

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕНИЕ»**

2010 год

Задачи для 5 класса

1. Задуманное число добавили к числу, большему его на единицу. Затем из суммы вычли число, на единицу меньшее задуманного. В итоге получилось 23. Какое число было задумано?
2. Какое наименьшее 10-значное число можно получить, по-разному записывая шесть чисел 315, 41, 6, 7, 63 и 2 одно за другим?
3. Две бутылки A и B заполнены водой. Сначала $\frac{1}{4}$ воды из A перелили в B , а затем $\frac{1}{3}$ воды из B перелили в A , после чего количество воды в них сравнялось. Найдите первоначальное отношение количества воды в этих бутылках.
4. В некотором месяце три воскресенья пришлись на чётные числа. Каким днём недели могло быть 22 число этого месяца?
5. Оттолкнувшись левой ногой, Кенгуру прыгает на 2 метра, правой — на 4, а обеими — на 7. Какое наименьшее число таких прыжков нужно сделать, чтобы набрать в точности 300 метров?
6. Найдите натуральное число N , для которого $N + 53$ и $N - 36$ — полные квадраты.
7. Из квадрата со стороной 100 вырезали квадрат со стороной 80. Оставшийся кусок разрезали на единичные квадратики (это можно сделать), из которых Павел хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна его сторона?

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕНИЕ»**

2010 год

Задачи для 6 класса

1. Половину положительного числа умножили на 20 % от этого же числа и получили 22,5 .
Найдите само число.
2. Среднее арифметическое шести чисел равно 17. После того, как одно из шести чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся пяти чисел оказалось равно 19. Чему было равно удалённое число?
3. Количество книг у Петра больше 150, но меньше 200. Из них 20 % — романы, а $\frac{1}{7}$ — сборники стихов. Сколько книг у Петра?
4. Оттолкнувшись левой ногой, Кенгуру прыгает на 2 метра, правой — на 4, а обеими — на 7. Какое наименьшее число таких прыжков нужно сделать, чтобы набрать в точности 1000 метров?
5. Найдите натуральное число N , для которого $N + 37$ и $N - 46$ — полные квадраты.
6. Найдите наименьшее x , для которого

$$x^2(x - 5)(x + 3)(x + 12) > 0.$$

7. Из квадрата со стороной 100 вырезали квадрат со стороной 80. Оставшийся кусок разрезали на единичные квадратики (это можно сделать), из которых Павел хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна его сторона?

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕНИЕ»

2010 год

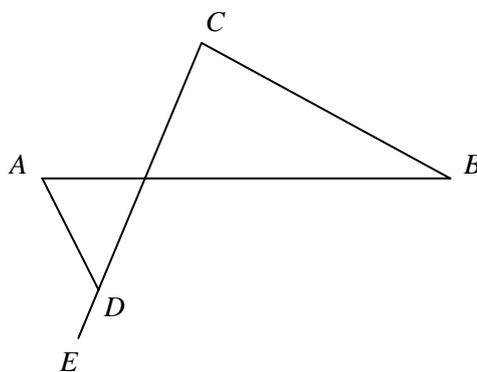
Задачи для 7 класса

1. Лёша, Ганс и Стас сложились и купили палатку. Стас заплатил 60 % от её цены, Лёша 40 % от оставшейся суммы, а Ганс — последние 30 долларов. Сколько стоила палатка?
2. Какой цифрой заканчивается произведение $7 \cdot 27 \cdot 47 \cdot 67 \cdot \dots \cdot 2007$?
3. Пять положительных чисел a, b, c, d и e таковы, что $ab = 2, bc = 3, cd = 4, de = 5$. Чему равно $\frac{e}{a}$?
4. Поезд состоит из локомотива и пяти вагонов: I, II, III, IV и V. Сколькими способами можно расставить эти вагоны при условии, что I вагон должен быть ближе к локомотиву, чем II, а порядок остальных не важен?

5. Зная, что $x + 3y = 8$, найдите $\frac{(2x - 6y)}{(0,25x^2 - 2,25y^2)}$.

6. Найдите наименьшее положительное число, нацело делящееся на 12, десятичная запись которого содержит только нули и единицы.

