МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2009 год

Задачи для 5 класса

1. Расставьте в клетках квадрата 4×4 одну единицу, две двойки, 3 тройки, 4 четверки, 5 пятерок и еще одну любую цифру по своему выбору так, чтобы во всех строках получилась одна и та же сумма цифр.
2. Расположите на плоскости 12 спичек так, чтобы они образовали как можно больше различных квадратов. Укажите в ответе число этих квадратов.
3. Аня хочет положить в каждую коробку одинаковое число своих игрушек. Сначала она попыталась разложить их по 12 в каждую коробку, но 5 игрушек оказались лишними. Затем она попробовала разложить их по 15 в каждую коробку, но для последней коробки остались только 2 игрушки. Тогда Аня догадалась взять еще одну коробку. Сколько игрушек Аня должна теперь положить в каждую коробку, чтобы добиться своей цели?
4. Какой цифрой заканчивается десятичная запись числа 2008^{2008}?
5. Можно ли так расположить на плоскости 5 отрезков, чтобы каждый из них пересекался со всеми остальными, кроме какого-то одного?
6. Серия трамвайных билетов включает все шестизначные номера от 000000 до 999999. Петербурженка Ася коллекционирует билеты, номера которых делятся на 78. Москвич Вася предпочитает билеты, номера которых делятся на 77, но не делятся на 78. Каких билетов в серии больше и на сколько: интересных Асе или Васе?

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2009 год

Задачи для 6 класса

1. Расставьте одну единицу, две двойки, 3 тройки, 4 четверки, 5 пятерок, 6 шестерок, 7 семерок и 8 восьмерок в клетках квадрата 6×6 так, чтобы во всех строках была одна и та же сумма цифр.
2. Расставьте одну единицу, две двойки, 3 тройки, 4 четверки, 5 пятерок, 6 шестерок, 7 семерок и 8 восьмерок в клетках квадрата 6×6 так, чтобы во всех строках была одна и та же сумма цифр.
3. Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат 6×6. Проведите через его вершины замкнутую ломаную без самопересечений, все остальные вершины которой тоже лежали бы в узлах сетки, а площадь ограниченной ею фигуры была бы как можно меньше.
4. Поверхность большого кубика Рубика состоит из 6 квадратных граней, каждая из которых разбита на 16 клеток (4×4). Муравей может из любой клетки переползти в любую из четырех соседних – имеющих с ней общую сторону (в той же грани, либо через ребро). Помогите муравью обойти все клетки, побывав в каждой из них ровно по одному разу.
5. Магазин снизил цену товара в два раза, благодаря чему продал его в 4 раза больше. Как и во сколько раз изменилась выручка магазина?
6. Четыре фломастера стоят дороже пяти авторучек, четыре авторучки дороже трех фломастеров, а два карандаша ровно столько же, сколько фломастер и авторучка вместе взятые. Антон купил 8 карандашей, а Борис – 9 авторучек. Кто из мальчиков потратил больше денег?

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2009 год

Задачи для 7 класса

1. Расставьте одну единицу, две двойки, 3 тройки, 4 четверки, 5 пятерок, 6 шестерок, 7 семерок и 8 восьмерок в клетках квадрата 6×6 так, чтобы во всех строках была одна и та же сумма цифр.
2. Расположите на плоскости 24 спички так, чтобы они образовали как можно больше различных квадратов. Укажите в ответе число этих квадратов. Найдите все пары натуральных чисел A и B, для которых $(A^2-B^2)^2-(2^B)^2=2009$.
3. Поверхность гигантского кубика Рубика состоит из 6 квадратных граней, каждая из которых разбита на 25 клеток (5×5). Муравей может из любой клетки переползти в любую из четырех соседних – имеющих с ней общую сторону (в той же грани, либо через ребро). Помогите муравью обойти все клетки, побывав в каждой из них ровно по одному разу.
4. Магазин снизил цену товара на 20%, благодаря чему продал его на 20% больше. На сколько процентов и в какую сторону изменилась выручка магазина?
5. Восемь фломастеров стоят дороже четырех карандашей и пяти авторучек, четыре авторучки дороже трех фломастеров, а два карандаша ровно столько же, сколько фломастер и авторучка вместе взятые. Юрий купил 6 фломастеров, а Павел – 7 авторучек. Кто из мальчиков потратил больше денег?

