

5.061. Решите уравнение $9^x + 4^{\frac{x+3}{2}} = 6^{x+1}$.

$$\begin{aligned} 9^x + 4^{\frac{x+3}{2}} = 6^{x+1} &\Leftrightarrow 3^{2x} + 2^3 \cdot 2^{2x} = 6 \cdot 6^x \Leftrightarrow 1 + 8\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 6\left(\frac{2}{3}\right)^x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$.

Решим уравнение

$$8t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4}, \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{4}, \\ x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{4}; \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \right\}$.

5.062. Решите уравнение $4^{x+1} - 6^x - 2 \cdot 9^{x+1} = 0$.

$$\begin{aligned} 4^{x+1} - 6^x - 2 \cdot 9^{x+1} = 0 &\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 18 = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$.

Решим уравнение

$$4t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2 - \text{решений нет} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

5.063. Решите уравнение $32^{3(x^2-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.

$$32^{3(x^2-8)} = 8^{19(2x-x^2)} \Leftrightarrow 2^{15(x^2-8)} = 2^{57(2x-x^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15(x^2 - 8) = 57(2x - x^2) \Leftrightarrow 15x^2 - 120 = 114x - 57x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 19x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19 - \sqrt{1321}}{24}, \\ x = \frac{19 + \sqrt{1321}}{24}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{19 - \sqrt{1321}}{24}; \frac{19 + \sqrt{1321}}{24} \right\}$.

5.064. Решите уравнение $8^{4(x^2+8)} = 16^{7(x^2+2x)}$.

$$8^{4(x^2+8)} = 16^{7(x^2+2x)} \Leftrightarrow 2^{12(x^2+8)} = 2^{28(x^2+2x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 8) = 7(x^2 + 2x) \Leftrightarrow 3x^2 + 24 = 7x^2 + 14x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7 - \sqrt{145}}{4}, \\ x = \frac{-7 + \sqrt{145}}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{-7 - \sqrt{145}}{4}; \frac{-7 + \sqrt{145}}{4} \right\}$.

5.065. Решите неравенство $\log_2(x-1) + \log_2 x < 1$.

$$\log_2(x-1) + \log_2 x < 1 \stackrel{2>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-1 > 0 \\ x > 0 \\ (x-1)x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x+1)(x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: (1; 2).

5.066. Решите неравенство $\log_3(x+2) + \log_3 x > 1$.

$$\log_3(x+2) + \log_3 x > 1 \stackrel{3>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2 > 0 \\ x > 0 \\ (x+2)x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x+3)(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Ответ: (1; +∞).

5.067. Решите неравенство $\log_2(x+1) + \log_2 x < 1$.

$$\log_2(x+1) + \log_2 x < 1 \stackrel{2>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \\ (x+1)x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x+2)(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Ответ: (0; 1).

5.068. Решите неравенство $\lg x + \lg(x-3) > 1$.

$$\begin{aligned} \lg x + \lg(x-3) > 1 &\stackrel{10>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x > 0 \\ x-3 > 0 \\ x(x-3) > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 3x - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x+2)(x-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5. \end{aligned}$$

Ответ: (5; +∞).

5.069. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(4-x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(4-x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2 \Leftrightarrow \\ &\stackrel{\frac{1}{2}<1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4-x > 0 \\ x-1 > 0 \\ (4-x)(x-1) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 4 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 4 \\ (x-2)(x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ 3 \leq x < 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (1; 2] ∪ [3; 4).

5.070. Решите неравенство $\log_3(x^2 - 7x + 12) < \log_3 20$.

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - 7x + 12) < \log_3 20 &\stackrel{3>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0 \\ x^2 - 7x - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-4) > 0 \\ (x+1)(x-8) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3, \\ 4 < x < 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (-1; 3) ∪ (4; 8).