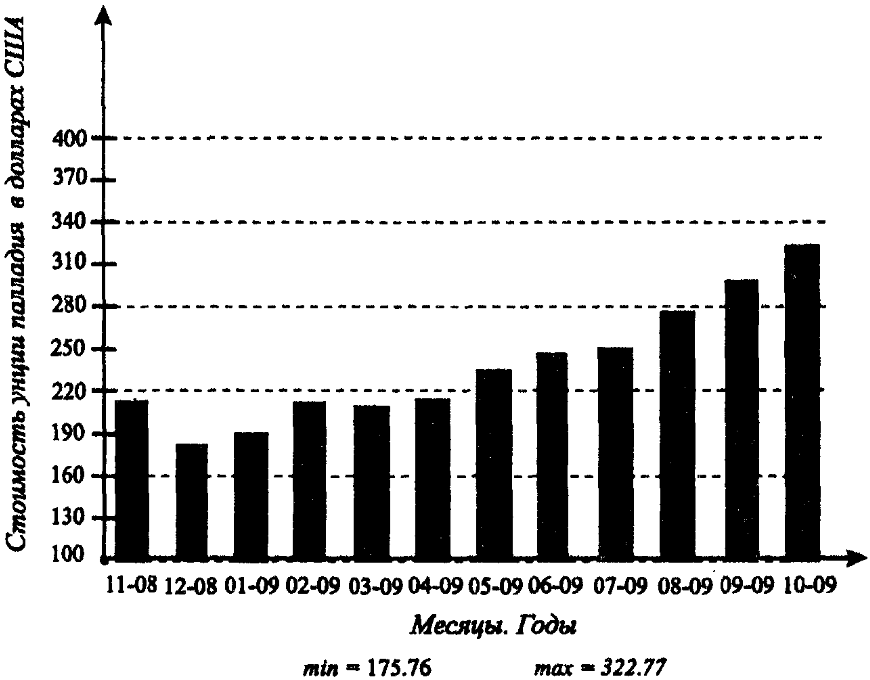


Рис. 59. Динамика мировых цен на палладий

B4. В треугольнике ABC угол C — прямой, $BC = 21$, $\cos\angle A = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. Найдите AB.

B5. Из пункта A в пункт D ведут 3 дороги. Через пункт B едет грузовик со средней скоростью 40 км/ч, через пункт C едет автобус со средней скоростью 34 км/ч. Третья дорога — без промежуточных пунктов, по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 58 км/ч. На рисунке 60 показана схема дорог и расстояние между пунктами по дорогам.
Все 3 автомобиля одновременно выехали из пункта A. Для автомобиля, который добрался до D позже других, в ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см заштрихована фигура (см. рис. 61). Найдите её площадь S в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

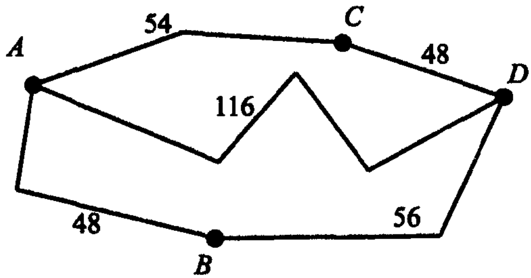


Рис. 60

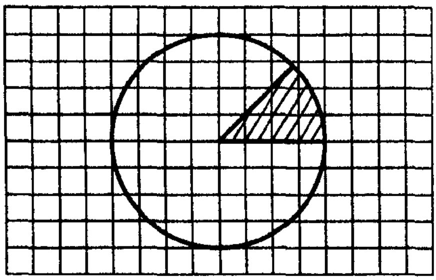


Рис. 61

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 12}{\log_{81} 12}$.

B8. На рисунке 62 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -\dfrac{x}{5} + 5$ или совпадает с ней.

B9. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

B10. Для определения температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma \cdot S \cdot T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная Стефана-Больцмана, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах.

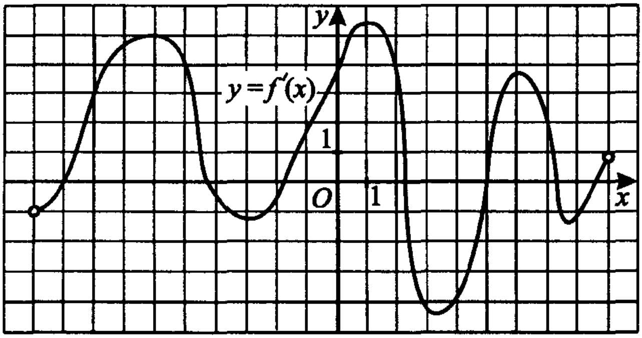


Рис. 62

Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = 4 \cdot 10^{24}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $364{,}8 \cdot 10^{28}$ ватт. Определите температуру этой звезды.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 5x - 5\,\mathrm{tg}\,x - 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

B12. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 96 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите уравнение

$$(x+1) \cdot \sqrt{\frac{x+9}{4x+4}} + \frac{3}{x+9} \cdot \sqrt{\frac{x+9}{16x+16}} + 1{,}75 = 0.$$

C2. Найдите отношение ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к высоте BH пирамиды BAB_1C.

C3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\cos\alpha - 4\cos\beta = 3, \\ 3\cos\beta - \sin\alpha = 2. \end{cases}$

C4. В равностороннем треугольнике ABC через точку P, лежащую внутри этого треугольника, провели перпендикуляры PF, PD и PE к сторонам AB, BC, AC соответственно. Найдите отношение $\dfrac{AE + CD + BF}{PD + PE + PF}$.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых указанная система уравнений имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} ax + 2y + 2z = 2, \\ 4x + ay + 2z = a, \\ 4x + 4y + 2az = a^2. \end{cases}$$

C6. Найдите все пары чисел p и k, где $p - 1$ — простое, k — целое, при которых верно равенство $5 + 52 + 525 + \ldots + \underbrace{525..25}_{2p-1\text{цифр}} = k^2 - 18k + 82$.

Вариант №17

Часть 1

B1. В гипермаркете проходит рекламная акция: покупая 3 шоколадки, 4-ю шоколадку покупатель получает в подарок. Шоколадка стоит 28 рублей. Какое наибольшее число шоколадок получит покупатель за 300 рублей?

B2. По данным, представленным на диаграмме (см. рис. 63) за период с ноября 2008 по ноябрь 2009, определите, сколько месяцев цена на палладий была менее 220 долларов США за унцию.

B3. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{5x-51}}{2} = 4$.

B4. В треугольнике KLM угол M — прямой, высота $MH = 15$, $\sin\angle K = \dfrac{12}{13}$. Найдите LH.

