81. Найти все решения уравнения $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1$, удовлетворяющие условию $|x| < 1$.

Решим уравнение:

$$\sin 4x + 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0; \\ 2\sin 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0; \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k; \\ 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l; \\ 2x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ k, l, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} k; \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi l; \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi m,\ k, l, m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Отберем корни:

а) При $k = 0$ имеем: $x = \dfrac{\pi}{4}$ — удовлетворяет условию $|x| < 1$; при $k \geq 1$ имеем: $x \geq \dfrac{3\pi}{4} > 1$; при $k = -1$ имеем: $x = -\dfrac{\pi}{4}$ — удовлетворяет условию $|x| < 1$; при $k \leq -2$ имеем: $x \leq -\dfrac{3\pi}{4} < -1$.

б) Заметим, что в интервале $(-1;\ 1)$ длины 2, задаваемом условием $|x| < 1$, может лежать не больше одного числа каждой из серий $-\dfrac{\pi}{12} + \pi l$ и $-\dfrac{5\pi}{12} + \pi m$. Для первой серии это число $-\dfrac{\pi}{12}$, а во второй серии таких чисел нет, так как $-\dfrac{5\pi}{12} < -1$, а $-\dfrac{5\pi}{12} + \pi = \dfrac{7\pi}{12} > 1$.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{12}\right\}$.

82. Найти все решения уравнения $2\sin^2 x + \cos 4x = 1$, удовлетворяющие условию $|x| < 1$.

Решим уравнение:

$$2\sin^2 x + \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + 2\pi k; \\ 4x = -2x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k; \\ x = \dfrac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Отберем корни:

$$-1 \leq \frac{\pi}{3} k \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{\pi} \leq k \leq \frac{3}{\pi} \underset{k \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k = 0,$$

поэтому число 0 — единственное решение, удовлетворяющее условию $|x| < 1$.

Ответ: $\{0\}$.

83. Решить уравнение

$$\sin x = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow \sin x = (x+1)^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ (x+1)^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(-1) = 1 - \text{неверно} \\ x = -1 \end{cases}, \text{ решений нет}.$$

Ответ: $\varnothing$.

84. Решить уравнение

$$\cos x = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow \cos x = (x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ (x-1)^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 1 = 1 - \text{неверно} \\ x = 1 \end{cases}, \text{ решений нет}.$$

Ответ: $\varnothing$.

85. Решить уравнение

$$8\sin x = x^2 - 10x + 33 \Leftrightarrow 8\sin x = (x-5)^2 + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sin x = 8 \\ (x-5)^2 + 8 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5 = 1 - \text{неверно} \\ x = 5 \end{cases}, \text{ решений нет}.$$

Ответ: $\varnothing$.

86. Решить уравнение

$$2\cos x = -x^2 + 12x - 37 \Leftrightarrow 2\cos x = -(x+6)^2 - 1.$$

Ясно, что если $|-x^2 + 12x - 37| > 2$, то уравнение имеет решения в силу того, что $|2\cos x| \le 2$.

Решим неравенство

$$|-x^2 + 12x - 37| \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 12x - 37 \le 2 \\ -x^2 + 12x - 37 \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12x + 39 \ge 0 - \text{выполнено} \\ x^2 - 12x + 35 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 35 \le 0 \Leftrightarrow 5 \le x \le 7.$$

Если $x \in [5;\, 7]$, то $2\cos x > 0$; тогда $-x^2 + 12x - 37 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 37 < 0$, решений нет.

Ответ: решений нет.

87. Решить уравнение

$$\sin\frac{\pi}{2}x = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}x = (x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{\pi}{2}x = 1 \\ (x-1)^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) = 1 \text{ верно} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

88. Решить уравнение

$$\sin\frac{\pi}{2}x = 12x - 37 - x^2 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}x = -x^2 + 12x - 37 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}x = -1 - (x-6)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{\pi}{2}x = -1 \\ -1 - (x-6)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 6\right) = 1 - \text{неверно} \\ x = 6 \end{cases}, \text{ решений нет}.$$

Ответ: $\varnothing$.

89. Решить показательное уравнение

$$4^{-x+\frac{1}{2}} - 7\cdot 2^{-x} = 4 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{-2x} - 7\cdot 2^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{-x} = -\dfrac{1}{2} \\ 2^{-x} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^2 \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

90. Решить показательное уравнение

$$3^{6x-3}=2\cdot 27^{x-\frac{2}{3}}+1 \Leftrightarrow 27^{2x-1}=2\cdot 27^{x-\frac{2}{3}}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{27}\cdot 27^{2x}-\frac{2}{9}\cdot 27^{x}-1=0 .$$

Пусть: $27^{x}=t$.

Решим уравнение

$$\frac{1}{27}t^{2}-\frac{2}{9}t-1=0 \Leftrightarrow t^{2}-6t-27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=9 \end{array}\right. .$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} 27^{x}=-3 - \text{решений нет} \\ 27^{x}=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^{3x}=3^{2} \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} .$$

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.