5.081. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5^{x-1}\cdot 7^{y}=\dfrac{1}{7}, \\ y-x=-2. \end{cases}$.

$$\begin{cases} 5^{x-1}\cdot 7^{y}=\dfrac{1}{7} \\ y-x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x-1}\cdot 7^{x-2}=\dfrac{1}{7} \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x-1}\cdot 7^{x-1}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{7} \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35^{x-1}=1 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;\,-1)\}$.

5.082. Решите систему уравнений $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{7}\right)^{x}\cdot 3^{y}=63, \\ y+x=1. \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{7}\right)^{x}\cdot 3^{y}=63 \\ y+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{7}\right)^{1-y}\cdot 3^{y}=63 \\ x=1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{7}\cdot 7^{y}\cdot 3^{y}=63 \\ x=1-y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21^{y}=21^{2} \\ x=1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1;\,2)\}$.

5.083. Найдите координаты точек, в которых касательные к графику функции $y=\dfrac{x+1}{x-3}$, имеющие угловой коэффициент -1, пересекают ось абсцисс.

1. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания.

$$y'(x)=\frac{(x+1)'(x-3)-(x+1)(x-3)'}{(x-3)^{2}}=\frac{x-3-(x+1)}{(x-3)^{2}}=-\frac{4}{(x-3)^{2}}.$$

$$y'(x)=-1 \Leftrightarrow -\frac{4}{(x-3)^{2}}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\neq 0 \\ (x-3)^{2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=-2 \\ x-3=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5. \end{array}\right.$$

Поскольку

$$y(1)=\frac{1+1}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1 \quad \text{и} \quad y(5)=\frac{5+1}{5-3}=\frac{6}{2}=3,$$

координаты точек касания таковы: $(1;\,-1)$ и $(5;\,3)$.

2. Уравнения касательных имеют вид:

$$y=-1(x-1)-1 \Leftrightarrow y=-x,$$
$$y=-1(x-5)+3 \Leftrightarrow y=-x+8.$$

3. Найдем координаты точек пересечения касательных с осью абсцисс:

$$-x=0 \Leftrightarrow x=0,$$
$$-x+8=0 \Leftrightarrow x=8.$$

Искомые координаты: $(0;\,0)$ и $(8;\,0)$.
Ответ: $(0;\,0)$, $(8;\,0)$.

5.084. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y=\dfrac{2x-3}{x+3}$, имеющих угловой коэффициент 9.

1. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания.

$$y'(x)=\frac{(2x-3)'(x+3)-(2x-3)(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{2(x+3)-(2x-3)}{(x+3)^2}=\frac{9}{(x+3)^2}.$$

$$y'(x)=9\Leftrightarrow\frac{9}{(x+3)^2}=9\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-3\\(x+3)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-3\\x^2+6x+8=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-3\\\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=-4.\end{array}\right.$$

Поскольку

$$y(-2)=\frac{2\cdot(-2)-3}{-2+3}=\frac{-7}{1}=-7 \text{ и } y(-4)=\frac{2\cdot(-4)-3}{-4+3}=\frac{-11}{-1}=11,$$

координаты точек касания таковы: $(-2;\,-7)$ и $(-4;\,11)$.

2. Уравнения касательных имеют вид:

$$y=9(x+2)-7\Leftrightarrow y=9x+11,$$
$$y=9(x+4)+11\Leftrightarrow y=9x+47.$$

3. Найдем координаты точек пересечения касательных с осью абсцисс:

$$9x+11=0\Leftrightarrow x=-\frac{11}{9},$$

$$9x+47=0\Leftrightarrow x=-\frac{47}{9}.$$

Искомые координаты: $\left(-\dfrac{11}{9};\,0\right)$ и $\left(-\dfrac{47}{9};\,0\right)$.

4. Найдем координаты точек пересечения касательных с осью ординат:

$$y=0\cdot9+11\Leftrightarrow y=11,$$
$$y=0\cdot9+47\Leftrightarrow y=47.$$

Искомые координаты: $(0;\,11)$ и $(0;\,47)$.
Ответ: $\left(-\dfrac{11}{9};\,0\right)$, $\left(-\dfrac{47}{9};\,0\right)$ и $(0;\,11)$, $(0;\,47)$.

5.085. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y=\dfrac{3x-1}{x+8}$, имеющих угловой коэффициент 1.

1. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания.

$$y'(x)=\frac{(3x-1)'(x+8)-(3x-1)(x+8)'}{(x+8)^2}=\frac{3(x+8)-(3x-1)}{(x+8)^2}=\frac{25}{(x+8)^2}.$$

$$y'(x)=1 \Leftrightarrow \frac{25}{(x+8)^2}=1 \Leftrightarrow (x+8)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+8=-5 \\ x+8=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-13 \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Поскольку

$$y(-13)=\frac{3\cdot(-13)-1}{-13+8}=\frac{-40}{-5}=8\,,$$
$$y(-3)=\frac{3\cdot(-3)-1}{-3+8}=\frac{-10}{5}=-2\,,$$

координаты точек касания: $(-13;-8)$ и $(-3;-2)$.