B5. Строительной фирме нужно приобрести 77 кубометров пенобетона. У неё есть 3 поставщика. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
A	2750	4400	

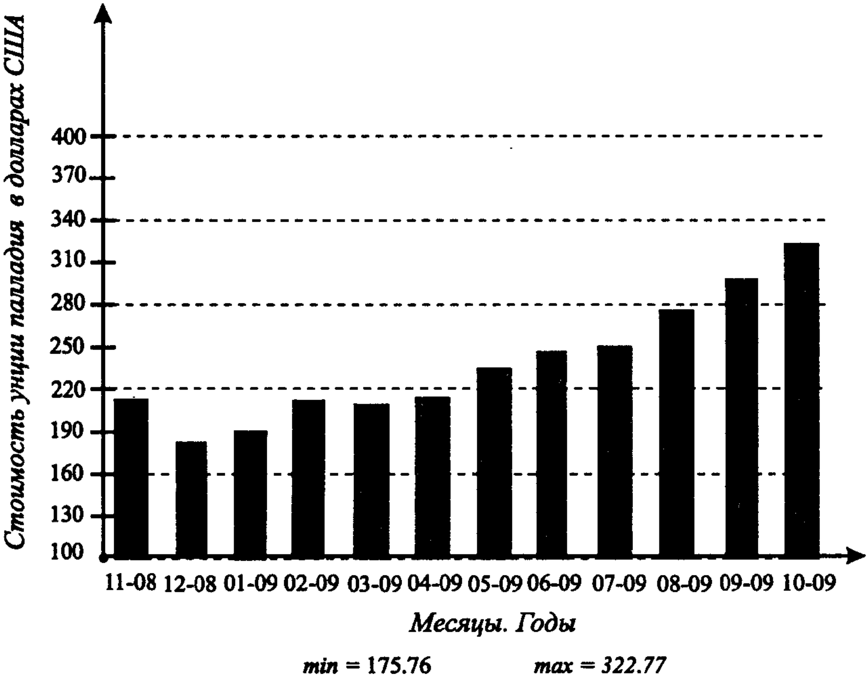


Рис. 63. Динамика мировых цен на палладий

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
Б	3100	5300	При заказе на сумму больше, чем 200000 руб. доставка бесплатно
В	2780	3500	При заказе больше 75 м^3 доставка бесплатно

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см заштрихована фигура (см. рис. 64). Найдите её площадь S в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

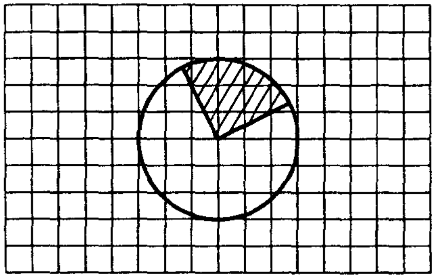


Рис. 64

B7. Найдите значение выражения $\log_2 49 \cdot \log_7 2$.

B8. На рисунке 65 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите количество целых точек, входящих в эти промежутки.

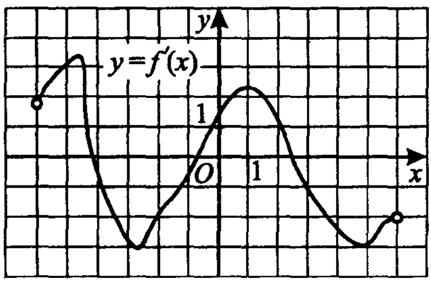


Рис. 65

B9. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности шара, если радиус шара уменьшится в 3 раза?

B10. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота на которой он находится, описывается формулой

$$h(t) = -5 \cdot t^2 + 34 \cdot t$$

(h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 24 метров.

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = x - \operatorname{tg} x + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

B12. Два велосипедиста отправляются в 154-километровый пробег. Первый идёт со скоростью на 3 км/ч больше второго. В результате он прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x - 5^y + 2^{2y-x} \leqslant 0, \\ \sqrt{3^y - 2 - 3^{1-y}} \leqslant 0. \end{cases}$

C2. Найдите тангенс двугранного угла между соседними гранями правильного октаэдра.

C3. Решите неравенство
$4^{4^x+2^{x+1}-3} + 3 \cdot (3^{2^x-1})^{2^x+3} \leqslant 2^{4^{x+0,5}+4^{0,5x+1}-4}$.

C4. В прямоугольнике $ABCD$ длины сторон AB и AD относятся как $\sqrt{2} : 1$. Точка E расположена на прямой AB так, что $\angle AED = \angle CED$. Найдите отношение $\frac{AE}{CD}$.

C5. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\left(4^{\frac{1}{2}} - \log_4 \log_4 k^2\right) \cdot \log_x 4 - 1 = \log_x \frac{16}{6x^2 - x^3}$ имеет единственное решение.

C6. Найдите все пары чисел k и n, где k — простое, n — целое, при которых верно равенство $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n(3n+1) + 11 = 5^k + 2^k$.

Вариант №18

Часть 1

B1. Оптовая цена учебника 120 рублей. Розничная цена на 40% выше оптовой. Какое наибольшее количество таких учебников можно купить по розничной цене на 6000 рублей?

B2. По данным, представленным на диаграмме (см. рис. 66) за период с ноября 2008 по ноябрь 2009, определите, сколько месяцев цена на палладий была более 280 долларов США за унцию.

B3. Решите уравнение $\sqrt{\frac{4x+60}{7}} = 12$.

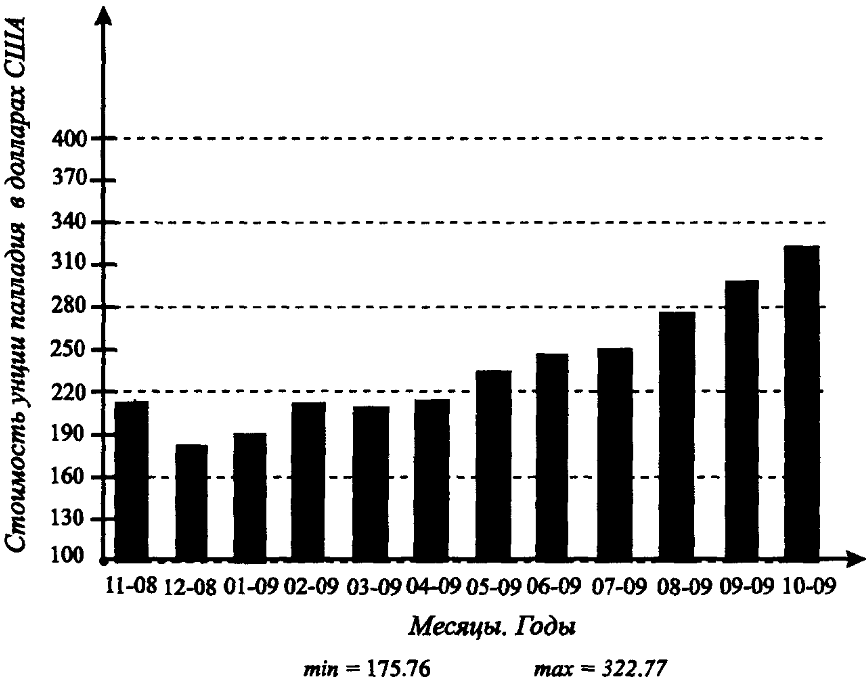


Рис. 66. Динамика мировых цен на палладий

B4. В треугольнике KLM угол M — прямой, $KL = 10$, $LM = 8$. Найдите косинус внешнего угла при вершине K.