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2009 год

Задачи для 8 класса

1. Расставьте одну единицу, две двойки, 3 тройки, 4 четверки, 5 пятерок, 6 шестерок, 7 семерок и 8 восьмерок в клетках квадрата 6×6 так, чтобы во всех строках была одна и та же сумма цифр.
2. Расположите на плоскости 24 спички так, чтобы они образовали как можно больше различных квадратов. Укажите в ответе число этих квадратов.
3. Найдите все пары натуральных чисел A и B, для которых $(A^2 - B^2)^2 - (2^B)^2 = 2009$.
4. У двух различных треугольников попарно равны все углы и две пары сторон. Длины этих сторон (из разных пар) относятся друг к другу как $4 \div 5$. Найдите отношение площадей этих треугольников.
5. Однажды в феврале было пять пятниц. В каких месяцах того же года было по пять воскресений?
6. Два карандаша стоят ровно столько же, сколько фломастер и авторучка вместе взятые, а 16 фломастеров стоят дороже девяти карандашей и десяти авторучек (вместе взятых). Кирилл купил 23 фломастера, а Михаил – 29 авторучек. Кто из мальчиков потратил больше денег?

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2009 год

Задачи для 9 класса

1. Расставьте 4 четверки, 5 пятерок, 6 шестерок, 7 семерок, 8 восьмерок, 9 девяток и 10 троек в клетках квадрата 7×7 так, чтобы во всех строках была одна и та же сумма цифр.
2. Даны две концентрические окружности. В большей из них провели хорду, которая оказалась касательной для меньшей окружности. Найдите площадь кольца между окружностями, зная, что длина этой хорды равна 9.
3. Найдите все пары натуральных чисел A и B, для которых $(A^B - B^2)^2 - (2^B)^2 = 2009$.
4. У двух различных треугольников попарно равны все углы и две пары сторон. Длины этих сторон (из разных пар) относятся друг к другу как $4 \div 5$. Найдите отношение площадей этих треугольников.
5. Найдите все натуральные числа, равные сумме квадратов своих цифр.
6. Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат 9×9. Проведите через его вершины замкнутую ломаную без самопересечений, все остальные вершины которой тоже лежали бы в узлах сетки, а площадь ограниченной ею фигуры была бы как можно меньше.

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2009 год

Задачи для 10 класса

1. Расставьте 4 четверки, 5 пятерок, 6 шестерок, 7 семерок, 8 восьмерок, 9 девяток и 10 троек в клетках квадрата 7×7 так, чтобы во всех строках была одна и та же сумма цифр.
2. Даны две концентрические окружности. В большей из них провели хорду, которая оказалась касательной для меньшей окружности. Найдите площадь кольца между окружностями, зная, что длина этой хорды равна 10.
3. Найдите все натуральные M, для которых $(7^{\sqrt{M}}-M)^{\sqrt{M}}-(\sqrt{M})^{M}=2009$.
4. Кратчайшей между двумя точками на поверхности куба называется ломаная наименьшей длины с концами в этих точках, целиком лежащая на поверхности куба (в случае точек из одной грани это будет отрезок). Треугольником на поверхности куба называют наименьшую по площади область на поверхности куба, границей которой служат кратчайшие, попарно соединяющие три точки. Какое наибольшее число вершин куба может оказаться внутри треугольника на его поверхности?
5. Найдите все натуральные числа, равные сумме квадратов своих цифр.
6. Окружность радиуса r с центром в точке $(p;q)$ на координатной плоскости пересекает параболу $y=ax^2+bx+c$ в четырех различных точках. Докажите, что через те же 4 точки проходит еще одна парабола. Составьте её уравнение.

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2009 год

Задачи для 11 класса

1. Расставьте 4 четверки, 5 пятерок, 6 шестерок, 7 семерок, 8 восьмерок, 9 девяток и 10 троек в клетках квадрата 7×7 так, чтобы во всех строках была одна и та же сумма цифр.
2. Даны две концентрические окружности. В большей из них провели хорду, которая оказалась касательной для меньшей окружности. Найдите площадь кольца между окружностями, зная, что длина этой хорды равна 2009.
3. Найдите все натуральные M, для которых $(7^{\sqrt{M}}-M)^{\sqrt{M}}-(M)^{\sqrt{M}}=2009$.
4. Кратчайшей между двумя точками на поверхности куба называется ломаная наименьшей длины с концами в этих точках, целиком лежащая на поверхности куба (в случае точек из одной грани это будет отрезок). Треугольником на поверхности куба называют наименьшую по площади область на поверхности куба, границей которой служат кратчайшие, попарно соединяющие три точки. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник на поверхности куба с ребром длины 1?
5. Приведите пример двух функций $f(x)$ и $g(x)$, одна из которых монотонно возрастает, а другая монотонно убывает, для которых равенство $f(\sin(g(x)))=g(\sin(f(x)))$ имеет смысл и выполняется при любом вещественном x.
6. Производные многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ нацело делятся на x^{2009}. Докажите, что таким же свойством обладает и их произведение.