131. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y-x=\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} y \\ x=y^2-6 \end{cases}.$$

Запишем первое уравнение в виде $x+\log_{\frac{1}{2}} x=y+\log_{\frac{1}{2}} y$ или $f(x)=f(y)$, где $f(t)=t+\log_{\frac{1}{2}} t$. Поскольку $f(t)$ убывает на промежутке $(0;+\infty)$, как сумма двух убывающих функций, справедлив переход: $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y,\ y>0$.

Решим систему

$$\begin{cases} x=y,\ y>0 \\ x=y^2-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y,\ y>0 \\ y^2-y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y,\ y>0 \\ \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\{(-2;-2);(3;3)\}$.

132. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x 3^y=24 \\ 2^y 3^x=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^x\cdot 3^y}{2^y\cdot 3^x}=\dfrac{24}{54} \\ 2^x\cdot 3^y\cdot 2^y\cdot 3^x=24\cdot 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \\ (2\cdot 3)^{x+y}=6^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}.$$

Ответ: $(3;1)$.

133. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2} \\ xy+x+y=9 \end{cases}.$$

Пусть: $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=t,\ t\ge 0$.

Решим систему

$$\begin{cases} t\ge 0 \\ t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ 2t^2-3t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{2} \\ t=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=2.$$

Таким образом

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}=2 \\ xy+x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ne 0 \\ x=4y \\ 4y^2+5y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ne 0 \\ x=4y \\ \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{9}{4} \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-9 \\ y=-\dfrac{9}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\left(-9;-\dfrac{9}{4}\right);(4;1)\right\}$.

134. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy=16 \\ x^{\log_2 y}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 xy=\log_2 16 \\ \log_2 x^{\log_2 y}=\log_2 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=4 \\ \log_2 x\cdot\log_2 y=3 \end{cases}$$ — система Виета для уравнения $t^2-4t+3=0$.

$$t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right..$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x=1 \\ \log_2 y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x=3 \\ \log_2 y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\{(2;\,8);\,(8;\,2)\}$.

135. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x=2 \\ x^{\lg y}=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 1 \\ x=y^2 \\ y^{\lg y}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 1 \\ x=y^2 \\ \lg y^{\lg y}=\lg 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 1 \\ x=y^2 \\ \lg^2 y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 1 \\ x=y^2 \\ \left[\begin{array}{l} \lg y=1 \\ \lg y=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 1 \\ x=y^2 \\ \left[\begin{array}{l} y=10 \\ y=\dfrac{1}{10} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=100 \\ y=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{100} \\ y=\dfrac{1}{10} \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{1}{100};\,\dfrac{1}{10}\right);\,(100;\,10)\right\}$.

136. решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2 \\ \log_2 x\cdot\log_2(1+y)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2(y+1)-1=2 \\ \log_2 x\cdot\log_2(1+y)=2 \end{cases}.$$

Пусть $\begin{cases} \log_2 x=a \\ \log_2(y+1)=b \end{cases}$.

Решим систему

$$\begin{cases} 2a+\dfrac{b}{2}=3 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6-4a \\ a(6-4a)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6-4a \\ 4a^2-6a+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6-4a \\ \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \\ a=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=4 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x=\dfrac{1}{2} \\ \log_2(y+1)=4 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x=1 \\ \log_2(y+1)=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\{(\sqrt{2}; 15); (2; 3)\}$.

137. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = 6 \\ \log_4 x + \log_4 y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = 6 \\ \log_4(xy) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} = 6\sqrt{xy} \\ xy = 4^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} = \dfrac{3}{4} \\ \sqrt{xy} = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$ — система Виета для уравнения $t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{8} = 0$.

Решим уравнение

$$t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 8t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4} \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{1}{4} \\ \sqrt{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{16} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{16} \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)\right\}$.

138. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)3^{y-x} = \dfrac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y) = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y} \\ 3\log_5\left(\dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y}\right) = x - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y} \\ 3 - 3\log_5 27 + 3(x-y)\log_5 3 = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y} \\ 3(1-\log_5 27) = (x-y)(1-\log_5 27) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y} \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ x-y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{(4; 1)\}$.

139. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - \sin x = 2y - \sin y \\ x + 2y = 9 \end{cases}.$$

Пусть $f(t) = 2t - \sin t$.

$f'(t) = 2 - \cos t > 0$ при всех t.

Таким образом, $f(t)$ возрастает на $\mathbb{R}$. Тогда справедлив переход $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Решим систему

$$\begin{cases} x = y \\ x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $\{(3;\ 3)\}$.

140. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + \cos x = 3y + \cos y \\ 3x - y = 6 \end{cases}.$$

Пусть $f(t) = 3t + \cos t$.

$$f'(t) = 3 - \sin t > 0 \text{ при всех } t.$$

Таким образом, $f(t)$ возрастает на $\mathbb{R}$. Тогда справедлив переход $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Решим систему

$$\begin{cases} x = y \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $\{(3;\ 3)\}$.