B5. Строительной фирме нужно приобрести 74 кубометра пенобетона. У неё есть 3 поставщика. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2900	2000	
Б	3150	1500	При заказе на сумму больше чем 250000 руб. доставка бесплатно

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
В	2920	3000	При заказе больше 75 м^3 доставка бесплатно

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см заштрихована фигура (см. рис. 67). Найдите её площадь S в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{2\pi + 1}$.

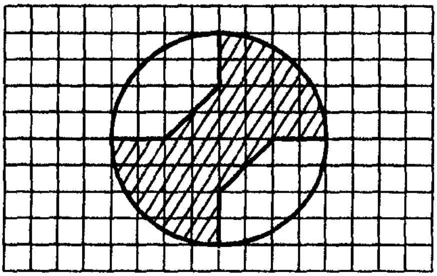


Рис. 67

B7. Найдите значение выражения $\log_{12} 252 - \log_{12} 1{,}75$.

B8. На рисунке 68 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 10)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-3; 4)$.

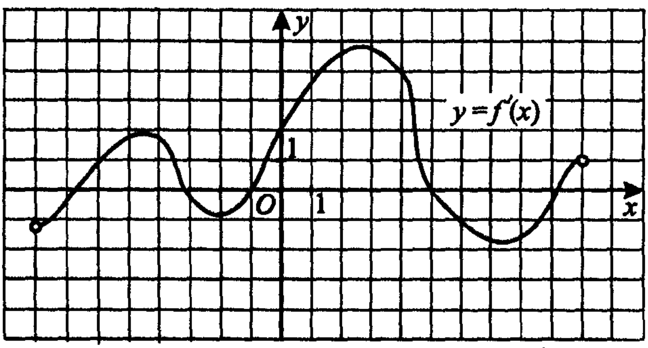


Рис. 68

B9. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 27. Найдите площадь поверхности шара.

B10. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота на которой он находится, описывается формулой

$$h(t) = -5 \cdot t^2 + 27 \cdot t$$

(h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 28 метров.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\operatorname{tg} x - 4x + \pi + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

B12. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 140 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 4 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько из A в B. Найдите скорость велосипедиста из B в A. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x - 7 \cdot 2^{2y} + 3^{3y-x} \leqslant 0, \\ \sqrt{5^y - 3 - 2 \cdot 5^{1-y}} \leqslant 0. \end{cases}$$

C2. Найдите тангенс двугранного угла между противоположными гранями правильного октаэдра с общей вершиной.

C3. Решите неравенство

$$5 \cdot \left(5^{2^x+2}\right)^{2^x-4} - 4^{4^x-2^{x+1}-8} \leqslant 2^{4^{x+0,5}-4^{0,5x+1}-14}.$$

C4. В прямоугольнике $ABCD$ длины сторон AB и AD относятся как $\sqrt{5} : 1$. Точка E расположена на прямой AB так, что $\angle AED = \angle CED = \angle\alpha$. Найдите величину $\operatorname{tg} 2\alpha$.

C5. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\log_{x-1} \dfrac{8(5-x)}{x^2 - 2x + 1} + 3 = (3 + \log_2 \log_2 k) \cdot \log_{x-1} 2$ имеет единственное решение.

C6. Решите в целых числах уравнение

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{7^k - 2^k - 2}{n(2n-1)^2}.$$

Вариант №19

Часть 1

B1. В летнем лагере на каждого участника полагается 60 г сахара в день. В лагере 224 человека. Какого наименьшего количества килограммовых пачек сахара достаточно на 7 дней?

B2. По данной диаграмме (см. рис. 69) определите количество месяцев за указанный период, в течение которых цена нефти превышала 64 доллара США за баррель.

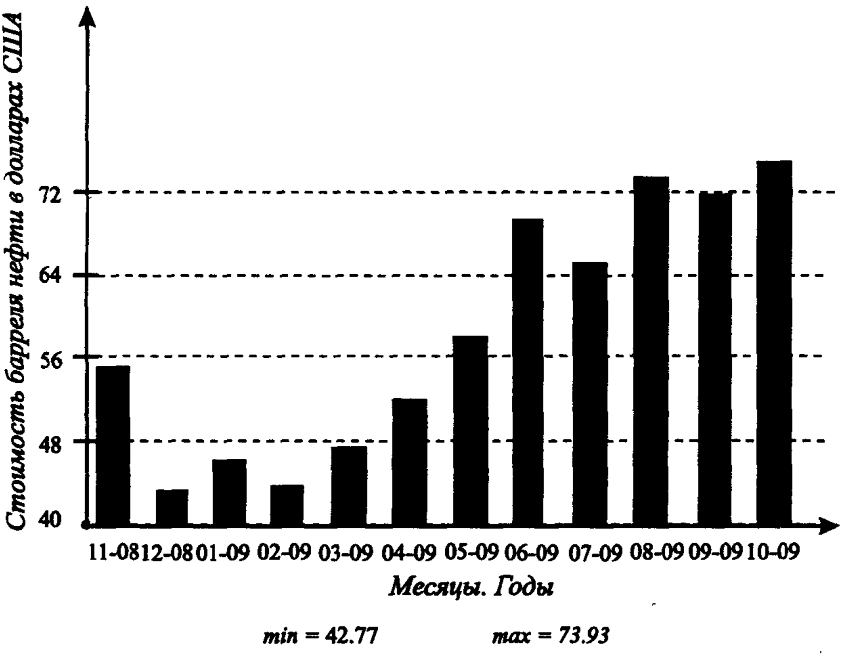


Рис. 69. Динамика мировых цен на нефть

B3. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{16}{5x-16}} = \dfrac{1}{2}$.

B4. $ABCD$ — параллелограмм, $\cos\angle C = \dfrac{21}{29}$. Найдите $\operatorname{ctg}\angle B$.

B5. Для строительства ангаров можно использовать один из двух типов фундаментов: бетонный или из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 5 кубометров пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 38 мешков цемента.

