1. Решить уравнение

$$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ (x^2+x-6)^2=(x+1)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ (x^2+x-6)^2=(x^2+2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x-6=x^2+2x+1 \\ x^2+x-6=-(x^2+2x+1) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} -x-7=0 \\ 2x^2+3x-5=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=1 \\ x=-2\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1 .$$

Ответ: $\{1\}$.

2. Решить уравнение

$$\log_5(x-8)^2=2+2\log_2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ \log_5(x-8)^2=\log_5 5^2+\log_2(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \log_5(x-8)^2=\log_5(5(x-2))^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ (x-8)^2=(5x-10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} x-8=5x-10 \\ x-8=-(5x-10) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3 .$$

Ответ: $\{3\}$.

3. Решить уравнение

$$\log_{9x^2}(6+2x-x^2)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2>0 \\ 9x^2\neq 1 \\ 6+2x-x^2=\sqrt{(3x)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\neq \dfrac{1}{9} \\ 6+2x-x^2=3|x| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\neq \dfrac{1}{9} \\ 3|x|=6+2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\neq \dfrac{1}{9} \\ \begin{cases} 6+2x-x^2\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x=6+2x-x^2 \\ 3x=-(6+2x-x^2) \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\neq \dfrac{1}{9} \\ \begin{cases} 6+2x-x^2\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x-6=0 \\ x^2-5x-6=0 \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\neq \dfrac{1}{9} \\ \begin{cases} 6+2x-x^2\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \\ x=6 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\neq \dfrac{1}{9} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{-1;\, 2\}$.

4. Решить уравнение

$$\log_{x-3}(x^2-4x)^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x-3\neq 1 \\ (x^2-4x)^2=(x-3)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \\ (x^2-4x)^2=(x^2-6x+9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x=x^2-6x+9 \\ x^2-4x=-(x^2-6x+9) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-9=0 \\ 2x^2-10x+9=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{9}{2} \\ x=\frac{5-\sqrt{7}}{2} \\ x=\frac{5+\sqrt{7}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{9}{2} \\ x=\frac{5+\sqrt{7}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{\frac{9}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right\}$.

5. Решить уравнение

$$\log_3(3^x-8)=2-x.$$

В силу разномонотонности частей уравнения решение $x=2$ — единственное решение.
Ответ: $\{2\}$.

6. Решить уравнение

$$\log_7(7^{-x}+6)=1+x \Leftrightarrow 7^{-x}+6=7^{1+x} \Leftrightarrow 7^{-x}+6-7^{1+x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{7^x}-7\cdot 7^x+6=0.$$

Пусть: $7^x=t$.
Решим уравнение

$$\frac{1}{t}-7t+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 0 \\ 7t^2-6t-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{7} \\ t=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=1.$$

Таким образом

$$7^x=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: $\{0\}$.

7. Решить уравнение

$$\log_2(2^x-7)=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-7>0 \\ 2^x-7=2^{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x>7 \\ 2^x-7-2^{3-x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x>7 \\ 2^x-7-\frac{8}{2^x}=0 \end{cases}.$$

Пусть: $2^x=t$.
Решим систему

$$\begin{cases} t>7 \\ t-7-\frac{8}{t}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>7 \\ t^2-7t-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>7 \\ \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=8.$$

Таким образом

$$2^x=8 \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $\{3\}$.

8. Решить уравнение

$$\log_4(4^{-x}+3)=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{-x}+3>0 \\ 4^{-x}+3=4^{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{-x}>-3 \text{ – верно} \\ 4^{-x}+3-4^{x+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4^x}-4\cdot 4^x+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-4\cdot 16^x+3\cdot 4^x=0 \Leftrightarrow 4\cdot 16^x-3\cdot 4^x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x=1 \\ 4^x=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: $\{0\}$.

9. Решить уравнение

$$\log_6(6^{-x}+5)=1+x.$$

Функция $\log_6(6^{-x}+5)$ монотонно убывает, функция $1+x$ монотонно возрастает. Поэтому уравнение имеет не более одного решения. Поскольку $\log_6(6^0+5)=1+0$ — верно, число 0 является корнем уравнения.

Ответ: $\{0\}$.

10. Решить уравнение

$$\log_5(5^x-4)=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x-4>0 \\ 5^x-4=5^{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x>4 \\ 5^x-4-5^{1-x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\log_5 4 \\ 5^x-4-\dfrac{5}{5^x}=0 \end{cases}.$$

Пусть: $5^x=t$.

Решим уравнение

$$t-4-\frac{5}{t}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-4t-5=0 \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=5 \end{array}\right. \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow t=5.$$

Таким образом

$$\begin{cases} x>\log_5 4 \\ 5^x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\log_5 4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $\{1\}$.