

111. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 + xy = 3x \\ 4x^2y^2 + 4 = 5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3x - 2 \\ 4(3x - 2)^2 + 4 = 5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3x - 2 \\ 31x^2 - 48x + 20 = 0 \end{cases} \text{ — решений нет}$$

Ответ: \emptyset .

112. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + 1 = 3y \\ 12x^2y^2 + 8 = 11y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{3y-1}{2} \\ 12\left(\frac{3y-1}{2}\right)^2 + 8 = 11y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{3y-1}{2} \\ 3(3y-1)^2 + 8 - 11y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{3y-1}{2} \\ 16y^2 - 18y + 11 = 0 \end{cases} \text{ — решений нет}$$

Ответ: \emptyset .

113. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + 2 + x = 0 \\ 4x^2y^2 + 4 = 5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{-x-2}{2} \\ 4\left(\frac{-x-2}{2}\right)^2 + 4 - 5x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{-x-2}{2} \\ (x+2)^2 + 4 - 5x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{-x-2}{2} \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{-x-2}{2} \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ xy = \frac{-x-2}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ xy = \frac{-x-2}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(-1; \frac{1}{2}\right); (2; -1) \right\}$.

114. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 15 \\ x^2y + xy^2 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x + y = 15 \\ xy(x + y) = 54 \end{cases} \text{ — система Виета для уравнения } t^2 - 15t + 54 = 0.$$

Решим уравнение

$$t^2 - 15t + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 9 \end{cases}$$

Таким образом, система Виета для уравнений:

1). $t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

2). $t^2 - 9t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{57}}{2} \\ t = \frac{3 - \sqrt{57}}{2} \end{cases}$.

Таким образом

$$\left\{ \begin{array}{l} y=3 \\ x=6-y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=3 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y=\frac{9-\sqrt{57}}{2} \\ y=\frac{9+\sqrt{57}}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{9+\sqrt{57}}{2} \\ y=\frac{9-\sqrt{57}}{2} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y=\frac{9+\sqrt{57}}{2} \\ x=9-y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{9-\sqrt{57}}{2} \\ y=\frac{9+\sqrt{57}}{2} \end{array} \right\}$$

Ответ: $\left\{ (3; 3); \left(\frac{9-\sqrt{57}}{2}; \frac{9+\sqrt{57}}{2} \right); \left(\frac{9+\sqrt{57}}{2}; \frac{9-\sqrt{57}}{2} \right) \right\}$.

115. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+x-y=7 \\ x^2y-y^2x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+x-y=7 \\ xy(x-y)=12 \end{cases} \text{ — система Виета для уравнения } t^2-7t+12=0.$$

Решим уравнение

$$t^2-7t+12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=4 \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{cases} xy=3 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=3 \\ x=4+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(4+y)=3 \\ x=4+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+4y-3=0 \\ x=4+y \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=4 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=4 \\ x=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3+y)=4 \\ x=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+3y-4=0 \\ x=3+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y=-2-\sqrt{7} \\ y=-2+\sqrt{7} \end{cases} \\ x=4+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2-\sqrt{7} \\ x=2+\sqrt{7} \end{cases} \\ y=-2+\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y=-4 \\ y=1 \end{cases} \\ x=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases} \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1; -4); (4; 1); (2-\sqrt{7}; -2-\sqrt{7}); (2+\sqrt{7}; -2+\sqrt{7})\}$.

116. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y+x^2-y=7 \\ x^4y-y^2x^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y+x^2-y=7 \\ x^2y(x^2-y)=12 \end{cases} \text{ — система Виета для уравнения}$$

$$t^2-7t+12=0.$$

Решим уравнение

$$t^2-7t+12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=4 \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} x^2 y = 3 \\ x^2 - y = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 + 4y - 3 = 0 \\ x^2 = y + 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y + 4 \\ y = -2 - \sqrt{7} \\ y = -2 + \sqrt{7} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y + 4 \\ y = -2 + \sqrt{7} \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
& \left\{ \begin{array}{l} x^2 y = 4 \\ x^2 - y = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 + 3y - 4 = 0 \\ x^2 = y + 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y + 3 \\ y = -4 \\ y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y + 3 \\ y = -4 \\ x^2 = y + 3 \\ y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
& \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2 - \sqrt{7} - \text{решений нет} \\ y = -2 - \sqrt{7} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{2 + \sqrt{7}} \\ x = \sqrt{2 + \sqrt{7}} \\ y = -2 + \sqrt{7} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{2 + \sqrt{7}} \\ y = -2 + \sqrt{7} \\ x = \sqrt{2 + \sqrt{7}} \\ y = -2 + \sqrt{7} \end{array} \right. \\
& \left\{ \begin{array}{l} x^2 = -1 - \text{решений нет} \\ y = -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right. \\
& \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 4 \\ y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ответ: $\{(-\sqrt{2+\sqrt{7}}; -2+\sqrt{7}); (\sqrt{2+\sqrt{7}}; -2+\sqrt{7}); (-2; 1); (2; 1)\}$.

117. Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} xy^2 + x - y^2 = 21 \\ x^2 y^2 - y^4 x = 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xy^2 + x - y^2 = 21 \\ xy^2(x - y^2) = 20 \end{array} \right. \quad \text{— система Виета для уравнения}$$

$$t^2 - 21t + 20 = 0.$$

Решим уравнение

$$t^2 - 21t + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 20 \end{cases}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} xy^2 = 1 \\ x - y^2 = 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xy^2 = 1 \\ y^2 = x - 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 20x - 1 = 0 \\ y^2 = x - 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 = x - 20 \\ x = 10 - \sqrt{101} \\ x = 10 + \sqrt{101} \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
& \left\{ \begin{array}{l} xy^2 = 20 \\ x - y^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xy^2 = 20 \\ y^2 = x - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 20 = 0 \\ y^2 = x - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 = x - 1 \\ x = -4 \\ x = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
& \left\{ \begin{array}{l} x = 10 - \sqrt{101} \\ y^2 = -10 - \sqrt{101} - \text{решений нет} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 10 + \sqrt{101} \\ y^2 = -10 + \sqrt{101} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 10 + \sqrt{101} \\ y = \sqrt{-10 + \sqrt{101}} \end{array} \right. \\
& \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y^2 = -5 - \text{решений нет} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y^2 = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -2 \\ x = 5 \\ y = 2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ответ: $\{(5; -2); (5; 2); (10 + \sqrt{101}; -\sqrt{-10 + \sqrt{101}}); (10 + \sqrt{101}; \sqrt{-10 + \sqrt{101}})\}$.

118. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 y + y = 9 \\ y + x^2 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y + y = 9 \\ y = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y - x^2 = 0 \\ y = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(y-1) = 0 \\ y = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ y = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ y = 1 \\ x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{(0; 9); (-2\sqrt{2}; 1); (2\sqrt{2}; 1)\}$.

119. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - xy = 3 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 1 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = -1 \\ x-y = 1 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = -1 \\ xy - y^2 = 2 \\ x-y = 1 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ y(y-1) - y^2 = 2 \\ x = y+1 \\ (y+1)y - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ y = -2 \\ x = y+1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{(-3; -2); (3; 2)\}$.

120. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 7 \\ (x+y)^2 - xy = 13 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$.

Решим систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 - b \\ (7 - b)^2 - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 - b \\ b^2 - 15b + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 - b \\ b = 12 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 12 \\ a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 12 \\ x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 5 \\ y^2 + 5y + 12 = 0 - \text{р. нет} \\ x = -y + 4 \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 4 \\ y = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{(3; 1); (1; 3)\}$.