Кубометр пеноблоков стоит 2300 рублей, щебень стоит 650 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 225 рублей.

Сколько рублей придётся заплатить за стройматериалы, если выбирать самый дешёвый вариант?

В6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена фигура (см. рис. 70). Найдите площадь заштрихованной фигуры S в квадратных сантиметрах и укажите в ответе значение $\frac{S}{9\pi + 12}$.

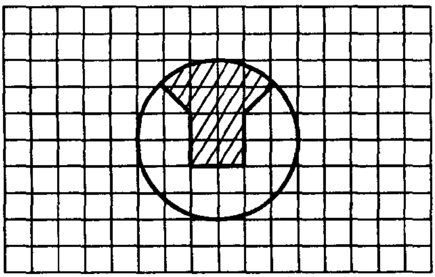


Рис. 70

В7. Найдите значение выражения $8 \cdot 7^{\log_7 7}$.

В8. На рисунке 71 изображён график функции $y = g(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Найдите количество целых точек, в которых производная функции $g(x)$ положительна.

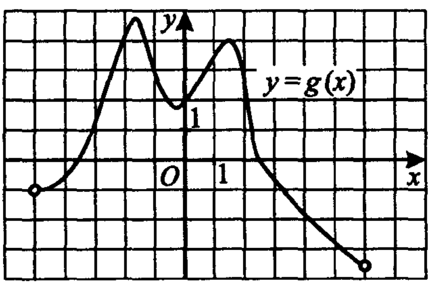


Рис. 71

В9. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3. Найдите объём пирамиды $ABDA_1$.

B10. Мальчик массой 50 кг разгоняется по льду и врезается в отца массой 80 кг, стоявшего неподвижно. Дальше они катятся вместе.
Скорость мальчика была 5 м/с. После этого они поменялись, и повторили опыт.

Воспользуйтесь законами сохранения импульса и энергии и выясните, насколько больше джоулей тепла выделится во втором случае, чем в первом.

Основные физические формулы, описывающие данный случай:

$m_1 \cdot \vec{v_1} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}$

$$E_{\text{нач}} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}$$

$$E_{\text{конеч}} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2} + Q$$

$E_{\text{нач}} = E_{\text{конеч}}$.

B11. Найдите точку минимума функции $y = (x+1)e^{x-2}$.

B12. Моторная лодка проплыла против течения реки 72 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите уравнение $\log_2(x-3)\log_3(8-x)+2 = \log_2(x-3)^2+\log_3(8-x)$.

C2. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади его основания. Найдите объём этого конуса, если периметр осевого сечения равен $6\sqrt{3}$.

C3. Решите неравенство $\log_{3x-2}(2x+3) \leqslant \frac{|x|}{x}$.

C4. В выпуклом семиугольнике проведены все диагонали, при этом каждый угол семиугольника оказался разбит на пять углов. Эти углы при каждой вершине раскрасили в два цвета — чёрный и белый, через один, начиная всегда с чёрного. Найдите сумму всех «чёрных» углов.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$\begin{cases} xy - 4(x+y) + 12 = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

C6. Трёхзначное число равно сумме своей первой цифры, квадрата второй цифры и куба третьей цифры. Найдите все такие трёхзначные числа, кратные 7.

Вариант №20

Часть 1

B1. На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 30 рублей за штуку. У Вани есть 370 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов он может купить Маше букет на день рождения?

B2. По данной диаграмме (см. рис. 72) определите число месяцев за период с ноября 2008 года по октябрь 2009, в течение которых цена нефти была ниже, чем 48 долларов США за баррель.

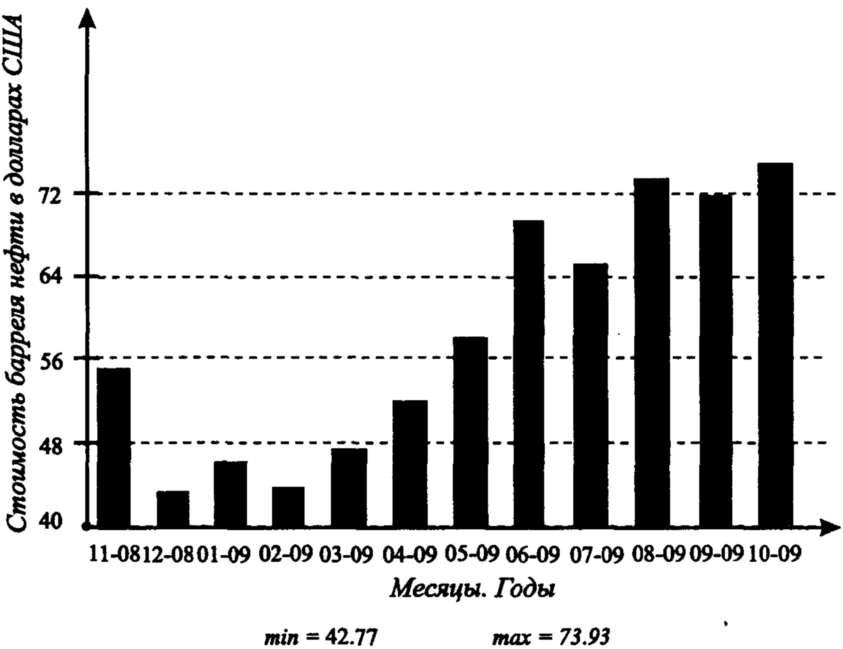


Рис. 72. Динамика мировых цен на нефть

B3. Решите уравнение $\sqrt{\frac{5x+11}{11}} = 11.$

B4. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 20, синус острого угла трапеции равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите боковую сторону трапеции.

B5. Для строительства ангаров можно использовать один из двух типов фундаментов: бетонный или из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 6 кубометров пеноблоков и 4 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 тонн щебня и 50 мешков цемента.

Кубометр пеноблоков стоит 1800 рублей, щебень стоит 600 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 250 рублей.

Сколько рублей придётся заплатить за строительные материалы, если выбирать самый дешёвый вариант?

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображены две заштрихованные фигуры (см. рис. 73). Найдите отношение большей из площадей этих фигур к площади меньшей.

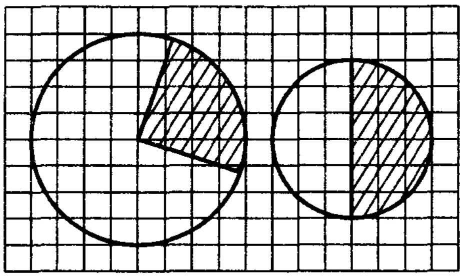


Рис. 73

B7. Найдите значение выражения $\frac{96}{7^{\log_7 6}}$.

B8. На рисунке 74 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 4)$.

