

31. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 &\Leftrightarrow (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2 \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k \\ x = -\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \pi - \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k \\ x = -\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

32. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x &\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x - 4 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 \sin x \cos^2 x - 4 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} .$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

33. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \cos x = \cos 3x + 2 \sin 2x &\Leftrightarrow \cos 3x - \cos x + 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 \sin 2x \sin x + 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 2x (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

34. Решить уравнение

$$\begin{aligned} 8 \sin^2 2x + 4 \sin^2 4x = 5 &\Leftrightarrow 8 \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) + 4(1 - \cos^2 4x) - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4(1 - \cos 4x) - 4 \cos^2 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 4x + 4 \cos 4x - 3 = 0 . \end{aligned}$$

Пусть: $\cos 4x = t$.

Решим уравнение

$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Таким образом

$$\begin{cases} \cos 4x = -\frac{3}{2} - \text{решений нет} \\ \cos 4x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$

35. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x &\Leftrightarrow \sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = \frac{1 - \cos 10x}{2} + \frac{1 - \cos 12x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \cos 6x + 1 - \cos 8x = 1 - \cos 10x + 1 - \cos 12x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 12x - \cos 6x = \cos 8x - \cos 10x &\Leftrightarrow -2 \sin 9x \sin 3x = 2 \sin x \sin 9x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 9x \sin 3x - \sin x \sin 9x = 0 &\Leftrightarrow \sin 9x (\sin 3x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin 9x \sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = \pi k \\ 2x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{9} \\ x = \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi k}{9}; \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}.$

36. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x + 1 - \cos 6x + 1 - \cos 8x = 4 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos 5x \cos 3x + 2 \cos 5x \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 5x (\cos 3x + \cos x) = 0 &\Leftrightarrow \cos 5x (2 \cos 2x \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x \cos 2x \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}.$

37. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow 1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x + 1 + \cos 10x = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos 6x + \cos 10x) + \cos 8x = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos 8x \cos 2x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 8x(2 \cos 2x + 1) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 0 \\ 2 \cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ 2x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8} \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = \frac{2\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} . \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}; \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

38. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x = 1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos x = 2 \cos 7x \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x(\cos 3x - \cos 7x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x(2 \sin 5x \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x \sin 2x \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \sin 5x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = \pi k \\ 5x = \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z} \end{cases} . \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

39. Решить уравнение

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 4x - 6 \cos^2 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos^2 4x - 6 \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 4x - 3(1 + \cos 4x) + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos^2 4x - 3 \cos 4x - 2 = 0 . \end{aligned}$$

Пусть: $\cos 4x = t$.

Решим уравнение

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ \cos 4x = 2 - \text{решений нет} \end{cases} &\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \end{cases} . \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

40. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sin 6x = 3 \cos 2x &\Leftrightarrow 2 \sin 4x \cos 2x - 3 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 2x(2 \sin 4x - 3) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 4x = \frac{3}{2} - \text{решений нет} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.