5.001. Решите уравнение $-\sin\frac{x}{2}=\cos x$.

$$-\sin\frac{x}{2}=\cos x \Leftrightarrow -\sin\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-1=0.$$

Пусть $\sin\frac{x}{2}=t$.

Решим уравнение

$$2t^2-t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2}, \\ t=1. \end{array}\right.$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \\ \sin\frac{x}{2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ \frac{x}{2}=\frac{7\pi}{6}+2\pi k \\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+4\pi k, \\ x=\frac{7\pi}{3}+4\pi k, \\ x=\pi+4\pi k;\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3}+4\pi k;\ \pi+4\pi k;\ \frac{7\pi}{3}+4\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5.002. Решите уравнение $\cos\frac{x}{2}+\cos x=0$.

$$\cos\frac{x}{2}+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1=0.$$

Пусть $\cos\frac{x}{2}=t$.

Решим уравнение

$$2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2}=-1 \\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=\pi+2\pi k \\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2\pi k \\ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi+4\pi k, \\ x=\frac{2\pi}{3}+4\pi k, \\ x=-\frac{2\pi}{3}+4\pi k;\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\frac{2\pi}{3}+4\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+4\pi k;\ 2\pi+4\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5.003. Решите уравнение $3\cos 2x=4-11\cos x$.

$$3\cos 2x=4-11\cos x \Leftrightarrow 3(2\cos^2 x-1)=4-11\cos x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\cos^2 x+11\cos x-7=0.$$

Пусть $\cos x = t$.
Решим уравнение

$$6t^2 + 11t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{7}{3}, \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{7}{3} - \text{решений нет} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5.004. Решите уравнение $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0$.

$$\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 3x)^2 - \sin^2 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^4 3x - 5\sin^2 3x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 3x \cdot (4\sin^2 3x - 5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 3x = 0 \\ \sin^2 3x = \dfrac{5}{4} - \text{решений нет} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{3};\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5.005. Решите уравнение $\sin x = 1 + \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Поскольку $\sin x \le 1$, а $1 + \dfrac{1}{x^2 + 1} > 1$ при всех x, уравнение не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

5.006. Решите уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Поскольку при всех x $\cos x \le 1$, а $x^2 + 1 \ge 0$ при всех x, уравнение равносильно системе

$$\cos x = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ x^2 + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos 0 = 1 - \text{верно} \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

5.007. Решите уравнение $\cos x = 1 + |x|$.

Поскольку $\cos x \le 1$, а $1 + |x| \ge 0$ при всех x, уравнение равносильно системе

$$\cos x = 1 + |x| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ 1 + |x| = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos 0 = 1 - \text{верно} \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

5.008. Решите уравнение $\sin x = 1 + 2^x$.

Поскольку $\sin x \le 1$, а $1 + 2^x > 1$ при всех x, уравнение не имеет решений.
Ответ: $\varnothing$.

5.009. Решите уравнение $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$.

$$2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(2\cos^2 2x - 1)^2 - 6\cos^2 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cos^4 2x - 14\cos^2 2x + 3 = 0.$$

Пусть $\cos^2 2x = t$.
Решим уравнение

$$8t^2 - 14t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4}, \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2 2x = \dfrac{1}{4} \\ \cos^2 2x = \dfrac{3}{2} - \text{решений нет} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ -\dfrac{\pi}{3} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5.010. Решите уравнение $-2\sin x + 5\sin 2x = 0$.

$$-2\sin x + 5\sin 2x = 0 \Leftrightarrow -2\sin x + 10\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x(5\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = -\arccos\dfrac{1}{5} + 2\pi k, \\ x = \arccos\dfrac{1}{5} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\arccos\dfrac{1}{5} + 2\pi k;\ \pi k;\ \arccos\dfrac{1}{5} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.