

Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
1996-1997 учебный год

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПЕРВЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТУР

1. Некто родился в девятнадцатом веке. В 1901 году сумма цифр числа, выражающего год его рождения, равнялась сумме цифр числа, выражающего количество прожитых лет. Определите, в каком году родился Некто.
2. Для нумерации всех домов улицы потребовалось количество цифр, вдвое превышающее количество домов этой улицы. Сколько домов на этой улице?
3. Дана правильная дробь. Числитель и знаменатель – двузначные числа, причем цифра единиц числителя одинакова с цифрой десятков знаменателя. Найдите все дроби, которые при зачеркивании этой одинаковой цифры сохраняют свою величину.
4. Три брата, возраст которых образует геометрическую прогрессию, делят между собой некоторую сумму денег пропорционально своему возрасту. Если бы они это сделали через три года, когда самый младший окажется вдвое моложе самого старшего, то младший получил бы на 105, а средний — на 15 рублей больше, чем сейчас. Сколько лет каждому из братьев?
5. Два мотоциклиста выехали одновременно: один из пункта A в пункт B , другой из B в A . Каждый ехал с постоянной скоростью и, приехав на конечный пункт, тут же поворачивал обратно. Первый раз они встретились в p км от B , второй раз — в q км от A через t часов после первой встречи. Найдите расстояние между A и B и скорости обоих мотоциклистов.
6. Цена брильянта пропорциональна квадрату его веса. Брильянт весом в p карат был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз. Найдите веса частей, на которые был разбит брильянт. Исследуйте решение.
7. На сооружение предприятия было израсходовано b рублей. Уже за первый год своей работы предприятие дало a рублей прибыли, а в дальнейшем прибыль ежегодно повышалась на $p\%$. Через сколько лет расходы на сооружение предприятия полностью окупятся?
8. Непромытый «золотой песок» содержит $k\%$ чистого золота. После каждой промывки «золотого песка» отходят $p\%$ содержащихся в нем примесей, и теряется $q\%$ имеющегося в нем золота. Сколько нужно сделать промывок, чтобы содержание чистого золота составило бы не менее $r\%$?
9. В вертикально стоящий сосуд, представляющий собой полусферу диаметра $2R$, налита жидкость до уровня h . Сосуд требуется наклонить, но не настолько, чтобы жидкость стала из него выливаться. Определите область допустимых значений угла отклонения диаметра полусферы от горизонтали.
10. На какой высоте над поверхностью Земли должен находиться искусственный спутник связи, чтобы ретранслируемые им радиопередачи принимались на территории равной 42,5% поверхности земного шара? Радиус Земли принять равным 6370 км.