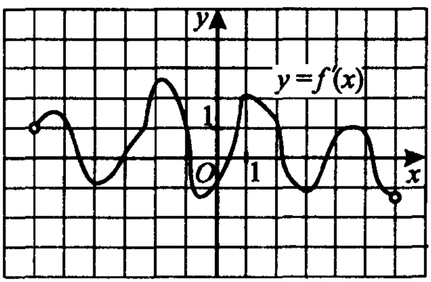


Рис. 74

B9. Из куба со стороной $\sqrt{12}$ вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром $\sqrt{12}$ (см. рис. 75). Найдите площадь поверхности получившейся фигуры.

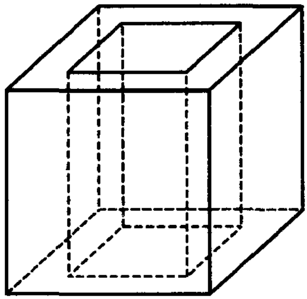


Рис. 75

B10. Мальчик массой 40 кг разгоняется по льду и врезается в отца массой 100 кг, стоявшего неподвижно. Дальше они катятся вместе.
Скорость мальчика была 5 м/с. После этого они поменялись и повторили опыт.

Воспользуйтесь законами сохранения импульса и энергии и выясните, насколько больше джоулей тепла выделится во втором случае, чем в первом.

Основные физические формулы, описывающие данный случай:

$$m_1 \cdot \vec{v_1} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}$$

$$E_{\text{нач}} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}$$

$$E_{\text{конеч}} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2} + Q$$

$$E_{\text{нач}} = E_{\text{конеч}}.$$

B11. Найдите точку максимума функции $y = (x - 1)e^{3-x}$.

B12. Моторная лодка прошла против течения реки 160 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в неподвижной воде равна 13 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

C1. Решите уравнение $\log_2(x+5)\log_5(2-x)+3 = \log_2(x+5)^3+\log_5(2-x)$.

C2. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой полукруг площадью 18π. Найдите объём этого конуса.

С3. Решите неравенство $\log_{4x-3}(3x+4) \leqslant \frac{x}{|x|}$.

С4. В выпуклом семиугольнике проведены все диагонали, при этом каждый угол семиугольника оказался разбит на пять углов. Эти углы при каждой вершине раскрасили в два цвета — чёрный и белый, через один, начиная всегда с чёрного. Найдите сумму всех «белых» углов.

С5. Найдите все значения b, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} xy - 2(x-y) - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ имеет ровно три решения.

С6. Двузначное число равно квадрату суммы его цифр, трёхзначное число равно кубу суммы его цифр. Найдите сумму всех таких двузначных и трёхзначных чисел.

Решение варианта №1

B1. Теплоход рассчитан на $840 + 26 = 866$ человек, следовательно, нужно не менее $\frac{866}{72} = 12\frac{2}{72}$ шлюпок. Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию — 13.

Ответ: 13.

B2. Прибыль от продажи одной унции должна составлять не менее $\frac{35\,000}{100} = 350$ долларов, следовательно, нужно было ждать, пока стоимость унции составит $300 + 350 = 650$ долларов. Это случилось в 2007 году, значит, ждать нужно было $2007 - 2000 = 7$ лет.

Ответ: 7.

B3. $\log_3(4 - x) = 4$; $4 - x = 81$; $x = -77$.

Ответ: -77.

B4. Проведём KH — высоту к основанию.

$$KH = PK\sin\angle P = PK\sqrt{1 - \cos^2\angle P} = 13\sqrt{1 - \frac{105}{169}} = 13 \cdot \frac{8}{13} = 8.$$

Ответ: 8.

B5. При выборе тарифного плана «0» пользователь заплатит $1{,}2 \cdot 950 = 1140$ рублей, при выборе плана «800» — заплатит $650 + (950 - 800) \cdot 2 = 950$ рублей, а при выборе плана «Безлимитный» — заплатит 900 рублей. Самый дешёвый тарифный план — «Безлимитный», и пользователь заплатит 900 рублей.

Ответ: 900.

B6. Длина «нижней» стороны треугольника равна 9 см, а длина проведённой к ней высоты равна 5 см. Искомая площадь равна $\frac{9 \cdot 5}{2} = 22{,}5$ (см^2).

Ответ: 22,5.

B7. $49^{\log_7 4} = (7^2)^{\log_7 4} = (7^{\log_7 4})^2 = 4^2 = 16$.

Ответ: 16.

B8. Так как прямая $y = 38x - 28$ параллельна касательной, то угловой коэффициент касательной равен 38. Следовательно, производная функции $3x^2 + 8x - 2$ в искомой точке x_0 равна 38.

$(3x^2 + 8x - 2)' = 6x + 8$; $6x_0 + 8 = 38$; $x_0 = 5$.

Ответ: 5.

B9. В качестве основания параллелепипеда выберем грань, содержащую одно из оснований цилиндра. Так как в эту грань вписано основание цилиндра — окружность радиуса $\sqrt[3]{2}$, то эта грань является квадратом со стороной $2\sqrt[3]{2}$. Площадь основания параллелепипеда равна $(2\sqrt[3]{2})^2$. Высота параллелепипеда равна высоте цилиндра, то есть равна $\sqrt[3]{2}$. Таким образом, объём параллелепипеда равен $(2\sqrt[3]{2})^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 8$.

Ответ: 8.

B10. Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $-\frac{1}{450}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 \geqslant 13 \Leftrightarrow x^2 - 150x + 5400 \leqslant 0$. Корнями трёхчлена в левой части являются числа 60 и 90, поэтому решением неравенства будет $x \in [60; 90]$. Наименьшим решением является $x = 60$.

Ответ: 60.

B11. Найдём производную данной функции: $y' = e^{(x+2)} + (x+3)e^{x+2} = (x+4)e^{x+2}$. $y' = 0$ при $x = -4$. Таким образом, нужно выбрать наибольшее из значений $y(-3)$, $y(-4)$ и $y(-5)$. $y(-3) = 0$; $y(-4) = -e^{-2} < 0$; $y(-5) = -2e^{-3} < 0$. Наибольшее из этих значений равно 0.

Ответ: 0.

B12. Пусть s км — расстояние между пунктами A и B, v км/ч — искомая скорость. Тогда на весь путь первый автомобиль затратил $\frac{s}{v}$ часов, а второй — $\left(\frac{0{,}5s}{30} + \frac{0{,}5s}{v+20}\right)$ часов. Так как в пункт B автомобили прибыли одновременно, то условию задачи соответствует уравнение $\frac{s}{v} = \frac{0{,}5s}{30} + \frac{0{,}5s}{v+20}$, где $v > 0$. $\frac{2}{v} = \frac{1}{30} + \frac{1}{v+20}$; $60(v+20) = v(v+20) + 30v$; $v^2 - 10v - 1200 = 0$; $v_{1,2} = 5 \pm 35$. Так как $v > 0$, то $v = 5 + 35 = 40$ (км/ч).