2. Уравнения касательных имеют вид:

$$y=1(x+13)+8 \Leftrightarrow y=x+21\,,$$
$$y=1(x+3)-2 \Leftrightarrow y=x+1\,.$$

3. Найдем координаты точек пересечения касательных с осью ординат:

$$y=0+21=21\,,$$
$$y=0+1=1\,.$$

Искомые координаты: $(0;\,21)$ и $(0;\,1)$.

Ответ: $(0;\,21)$, $(0;\,1)$.

5.086. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y=\frac{2x-2}{x+1}$, имеющих угловой коэффициент 4.

1. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания.

$$y'(x)=\frac{(2x-2)'(x+1)-(2x-2)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-(2x-2)}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}\,.$$

$$y'(x)=4 \Leftrightarrow \frac{4}{(x+1)^2}=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ (x+1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Найдем ординаты точек касания

$$y(-2)=\frac{2\cdot(-2)-2}{-2+1}=\frac{-6}{-1}=6\,,$$
$$y(0)=\frac{2\cdot(0)-2}{0+1}=\frac{-2}{1}=-2\,.$$

Координаты точек касания таковы: $(-2;\,6)$ и $(0;-2)$.

2. Уравнения касательных имеют вид:

$$y=4(x+2)+6 \Leftrightarrow y=4x+14\,,$$
$$y=4x-2\,.$$

3. Найдем координаты точек пересечения касательных с осью абсцисс:

$$4x+14=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2},$$
$$4x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Искомые координаты: $\left(-\frac{7}{2};\, 0\right)$ и $\left(\frac{1}{2};\, 0\right)$.

4. Найдем координаты точек пересечения касательных с осью ординат:

$$y=0\cdot 4+14 \Leftrightarrow y=14,$$
$$y=0\cdot 4-2 \Leftrightarrow y=-2.$$

Искомые координаты: $(0;\,14)$ и $(0;\,-2)$.

Ответ: $\left(-\frac{7}{2};\, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2};\, 0\right)$ и $(0;\,14)$, $(0;\,-2)$.

5.087. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y=\frac{x+4}{x-5}$, имеющих угловой коэффициент -1.

1. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания.

$$y'(x)=\frac{(x+4)'(x-5)-(x+4)(x-5)'}{(x-5)^2}=\frac{(x-5)-(x+4)}{(x-5)^2}=-\frac{9}{(x-5)^2}.$$

$$y'(x)=-1 \Leftrightarrow -\frac{9}{(x-5)^2}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 5 \\ (x-5)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 5 \\ x^2-10x+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 5 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=8. \end{array}\right.$$

Найдем ординаты точек касания:

$$y(2)=\frac{2+4}{2-5}=\frac{6}{-3}=-2,$$
$$y(8)=\frac{8+4}{8-5}=\frac{12}{3}=4.$$

Координаты точек касания: $(2;\,-2)$ и $(8;\,4)$.

2. Уравнения касательных имеют вид:

$$y=-1(x-2)-2 \Leftrightarrow y=-x,$$
$$y=-1(x-8)+4 \Leftrightarrow y=-x+12.$$

3. Найдем координаты точек пересечения касательных с осью ординат:

$$y=0,\ y=12.$$

Искомые координаты: $(0;\,0)$ и $(0;\,12)$.

Ответ: $(0;\,0)$, $(0;\,12)$.

5.088. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y=\dfrac{3x-5}{x-3}$, имеющих угловой коэффициент 25.

1. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания.

$$y'(x)=\frac{(3x-5)'(x-3)-(3x-5)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{3(x-3)-(3x-5)}{(x-3)^2}=-\frac{4}{(x-3)^2}.$$

$$y'(x)=25\Leftrightarrow -\frac{4}{(x-3)^2}=25\ \text{– решений нет.}$$

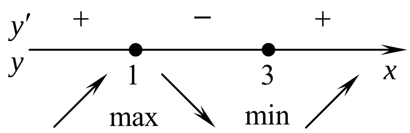
Ответ: таких точек нет.

5.089. Найдите точки экстремума функции $y=x^3-6x^2+9x+3$ на промежутке $\left(-\frac{6}{5};\,2\right)$.

$$y'=3x^2-12x+9.$$

Решим уравнение

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=3.\end{array}\right.$$



Промежутку $\left(-\frac{6}{5};\,2\right)$ принадлежит только одна точка экстремума $x=1$.

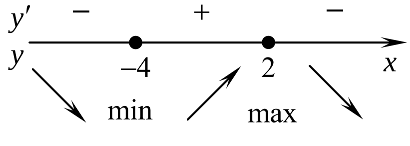
Ответ: $x=1$.

5.090. Найдите точки экстремума функции $y=-x^3-3x^2+24x-4$ на промежутке $\left(-5;\,\frac{1}{5}\right)$.

$$y'=-3x^2-6x+24.$$

Решим уравнение

$$y'=0\Leftrightarrow -3x^2-6x+24=0\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=2.\end{array}\right.$$



Из двух точек экстремума заданному промежутку принадлежит только $x=-4$.

Ответ: $x=-4$.