Санкт-Петербургский государственный университет, 1999
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Решите систему $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

б) Существует ли многочлен $p(x) = x^9 + a_1 x^8 + \ldots + a_9$, имеющий девять различных действительных корней, все коэффициенты a_i которого по модулю не превосходят 0,001?

в) Докажите неравенство $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \ln 5 < \ln 2 \cdot \ln 3 + \ln 3 \cdot \ln 5 + \ln 5 \cdot \ln 2 + 1$.

2. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 8x} + \sqrt{x^2 - 24x} \le 8$.

б) Найдите все a, при которых уравнение $\cos(x^2) = \cos(x + a)$ не имеет решений на отрезке $[0; 1]$.

в) Найдите наименьшее расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами 3, 3, 6 см и не пересекающей ее диагональю его квадратной грани.

г) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 1, 2, 3, 2 см.

3. Дана последовательность $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

а) Докажите, что $3x_{n+1} = 7x_n - 2x_{n-1}$ при всех $n \ge 1$.

б) Известно, что $x_{1999} > 0$. Верно ли, что $x_{2000} > 0$?

в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0, x_1, \ldots$?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1999
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Решите систему $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0, \\ \cos x \cdot \cos y = -0,5. \end{cases}$

б) Существует ли многочлен $p(x) = x^8 + a_1 x^7 + \ldots + a_8$, имеющий восемь различных действительных корней, все коэффициенты a_i которого по модулю не превосходят 0,001?

в) Докажите неравенство $\ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ln 3 \cdot \ln 4 \cdot \ln 5 > \ln 3 \cdot \ln 4 + \ln 4 \cdot \ln 5 + \ln 5 \cdot \ln 3 + 1$

2. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 48x} \geq 9$.

б) Найдите все a, при которых уравнение $\cos(x^2) = \cos(x+2)$ не имеет решений на отрезке $[0;\, a]$.

в) Найдите наименьшее расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами 4, 2, 4 см и не пересекающей ее диагональю его квадратной грани.

г) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 2, 3, 4, 3 см.

3. Дана последовательность $x_n = a \cdot 2^{-n} + b \cdot 3^n$, $n = 0, 1, \ldots$.

а) Докажите, что $2x_{n+1} = 7x_n - 3x_{n-1}$ при всех $n \geq 1$.

б) Известно, что $x_{1999} < 0$. Верно ли, что $x_{1998} < 0$?

в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0, x_1, \ldots$?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1999
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) $\left\{\left(2\pi k;\ (-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n\right);\ \left(\pi+2\pi k;\ (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n\right);\ \left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right);\ \left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right);\right.$ $\left.\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right);\ \left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right) : k,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) да, существует. **2.** а) $[-1;\ 0]$; б) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2\pi k;\ 2\pi-2+2\pi k)$; в) $\sqrt{2}$; г) $S_{\max}=2\sqrt{3}$ — площадь трапеции. **3.** б) нет, не верно; в) нет, не существует.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1999
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) $\left\{\left(2\pi k;\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right);\ \left(\pi+2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right);\ \left(\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pi+2\pi n\right);\ \left(\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ 2\pi n\right):\ k,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

2. а) $(-\infty;\,-48]\cup[1;\,+\infty)$; б) $a\ge\dfrac{\sqrt{8\pi-7}-1}{2}$; в) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; г) $S_{\max}=6\sqrt{2}$ — площадь трапеции. **3.** б) нет, неверно; в) нет, не существует.