

41. Решить уравнение

$$\begin{aligned}
 144 \cos^4 x - 4 \sin^4 x = 9 \sin^2 2x &\Leftrightarrow 144 \cos^4 x - 4 \cdot 9 \sin^2 x \cos^2 x - 4 \sin^4 x = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 144 - 36 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg}^4 x = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^4 x + 9 \operatorname{tg}^2 x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = -12 \\ \operatorname{tg}^2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

42. Решить уравнение

$$\begin{aligned}
 2(\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2(\cos 4x - \sin x \cos 3x) = 2 \sin 3x \cos x &\Leftrightarrow \cos 4x = \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos 4x = \sin 4x &\Leftrightarrow \operatorname{tg} 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

43. Решить уравнение

$$\begin{aligned}
 \cos 7x + \cos x = 2 \cos 3x(\sin 2x - 1) &\Leftrightarrow 2 \cos 4x \cos 3x - 2 \cos 3x(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \cos 3x(\cos 4x - \sin 2x + 1) = 0 &\Leftrightarrow \cos 3x(1 - 2 \sin^2 2x - \sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos 3x(2 \sin^2 2x + \sin 2x - 2) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ 2 \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \sin 2x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} - \text{решений нет} \\ \sin 2x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \sin 2x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right) + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \\ x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right) + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right) + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

44. Решить уравнение

$$\begin{aligned}
 \cos 5x - \cos x = \sin 3x(2 \cos 4x + 1) &\Leftrightarrow -2 \sin 3x \sin 2x = \sin 3x(2 \cos 4x + 1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin 3x \sin 2x + \sin 3x \left(\cos 4x + \frac{1}{2} \right) = 0 &\Leftrightarrow \sin 3x \left(\sin 2x - 2 \sin^2 2x + \frac{3}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin 3x(4 \sin^2 2x - 2 \sin 2x - 3) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ 4 \sin^2 2x - 2 \sin 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1 - \sqrt{13}}{4} \\ \sin 2x = \frac{1 + \sqrt{13}}{4} - \text{решений нет} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1 - \sqrt{13}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi k \\ 2x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right) + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3} \\ x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right) + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi k}{3}; (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right) + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

45. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \cos 3x - \sin x &= \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) \Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = \sin x + \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{3+1} \left(\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x \right) &= \sqrt{3+1} \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 3x = \frac{\pi}{3} + x + \pi k \\ \frac{\pi}{6} + 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

46. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \sqrt{2}(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

47. Решить уравнение

$$\begin{aligned} \sin x \cos 3x &= \sin 2x \Leftrightarrow \sin x \cos 3x - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\cos 3x - 2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x (4 \cos^3 x - 3 \cos x - 2 \cos x) &= 0 \Leftrightarrow \sin x \cos x (4 \cos^2 x - 5) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ 4 \cos^2 x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos^2 x = \frac{5}{4} - \text{решений нет} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

48. Решить уравнение

$$\begin{aligned}
5 \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x &\Leftrightarrow 5 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \sin^2 2x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 5(1 - \cos 2x)^2 - (1 + \cos 2x)^2 = 4 \sin^2 2x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 5 - 10 \cos 2x + 5 \cos^2 2x - 1 - 2 \cos 2x - \cos^2 2x = 4 - 4 \cos^2 2x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 3 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{3}{2} - \text{решений нет} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

49. Решить уравнение

$$\begin{aligned}
\sin^2 6x + \sin^2 4x = 1 &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 12x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos 12x + 1 - \cos 8x = 2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -\cos 12x - \cos 8x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 10x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 10x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 10x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

50. Решить уравнение

$$\begin{aligned}
2 \sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x &\Leftrightarrow 2 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ 2 \sin^2 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ 1 - 2 \sin^2 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.