121. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x^2y+y^2x=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x^3+y^3+3(x^2y+xy^2)=35+3\cdot 30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)((x+y)^2-3xy)=35 \\ (x+y)^3=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(25-3xy)=35 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=6 \\ x+y=5 \end{cases}$$ — система Виета для уравнения $t^2-5t+6=0$.

Решим уравнение

$$t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \end{array}\right. .$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{(2;\ 3);\ (3;\ 2)\}$.

122. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy=20y \\ 5xy-5y^2=4x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ x(x-y)=20y \\ 5y(x-y)=4x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ x-y=\dfrac{20y}{x} \\ x-y=\dfrac{4x}{5y} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ \dfrac{4x}{5y}=\dfrac{20y}{x} \\ x-y=\dfrac{4x}{5y} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ x^2=25y^2 \\ x-y=\dfrac{4x}{5y} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5y \\ 4y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5y \\ -6y=-4 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{(0;\ 0);\ (5;\ 1);\ \left(-\dfrac{10}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)\right\}$.

123. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2+xy=20y \\ 4xy+y^2=5x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ x(4x+y)=20y \\ y(4x+y)=5x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ 4x+y=\dfrac{20y}{x} \\ 4x+y=\dfrac{5x}{y} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ \dfrac{5x}{y}=\dfrac{20y}{x} \\ 4x+y=\dfrac{5x}{y} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x,\ y\neq 0\\ 5x^2=20y^2\\ 4x+y=\dfrac{5x}{y}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x,\ y\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y\\ 9y=10\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2y\\ 7y=10\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x,\ y\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{20}{9}\\ y=\dfrac{10}{9}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{20}{7}\\ y=\dfrac{10}{7}\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{20}{9}\\ y=\dfrac{10}{9}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{20}{7}\\ y=\dfrac{10}{7}\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(0;\,0);\left(\dfrac{20}{9};\,\dfrac{10}{9}\right);\left(-\dfrac{20}{7};\,\dfrac{10}{7}\right)\right\}$.

124. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=\dfrac{3}{2}\\ \left(\dfrac{1}{x}+y\right)^2-\dfrac{2y}{x}=\dfrac{5}{4}\end{cases}.$$

Пусть $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=a\\ \dfrac{y}{x}=b\end{cases}$.

Решим систему

$$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ a^2-2b=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{9}{4}-2b=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Таким образом

$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ — система Виета для уравнения $t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{1}{2}=0$.

Решим уравнение

$$t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2}\\ t=1\end{array}\right..$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{x}=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(2;\,1);\left(1;\,\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

125. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ x^2+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2-\dfrac{2x}{y}=\dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

Пусть $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=a \\ \dfrac{x}{y}=b \end{cases}$.

Решим систему

$$\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ a^2-2b=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{9}{4}-2b=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Таким образом

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ — система Виета для уравнения $t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{1}{2}=0$.

Решим уравнение

$$t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=1 \end{array}\right..$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(1;\,2);\left(\dfrac{1}{2};\,1\right)\right\}$.

126. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+\dfrac{1}{y}=2 \\ 3x^2+\dfrac{2}{y^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=2-2x \\ 3x^2+2(2-2x)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=2-2x \\ 11x^2-16x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=2-2x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5}{11} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ \dfrac{1}{y}=0 \end{cases} - \text{невозможно} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5}{11} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{12}{11} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{11} \\ y=\dfrac{11}{12} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{5}{11};\dfrac{11}{12}\right)\right\}$.

127. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=-\dfrac{1}{2}\\ y^2-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\\ \left(-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{1}{4}\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{4}=0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\\ x^2-2x=0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}.$$

Ответ: $\{(2;\,-1)\}$.

128. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=8\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{50}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,\ y\neq 0\\ x+y=8\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{\frac{y}{x}}=\dfrac{50}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,\ y\neq 0\\ x+y=8\\ 7\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-50\left(\dfrac{x}{y}\right)+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,\ y\neq 0\\ x+y=8\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{7}\\ \dfrac{x}{y}=7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x,\ y\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=8\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{7}\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=8\\ \dfrac{x}{y}=7\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,\ y\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=7x\end{cases}\\ \begin{cases}y=1\\ x=7y\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=7\end{cases}\\ \begin{cases}x=7\\ y=1\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $\{(1;\,7);\,(7;\,1)\}$.

129. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}xy=5\\ \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm y\\ xy=5\\ \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{1}{\frac{x+y}{x-y}}=\dfrac{13}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm y\\ xy=5\\ 6\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2-13\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)+6=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm y\\ xy=5\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm y\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=5\\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}xy=5\\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm y\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=5\\ 3x+3y=2x-2y\end{cases}\\ \begin{cases}xy=5\\ 2x+2y=3x-3y\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm y\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=5\\ x=-5y\end{cases}\\ \begin{cases}xy=5\\ x=5y\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm y \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 = -1 \text{ – решений нет} \\ x = -5y \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 5y \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm y \\ \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 1 \end{array} \right. \\ x = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm y \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Ответ: $\{(-5;\,-1);\,(5;\,1)\}$.

130. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = \log_2 y - \log_2 x \\ x^2 + y = 12 \end{cases}.$$

Запишем первое уравнение в виде $x + \log_2 x = y + \log_2 y$ или $f(x) = f(y)$, где $f(t) = t + \log_2 t$. Поскольку $f(t)$ возрастает на промежутке $(0;\,+\infty)$, как сумма двух возрастающих функций, справедлив переход: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y,\ y > 0$.

Решим систему

$$\begin{cases} x = y,\ y > 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y,\ y > 0 \\ y^2 + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y,\ y > 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = -4 \\ y = 3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Ответ: $\{(-4;\,-4);\,(3;\,3)\}$.