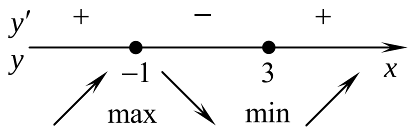
5.091. Найдите экстремумы функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$



$$y_{\max} = y(-1) = 1,$$
$$y_{\min} = y(3) = -31.$$

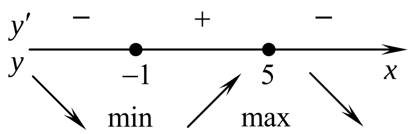
Ответ: минимум: -31, максимум: 1.

5.092. Найдите экстремумы функции $y = -x^3 + 6x^2 + 15x + 1$.

$$y' = -3x^2 + 12x + 15.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3(x^2 - 4x - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 5. \end{array}\right.$$



$$y_{\min} = y(-1) = -7,$$
$$y_{\max} = y(5) = 101.$$

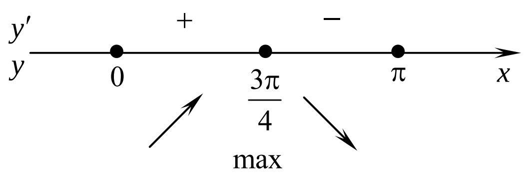
Ответ: $y_{\min} = -7$, $y_{\max} = 101$.

5.093. Найдите точки экстремума функции $y = \sin x - \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$.

$$y' = \cos x + \sin x.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$$



На промежутке $[0;\ \pi]$ есть только одна точка экстремума: $x_{\max} = \frac{3\pi}{4}$.

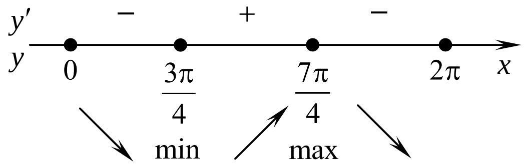
Ответ: $\frac{3\pi}{4}$ — точка максимума.

5.094. Найдите точки экстремума функции $y = \cos x - \sin x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

$$y' = -\sin x - \cos x.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$$



На промежутке $[0;\ 2\pi]$ расположены две точки экстремума, соответствующие значениям $k = 1$ и $k = 2$.

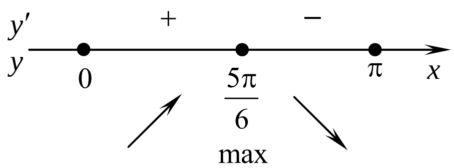
Ответ: $x_{\min} = \frac{3\pi}{4}$, $x_{\max} = \frac{7\pi}{4}$.

5.095. Найдите экстремумы функции $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

$$y' = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$$



Искомый максимум $y = \sin\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$.

Ответ: 2 – максимум функции.

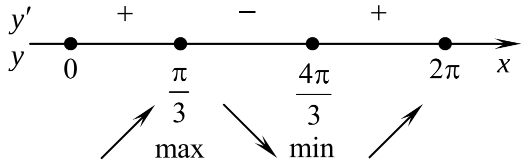
5.096. Найдите экстремумы функции $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

$$y' = \sqrt{3}\cos x - \sin x.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} + \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$$



$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} = 2,$$

$$y_{\min} = \left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Ответ: $y_{\min} = -2$, $y_{\max} = 2$.

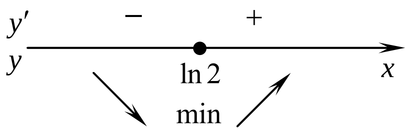
5.097. Найдите точки экстремума функции $y = x + 2e^{-x}$.

$$y' = 1 - 2e^{-x}.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln 2.$$



Таким образом, точка минимума — $x = \ln 2$.

Ответ: $x_{\min} = \ln 2$.

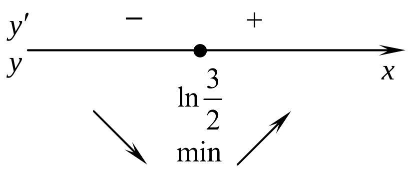
5.098. Найдите точки экстремума функции $y = 2x + 3e^{-x}$.

$$y' = 2 - 3e^{-x}.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2 - 3e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x = \ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln\frac{3}{2}.$$



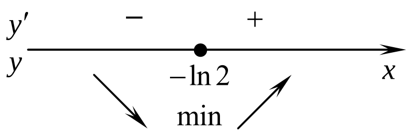
Ответ: $\ln\frac{3}{2}$ — точка минимума.

5.099. Найдите экстремумы функции $y = -x + 2e^x$.

$$y' = -1 + 2e^x.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2.$$



$$y_{\min} = y(-\ln 2) = -(-\ln 2) + 2e^{-\ln 2} = \ln 2 + 2\cdot\frac{1}{2} = \ln 2 + 1.$$

Ответ: $\ln 2 + 1$ — минимум функции.

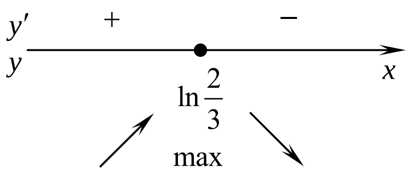
5.100. Найдите экстремумы функции $y = -3x - 2e^{-x}$.

$$y' = -3 + 2e^{-x}.$$

Решим уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3 + 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -x = \ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{2}{3}.$$



$$y_{\max} = y\left(\ln\frac{2}{3}\right) = -3\ln\frac{2}{3} - 2e^{-\ln\frac{2}{3}} = 3\ln\frac{3}{2} - 2e^{\ln\frac{3}{2}} = 3\ln\frac{3}{2} - 2\cdot\frac{3}{2} = 3\ln\frac{3}{2} - 3.$$

Ответ: $3\ln\frac{3}{2} - 3$ — максимум функции.