7. На рисунке, выполненном с нарушением реальных размеров, должны быть $\angle A = 22^\circ, \angle C = 60^\circ, \angle ADE = 117^\circ$. Найдите $\angle B$.

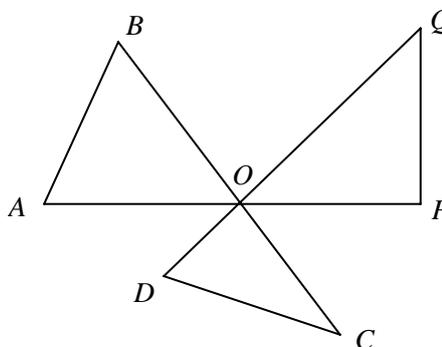


МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕНИЕ»

2010 год

Задачи для 8 класса

1. Джо, Алик и Витя купили несколько конфет. Джо заплатил 100 центов за четыре карамельки, шоколадку и ириску. Алик заплатил 70 центов за три ириски, две карамельки, шоколадку. Витя заплатил 50 центов за две шоколадки и карамельку. Сколько стоила шоколадка?
2. Для четырёх чисел составили шесть попарных сумм. Четыре меньших из них оказались равны 1, 5, 8 и 9. Найдите две оставшиеся.
3. Поезд состоит из локомотива и пяти вагонов: I, II, III, IV и V. Сколькими способами можно расставить эти вагоны при условии, что I вагон должен быть ближе к локомотиву, чем II, а порядок остальных не важен?
4. Зная, что $x + 3y = 8$ найдите $\frac{(2x - 6y)}{(0,25x^2 - 2,25y^2)}$.
5. Найдите наименьшее положительное число, нацело делящееся на 12, десятичная запись которого содержит только нули и единицы.
6. Если $x = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2009^2$, а $y = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 2008 \cdot 2010$, то чему равно $x - y$?
7. На рисунке, выполненном с нарушением реальных размеров, треугольник OPQ должен быть равносторонним. Найдите сумму величин углов $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$.



МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2010 год

Задачи для 9 класса

1. В доме 9 этажей (нумерация которых начинается с 1). Со всех этажей, кроме самого нижнего, лифт можно вызвать только для движения на нижний этаж. При движении вниз лифт остановится только на тех этажах, откуда его вызвали, а также в самом низу. С нижнего этажа можно заказать лифт на любой набор этажей. При движении вверх лифт остановится только на заказанных этажах. Если после выхода всех пассажиров из лифта, кто-то ещё выше ожидает его на спуск, то лифт продолжит движение до самого верхнего из ожидающих (но не обязательно до самого верхнего этажа). Промежуток между соседними этажами лифт проходит за 10 секунд. Те же 10 секунд занимает любая остановка (в том числе, на крайних этажах). Человек Рассеянный хочет спуститься с самого верхнего этажа на самый нижний. Он не знает этих правил и по ошибке выходит из лифта всякий раз, как только лифт останавливается на новом для него этаже. Немедленно вернуться в лифт Человек Рассеянный не успевает, но сразу же после ухода лифта нажимает кнопку его вызова на спуск. Человек Рассеянный запоминает посещенные этажи и повторно на них уже не выходит. Какое наибольшее количество времени займёт его спуск?
2. Внутри правильного 9-угольника со стороной длины 5 расположен правильный 9-угольник со стороной длины 4. Пётр нашёл площадь многоугольного «кольца» между ними и построил правильный 9-угольник равной площади. Найдите длину стороны этого правильного 9-угольника.
3. Безумный Кролик утверждает, будто он нашёл наибольшее натуральное число N , для которого число $N^{2010} + 1$ — простое. Сколько цифр содержит десятичная запись такого N ?
4. Вася сложил все различные числа, которые получаются перестановками цифр в числе 2010 (ноль не может быть первой цифрой числа). Петя сделал то же самое с числом 3003. Чья сумма оказалась больше? Укажите в ответе обе суммы.
5. Длины медиан треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите угол между двумя меньшими медианами.
6. На каждой стороне квадрата выбрали по две точки. Каждую из этих точек соединили с обоими концами противоположной стороны квадрата. Если какие-то три (или четыре) из этих отрезков пересекутся в одной точке, то такая точка пересечения учитывается только один раз. Найдите наименьшее число точек пересечения внутри квадрата. Укажите, в какой пропорции для этого надо разбить стороны квадрата.
7. Маг взял три куба, длины рёбер которых оказались последовательными натуральными числами. Затем он разрезал их на единичные кубики. Наконец, из этих кубиков он сложил новый куб. Найдите длины рёбер этих кубов.