Ответ: 40.

C1. ОДЗ: $2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$. На ОДЗ второе неравенство системы тождественно верно, так как слева стоит неотрицательное число, а справа — отрицательное. Решим первое неравенство системы, выполнив замену $t = 5x^2 + 6x - 1$. Неравенство примет вид $t^2 + 3t + 2 \geqslant 0$; $(t+2)(t+1) \geqslant 0$; $t \leqslant -2$ и $t \geqslant -1$. Вернёмся к исходной переменной x. Из неравенства $t \leqslant -2$ получаем $5x^2 + 6x - 1 \leqslant -2$; $5x^2 + 6x + 1 \leqslant 0$. Корнями трёхчлена в левой части являются $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{5}$.

Таким образом, решением последнего неравенства будет
$-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{5}$. Учитывая ОДЗ, получаем $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{5}$.
Из неравенства $t \geqslant -1$ получаем $5x^2 + 6x \geqslant 0$; $x \leqslant -1{,}2$ и $x \geqslant 0$. Учитывая ОДЗ, получаем $x \geqslant 0$.

Объединим найденные решения: $x \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right] \cup [0; +\infty)$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right] \cup [0; +\infty)$.

С2. Пусть B_2 — середина ребра BB_1, C_2 — середина ребра B_1C_1, M и N — точки пересечения прямой B_2C_2 с прямыми BC и CC_1 соответственно, K — точка пересечения AN и A_1C_1 (см. рис. 76).

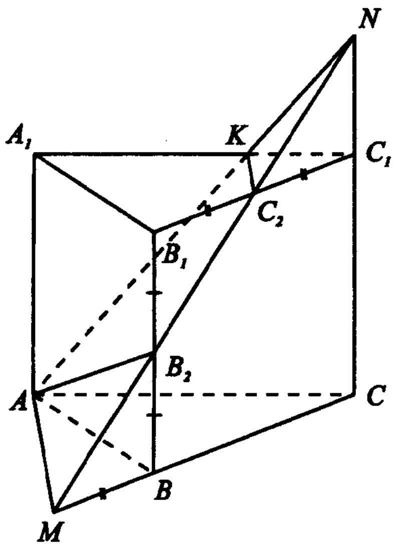


Рис. 76

1) $\triangle B_2B_1C_2 = \triangle B_2BM$ ($BB_2 = B_1B_2$ по условию, $\angle B_2BM = \angle B_2B_1C_2 = 90°$, $\angle BB_2M = \angle B_1B_2C_2$ как вертикальные), следовательно, $BM = B_1C_2 = \frac{B_1C_1}{2} = \frac{BC}{2}$. Отсюда $\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BC}$, так как у этих треугольников высота, проведённая из вершины A, будет общей.

$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC} \cdot \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{36}{2} = 18$. $V_{B_2ABM} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABM} \cdot BB_2 =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 18 \cdot 5 = 30.$

2) $\triangle B_2B_1C_2 = \triangle NC_1C_2$ ($B_1C_2 = C_1C_2$ по условию, $\angle B_2B_1C_2 = \angle NC_1C_2 = 90°$, $\angle NC_2C_1 = \angle B_2C_2B_1$ как вертикальные), следовательно $NC_1 = B_1B_2 = 5$.

3) $\triangle KNC_1 \sim \triangle ANC$, $\triangle C_2NC_1 \sim \triangle MNC$ (в обоих случаях прямоугольные с общим острым углом). $\dfrac{KC_1}{AC} = \dfrac{C_2C_1}{MC} = \dfrac{NC_1}{NC} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

Отсюда $\triangle KC_1C_2 \sim \triangle ACM$ с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{3}$. Поэтому

$\dfrac{S_{\triangle KC_1C_2}}{S_{\triangle ACM}} = \dfrac{1}{9}$.

4) $V_{NMAC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle MAC} \cdot NC = \dfrac{1}{3} \cdot (S_{\triangle MAB} + S_{\triangle ABC}) \cdot (NC_1 + C_1C) =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot (18 + 36) \cdot (5 + 10) = 270.$

5) $\dfrac{V_{NC_2KC_1}}{V_{NMAC}} = \dfrac{S_{\triangle KC_1C_2}}{S_{\triangle ACM}} \cdot \dfrac{NC_1}{NC} = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{27}$. Отсюда $V_{NC_2KC_1} = 10$.

6) Объём одной из частей, полученных при сечении призмы, равен $V_{NMAC} - V_{NC_2KC_1} - V_{B_2ABM} = 270 - 10 - 30 = 230$.

7) Объём другой части равен $V_{ABCA_1B_1C_1} - 230 = 36 \cdot 10 - 230 = 130$.

Ответ: 130.

С3. Второе неравенство системы можно записать в виде $(x-3)^2+y^2 \leqslant 4^2$. Оно задаёт круг с центром в точке $(3;0)$ и радиусом 4. Теперь найдём, какие решения первого неравенства находятся в найденном круге.

Если $x < 0$, то в круге имеем: $|x| \leqslant 1 \Rightarrow |x-y| \geqslant 5 \Rightarrow |x|+|y| \geqslant 5 \Rightarrow |y| \geqslant 4$. Решения первого неравенства, полученные при отрицательных x, не могут находиться в круге.

Если $x \geqslant 0$, то в круге имеем: $|x-y| \geqslant 6-x$. Очевидно выполнение этого неравенства при $x \geqslant 6$. При $x < 6$ имеем: $|x-y| \geqslant 6-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y \leqslant x-6, \\ x-y \geqslant 6-x; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \geqslant 6, \\ 2x-y \geqslant 6. \end{array}\right.$ Все решения первого неравенства совокупности находятся вне круга. Второе неравенство определяет часть плоскости, лежащую правее и ниже прямой $y = 2x-6$. Заметим, что все найденные ранее решения $x \geqslant 6$ также лежат в найденной части плоско-

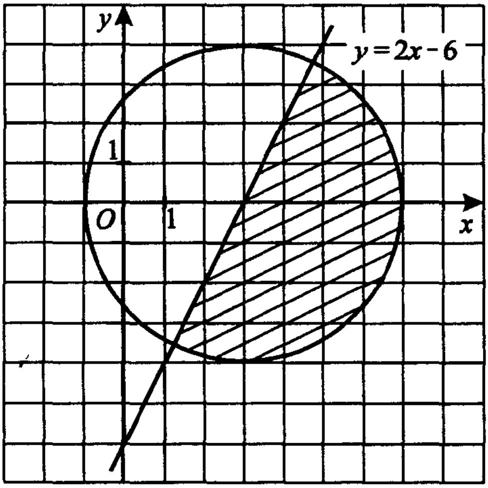


Рис. 77

сти. Кроме того, прямая $y = 2x - 6$ проходит через точку (3; 0), являющуюся центром круга (см. рис. 77). Следовательно, в найденную часть плоскости попадает ровно половина площади круга. Искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 4^2\pi = 8\pi$.