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2010 год

Задачи для 10 класса

1. В доме 10 этажей (нумерация которых начинается с 1). Со всех этажей, кроме самого нижнего, лифт можно вызвать только для движения на нижний этаж. При движении вниз лифт остановится только на тех этажах, откуда его вызвали, а также в самом низу. С нижнего этажа можно заказать лифт на любой набор этажей. При движении вверх лифт остановится только на заказанных этажах. Если после выхода всех пассажиров из лифта, кто-то ещё выше ожидает его на спуск, то лифт продолжит движение до самого верхнего из ожидающих (но не обязательно до самого верхнего этажа). Промежуток между соседними этажами лифт проходит за 10 секунд. Те же 10 секунд занимает любая остановка (в том числе, на крайних этажах). Человек Рассеянный хочет спуститься с самого верхнего этажа на самый нижний. Он не знает этих правил и по ошибке выходит из лифта всякий раз, как только лифт останавливается на новом для него этаже. Немедленно вернуться в лифт Человек Рассеянный не успевает, но сразу же после ухода лифта нажимает кнопку его вызова на спуск. Человек Рассеянный запоминает посещенные этажи и повторно на них уже не выходит. Какое наибольшее количество времени займёт его спуск?
2. Внутри правильного 10-угольника со стороной длины 10 расположен правильный 10-угольник со стороной длины 8. Пётр нашёл площадь многоугольного «кольца» между ними и построил правильный 10-угольник равной площади. Найдите длину стороны этого правильного 10-угольника.
3. На плоскости провели 10 прямых, каждая из которых параллельна какой-то из координатных осей. Рассматриваются квадраты, все вершины которых лежат в пересечении каких-то двух из этих 10 прямых. Какое наибольшее число различных квадратов может при этом получиться?
4. Сумма длин диагоналей четырехугольника равна 1. Найдите наибольшее значение его площади.
5. Известно, что оба корня квадратного трёхчлена $x^2 + px + 2010 = 0$ — натуральные числа. Сколько разных значений может принимать коэффициент p , чтобы выполнялось это свойство?
6. На каждой стороне квадрата выбрали по две точки. Каждую из этих точек соединили с обоими концами противоположной стороны квадрата. Если какие-то три (или четыре) из этих отрезков пересекутся в одной точке, то такая точка пересечения учитывается только один раз. Найдите наименьшее число точек пересечения внутри квадрата. Укажите, в какой пропорции для этого надо разбить стороны квадрата.
7. На трёх разных координатных осях выбрали точки A , B и C . Оказалось, что площади треугольников OAB , OAC и OBC равны соответственно 10, 20 и 20. Найдите площадь треугольника ABC .