Ответ: 8π.

С4. 1) Так как сумма углов четырёхугольника равна 360°, то $\angle MDA = 360° - \angle M - \angle ABM - \angle DAB = \angle MCB$ (по условию). Отсюда $BC \parallel AD$ и $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD (см. рис. 78).

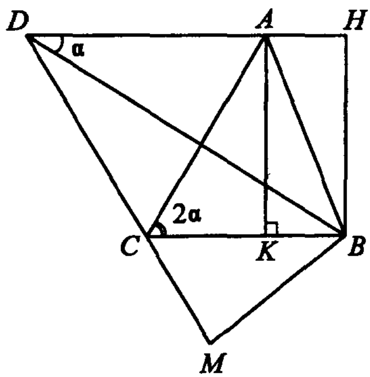


Рис. 78

2) Обозначим $\angle ADB = \alpha$. Тогда $\angle ACB = 2\alpha$. В $\triangle ABC$ проведём высоту AK. Из $\triangle CAK$ получаем: $AK = AC\sin 2\alpha = 5\sin 2\alpha$;
$CK = AC\cos 2\alpha = 5\cos 2\alpha$.

3) Опустим перпендикуляр BH на прямую AD. $AHBK$ — прямоугольник, поэтому $AH = BK = CB - CK = 5 - 5\cos 2\alpha$. Из $\triangle DHB$ получаем: $BH = DH\operatorname{tg}\alpha = (DA + AH)\operatorname{tg}\alpha = (11 - 5\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$.

4) Приравнивая найденные значения противоположных сторон BH и AK прямоугольника $AHBK$, получаем: $(11 - 5\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha = 5\sin 2\alpha$;

$(11 - 5\cos 2\alpha)\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 5 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$; $11 - 5\cos 2\alpha = 5 \cdot 2\cos^2\alpha$;

$11 - 5\cos 2\alpha = 5(1 + \cos 2\alpha)$; $\cos 2\alpha = 0{,}6$; $\sin 2\alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$.

5) $AK = 5\sin 2\alpha = 5 \cdot 0{,}8 = 4$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AK(AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 4(6 + 5) = 22.$$

Ответ: 22.

С5. Пусть u и v — корни уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x - a = 0$, $u \neq v$. Тогда $x^3 - 5x^2 + 7x - a = (x - u)^2(x - v)$. Раскрывая скобки и приводя подобные, получим: $-(v + 2u)x^2 + (2uv + u^2)x - u^2v = -5x^2 + 7x - a$. Приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях, получим систему

$$\begin{cases} v + 2u = 5, \\ 2uv + u^2 = 7, \\ u^2v = a. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $v = 5 - 2u$ и подставляем это выражение во второе уравнение системы: $2u(5 - 2u) + u^2 = 7$; $3u^2 - 10u + 7 = 0$; $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{7}{3}$. Соответствующими значениями v будут $v_1 = 3$, $v_2 = \dfrac{1}{3}$.

Кроме того, каждое из чисел пары (u, v) должно быть решением уравнения $x^3 - 13x + b = 0$ при некотором b. Для этого необходимо выполнение $b = 13u - u^3 = 13v - v^3$. Проверим для пары (u_1, v_1): $13 \cdot 1 - 1^3 = 13 \cdot 3 - 3^3$ соответствующие значения параметров: $b = 12$, $a = 1^3 \cdot 3 = 3$. Теперь проверим для пары (u_2, v_2): $13 \cdot \dfrac{7}{3} - \left(\dfrac{7}{3}\right)^3 \neq 13 \cdot \dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$. Поэтому u_2 и v_2 не могут одновременно быть корнями уравнения $x^3 - 13x + b = 0$.

Ответ: $a = 3$, $b = 12$.

С6. Вначале докажем, что диагональ не проходит через узлы сетки, лежащие внутри прямоугольника. Предположим противное, то есть диагональ проходит через некоторый внутренний узел. Введём прямоугольную декартову систему координат так, что левая нижняя вершина прямоугольника будет началом отсчёта, а оси проходят через стороны прямоугольника. Тогда координаты правой верхней вершины прямоугольника будут (m, n), а координаты внутреннего узла, через который прошла диагональ, будут (m_1, n_1). Из подобия прямоугольных треугольников получаем: $\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}$; $mn_1 = nm_1$. Отсюда mn_1 делится на n. Так как m и n взаимно просты, то n_1 должно делится на n, что невозможно ввиду $n_1 < n$. Получили противоречие, следовательно, ложным было предположение о прохождении диагонали через внутренний узел прямоугольника.

Будем двигать точку по диагонали от левой нижней к правой верхней вершине прямоугольника. Так как диагональ не проходит через внутренние узлы, то точка при движении пройдёт через $m-1$ вертикальных и $n-1$ горизонтальных сторон клеток. При каждом переходе через сторону клетки точка попадает в новую клетку. Учитывая также клетку, находящуюся в начале движения, получим, что диагональ прямоугольника пересекает $(m-1)+(n-1)+1 = m+n-1$ клеток. Непересечёнными останутся $mn - m - n + 1 = (m-1)(n-1)$ клеток. Исходя из условия, получим уравнение $(m-1)(n-1) = 116$, которое решим в натуральных числах. Натуральными делителями числа 116 являются 1, 2, 4, 29, 58, 116. Учитывая условие $m > n$, получим три решения последнего уравнения:

$$\begin{cases} m-1=116, \\ n-1=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=117, \\ n=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-1=58, \\ n-1=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=59, \\ n=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-1=29, \\ n-1=4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=30, \\ n=5. \end{cases}$$

Из найденных решений условию задачи удовлетворяют только первые два, так как НОД$(30,5) = 5 \neq 1$.

Ответ: $(117;2)$, $(59;3)$.

Ответы

Ответы к заданиям B

№	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	13	7	–77	8	900	22,5	16	5	8	60	0	40
2	7	7	2	0,6	900	14	17	2,25	1,5	90	2	60
3	8	15	–1	0,5	7056	8,5	1	–3,5	343	17	–2	7
4	20	4000	–1	35	6460	0,25	1,5	9	68	19	9	16
5	272	75	1	85	28175	4	7	–7	0,4	0,625	5	11,5
6	10530	1980	5	21	7920	4	0,5	0,5	3,75	0,875	12	12
7	1300	1972	–6	0,45	4824	8	2	–3	12	10	3	1
8	20	8	–3,5	1,75	4656	22	15	2	16,5	9	4	24
9	156600	2	6	1,05	1386	21	12	5	3,5	700	4	4
10	6	1,2	128	45	1771	28	–0,5	4	2	500	13	22

№	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
11	8	1,7	18	0,28	393600	13	4	−6	126	250	4	31
12	30	1991	8	4	465500	3	3	0,5	3	440	7	30
13	12	7	−7	0,35	203500	2	0,5	1	346	48	3	27
14	168	5,5	2	0,5	210000	15	108	−3	180	60	7	7
15	6	4	2,5	14	2,75	16	25	6	3,25	10000	−9	3
16	12	14701	11	27	3	2	4	7	360	2000	−6	6
17	13	6	23	36	214060	2,25	2	4	9	5,2	11	11
18	35	2	237	−0,6	216600	4	2	−1	18	2,6	9	14
19	95	5	16	−1,05	11150	0,25	56	5	0,5	0	−2	9
20	11	4	264	14	11800	1,125	16	3	90	0	2	3

Ответы к заданиям С

№	С1	С2	С3	С4	С5	С6
1	$\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right] \cup [0; +\infty)$	130	8π	22	$a = 3,\ b = 12$	117; 2 или 59; 3
2	$[-2{,}1; -2) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$	$\frac{1}{3}$	4π	$\frac{49}{4}$	$p = -\frac{4}{27}, k = \frac{16}{27}$	5; 32 или 2; 125
3	$\left(0; \frac{1}{4}\right]$	26	4	$\frac{350}{\sqrt{33}}$	$a = 5,$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$	Такого шага не будет
4	$(0; 27]$	72	3	12	$\lvert\alpha\rvert \geqslant \frac{\pi}{2}$	Такого шага не будет
5	$\left(-\infty; \frac{4}{5}\right) \cup \{1\} \cup \{5\}$	9	$(0; 1) \cup (1{,}5; 2)$	$14\sqrt{5}$	1	13
6	$(-8; -3) \cup (-3; 2) \cup$ $\cup (2; +\infty)$	$\frac{4\sqrt{15}}{15}$	$(0{,}75; 1) \cup (1; 2) \cup$ $\cup (3; +\infty)$	3 : 1	0	83, 88, 93, 98
7	0,5	8	1	0,375	$(2 - 2\sqrt{21}; 4)$	Да. Например, $p(x) = \frac{1}{6}(x^3 - x)$

№	C1	C2	C3
8	1	45°	Нет корней
9	$(1;3),(1;-3)$	10	$\{-3\}$
10	$\left(-\frac{1}{3};2\right),\left(-\frac{1}{3};-2\right)$	15	$\{1\}$
11	$(0;1)\cup(3+\log_2 5;+\infty)$	$2\sqrt{6}$	$\{-4\}$
12	$(0;1)\cup(7+\log_3 5;+\infty)$	120π	$\left[\frac{19}{3};+\infty\right)$
13	$(5;1),\left(1;\frac{1}{5}\right)$	$\frac{13\sqrt{74}}{16}$	$\left[\log_3\left(\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right);\log_3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\cup$ $\cup\left[\log_3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right);\frac{\log_3\left(\frac{9+\sqrt{85}}{2}\right)}{2}\right]$
14	$(-2;-2),(3;3)$	30	$\left[\log_5(\sqrt{2}-1);\frac{\log_5(2+\sqrt{5})}{2}\right]$
15	$10;\ \ 5+1{,}5\sqrt{5}$	1	решений нет
16	$-10;\ \ -5-0{,}5\sqrt{65}$	$\sqrt{3}$	решений нет

№	C4	C5	C6
8	1	$(-0{,}75; 1]$	Да. Например, $q(x) = \frac{1}{24}(x^3 - x)(x + 2)$
9	24	$\pm\frac{1}{3}, \pm 1$	± 880
10	81,6	$\{-2\} \cup (0; +\infty)$	± 88
11	-3; 3	0	16, 25, 36, 49, 64, 81
12	$2; 4 + 2\sqrt{3}$	1	323
13	6; 8	Нет	$(-3; 0); (-1; 0)$
14	30	Да	$(-1; 0)$; $(1; 0)$
15	49	$a = -2{,}25$; $(-0{,}75; -0{,}75; 2{,}25)$	таких значений нет
16	$\sqrt{3}$	2	таких значений нет

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
17	$0 \leqslant x \leqslant 2,\ y = 1$	$-2\sqrt{2}$	$x \geqslant 0$	$\sqrt{2} \pm 1$	$\pm 512;\ \pm 32$	$k = 2,\ n = 2$
18	$0 \leqslant x \leqslant 3,\ y = 1$	$2\sqrt{2}$	$x \leqslant 2$	$-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}$	8; 16	решений нет
19	5	3π	$\left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup [5; +\infty)$	540	$a \in (8; 72)$	175; 518
20	−3	$9\pi\sqrt{3}$	$\left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup [7; +\infty)$	360	18	593

Литература

1. Единый государственный экзамен по математике. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2010 г. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

2. Единый государственный экзамен по математике. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2010 г. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

3. Единый государственный экзамен по математике. Спецификация контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2010 г. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

4. Единый государственный экзамен по математике. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников по математике для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2010 г. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

5. Открытый банк задач ЕГЭ по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: МИОО. — 2009. — Режим доступа: www.mathege.ru, свободный.

6. *Лукин Р. Д., Лукина Т. К., Якунина М. С.* Устные упражнения по алгебре и началам анализа. — М.: Просвещение, 1989. — 96 с.

7. *Лысенко Ф. Ф. и др.* Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010 / Под редакцией *Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова.* — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2009. — 480 с.

8. *Лысенко Ф. Ф. и др.* Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2010 / Под редакцией *Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова.* — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2009. — 288 с.

9. Программы для общеобразовательных учреждений (школ, гимназий, лицеев): Математика, 5–11 кл./Составители: Г. М. Кузнецова, Н. Г. Миндюк. — М.: Дрофа, 2000, 2002.

10. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; среднее (полное) общее образование. 2004 г. (Приказ МО РФ от 05.03.04 №1089).

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2010.
Учебно-тренировочные тесты

Учебно-методическое пособие

Художественное оформление,
разработка серии *И. Лойкова*
Компьютерная верстка *Л. Шверида*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать с оригинал-макета 28.12.2009
Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,3.

Заказ № 508. Тираж 30 000 экз.

Издательство «ЛЕГИОН-М»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

Отпечатано в соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В