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2010 год

Задачи для 11 класса

1. В доме 11 этажей (нумерация которых начинается с 1). Со всех этажей, кроме самого нижнего, лифт можно вызвать только для движения на нижний этаж. При движении вниз лифт остановится только на тех этажах, откуда его вызвали, а также в самом низу. С нижнего этажа можно заказать лифт на любой набор этажей. При движении вверх лифт остановится только на заказанных этажах. Если после выхода всех пассажиров из лифта, кто-то ещё выше ожидает его на спуск, то лифт продолжит движение до самого верхнего из ожидающих (но не обязательно до самого верхнего этажа). Промежуток между соседними этажами лифт проходит за 10 секунд. Те же 10 секунд занимает любая остановка (в том числе, на крайних этажах). Человек Рассеянный хочет спуститься с самого верхнего этажа на самый нижний. Он не знает этих правил и по ошибке выходит из лифта всякий раз, как только лифт останавливается на новом для него этаже. Немедленно вернуться в лифт Человек Рассеянный не успевает, но сразу же после ухода лифта нажимает кнопку его вызова на спуск. Человек Рассеянный запоминает посещенные этажи и повторно на них уже не выходит. Какое наибольшее количество времени займёт его спуск?
2. Внутри правильного 11-угольника со стороной длины 25 расположен правильный 11-угольник со стороной длины 24. Пётр нашёл площадь многоугольного «кольца» между ними и построил правильный 11-угольник равной площади. Найдите длину стороны этого правильного 11-угольника.
3. В пространстве провели 30 плоскостей, каждая из которых параллельна каким-то двум из координатных осей. Рассматриваются параллелепипеды, все грани которых лежат в каких-то из этих 30 плоскостей. Какое наибольшее число различных параллелепипедов может при этом получиться?
4. Разложите многочлен $x^{2010} + 1$ не менее, чем на 4 множителя.
5. В данном треугольнике провели средние линии. Затем в образованном ими треугольнике провели свои средние линии. Вершины третьего треугольника соединили с соответствующими вершинами первого. Длины проведенных отрезков оказались равны 5, 12 и 13. Найдите угол между двумя меньшими медианами исходного треугольника
6. На каждой стороне квадрата выбрали по две точки. Каждую из этих точек соединили с обоими концами противоположной стороны квадрата. Если какие-то три (или четыре) из этих отрезков пересекутся в одной точке, то такая точка пересечения учитывается только один раз. Найдите наименьшее число точек пересечения внутри квадрата. Укажите, в какой пропорции для этого надо разбить стороны квадрата.
7. На трёх разных координатных осях выбрали точки A , B и C . Оказалось, что площади треугольников OAB , OAC и OBC равны соответственно 20, 30 и 60. Найдите площадь треугольника ABC .

МЕЖДУНАРОДНАЯ ДИСТАНЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ТРЕТЬЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЕ»

2010 год

Задачи для 12 класса

1. В доме 12 этажей (нумерация которых начинается с 1). Со всех этажей, кроме самого нижнего, лифт можно вызвать только для движения на нижний этаж. При движении вниз лифт остановится только на тех этажах, откуда его вызвали, а также в самом низу. С нижнего этажа можно заказать лифт на любой набор этажей. При движении вверх лифт остановится только на заказанных этажах. Если после выхода всех пассажиров из лифта, кто-то ещё выше ожидает его на спуск, то лифт продолжит движение до самого верхнего из ожидающих (но не обязательно до самого верхнего этажа). Промежуток между соседними этажами лифт проходит за 10 секунд. Те же 10 секунд занимает любая остановка (в том числе, на крайних этажах). Человек Рассеянный хочет спуститься с самого верхнего этажа на самый нижний. Он не знает этих правил и по ошибке выходит из лифта всякий раз, как только лифт останавливается на новом для него этаже. Немедленно вернуться в лифт Человек Рассеянный не успевает, но сразу же после ухода лифта нажимает кнопку его вызова на спуск. Человек Рассеянный запоминает посещенные этажи и повторно на них уже не выходит. Какое наибольшее количество времени займёт его спуск?
2. Внутри правильного 12-угольника со стороной длины 13 расположен правильный 12-угольник со стороной длины 12. Пётр нашёл площадь многоугольного «кольца» между ними и построил правильный 12-угольник равной площади. Найдите длину стороны этого правильного 12-угольника.
3. $P(x)$ и $Q(x)$ — два таких квадратных трёхчлена, что $P(Q(x)) \equiv 2010x^4$. Какие значения может принимать старший коэффициент многочлена $Q(P(x))$?
4. Три стороны невыпуклого четырехугольника имеют одну и ту же длину 1. Укажите интервал значений для длины четвертой стороны.
5. Найдите основание системы счисления, в которой число $2010^{2010} + 1$ записывается одинаковыми цифрами
Наивысшую оценку по этой задаче получит тот участник, чьё основание системы счисления окажется наименьшим.
6. На каждой стороне квадрата выбрали по две точки. Каждую из этих точек соединили с обоими концами противоположной стороны квадрата. Если какие-то три (или четыре) из этих отрезков пересекутся в одной точке, то такая точка пересечения учитывается только один раз. Найдите наименьшее число точек пересечения внутри квадрата. Укажите, в какой пропорции для этого надо разбить стороны квадрата.
7. На трёх разных координатных осях выбрали точки A , B и C . Оказалось, что площади треугольников OAB , OAC и OBC равны соответственно 30, 40 и 120. Найдите площадь треугольника ABC .