181. Решить уравнение с модулем

$$|\operatorname{tg} x|(x+3)=|x+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3>0\\ |\operatorname{tg} x|(x+3)=x+3\end{cases}\\ \begin{cases}x+3=0\\ 0=0 - \text{верно}\end{cases}\\ \begin{cases}x+3<0\\ |\operatorname{tg} x|(x+3)=-(x+3)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\ |\operatorname{tg} x|=1\end{cases}\\ x=-3\\ \begin{cases}x<-3\\ |\operatorname{tg} x|=-1 - \text{решений нет}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1\\ \operatorname{tg} x=-1\end{array}\right.\end{cases}\\ x=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{cases}\\ x=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k=-1,0,\ldots\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n=0,1,\ldots\\ x=-3\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-3;\ \frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n : k=-1, 0, \ldots,\ n=0, 1, \ldots\right\}$.

182. Решить уравнение с модулем

$$|\operatorname{ctg} x|(2x-3)=|2x-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3>0\\ |\operatorname{ctg} x|(2x-3)=2x-3\end{cases}\\ \begin{cases}2x-3=0\\ 0=0 - \text{верно}\end{cases}\\ \begin{cases}2x-3<0\\ |\operatorname{ctg} x|(2x-3)=-(2x-3)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ |\operatorname{ctg} x|=1\end{cases}\\ x=\frac{3}{2}\\ \begin{cases}x<\frac{3}{2}\\ |\operatorname{ctg} x|=-1 - \text{решений нет}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg} x=1\\ \operatorname{ctg} x=-1\end{array}\right.\end{cases}\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{cases}\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k=1,2,\ldots\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n=1,2,\ldots\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{3}{2};\ \frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n : k=1, 2, \ldots,\ n=1, 2, \ldots\right\}$.

183. Решить неравенство с модулем

$$8^x \geq 6\cdot 9^{|x-1|}.$$

Рассмотрим 2 промежутка $x\leq 1$ и $x\geq 1$:

1. $\begin{cases}x\leq 1\\ 8^x\geq 6\cdot 9^{1-x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ 8^x\geq 6\cdot\frac{9}{9^x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ 72^x\geq 54\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ x\geq \log_{72} 54\end{cases}.$

2. $\begin{cases} x \ge 1 \\ 8^x \ge 6 \cdot 9^{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 8^x \ge \dfrac{6}{9} \cdot 9^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left(\dfrac{8}{9}\right)^x \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le \log_{\frac{8}{9}} \dfrac{2}{3} \end{cases}.$

Из 1 и 2 имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge \log_{72} 54 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le \log_{\frac{8}{9}} \dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left[\log_{72} 54; \log_{\frac{8}{9}} \dfrac{2}{3}\right]$.

184. Решить неравенство с модулем

$$25^{x+1} \ge 10 \cdot 32^{|x-1|+1}.$$

Рассмотрим 2 промежутка $x \le 1$ и $x \ge 1$:

1. $\begin{cases} x \le 1 \\ 25^{x+1} \ge 10 \cdot 32^{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ \dfrac{5^{2x+2}}{5} \ge 2 \cdot 32^{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ 5^{2x+1} \ge 2^{11-5x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ 2x+1 \ge (11-5x)\log_5 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge \dfrac{11\log_5 2 - 1}{2 + 5\log_5 2} \end{cases}.$$

2. $\begin{cases} x \ge 1 \\ 25^{x+1} \ge 10 \cdot 32^{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \dfrac{5^{2x+2}}{5} \ge 2 \cdot 32^{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 5^{2x+1} \ge 2^{5x+1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x+1 \ge (5x+1)\log_5 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le \dfrac{\log_5 2 - 1}{2 - 5\log_5 2} \end{cases}.$$

Из 1 и 2 имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge \dfrac{11\log_5 2 - 1}{2 + 5\log_5 2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le \dfrac{\log_5 2 - 1}{2 - 5\log_5 2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left[\dfrac{11\log_5 2 - 1}{2 + 5\log_5 2}; \dfrac{\log_5 2 - 1}{2 - 5\log_5 2}\right]$.

185. Решить уравнение с модулем

$$|e^x - 1| = (2x+3)(e^x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)(e^x - 1) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} e^x - 1 = (2x+3)(e^x - 1) \\ e^x - 1 = -(2x+3)(e^x - 1) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+3)(e^x-1)\ge 0\\ \left[\begin{aligned}&(e^x-1)(2x+3-1)=0\\&(e^x-1)(2x+3+1)=0\end{aligned}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+3)(e^x-1)\ge 0\\ \left[\begin{aligned}&x=0\\&x=-1\\&x=-2\end{aligned}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-2\\&x=0\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\{-2;\,0\}$.

186. Решить уравнение с модулем

$$\sin^2 x=\cos x\,|\sin x|\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\sin x=0\\0=0\text{ – верно}\end{cases}\\&\begin{cases}\sin x>0\\\sin^2 x=\cos x\sin x\end{cases}\\&\begin{cases}\sin x<0\\\sin^2 x=\cos x(-\sin x)\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\sin x=0\\&\begin{cases}\sin x>0\\\sin x=\cos x\end{cases}\\&\begin{cases}\sin x<0\\\sin x=-\cos x\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\sin x=0\\&\begin{cases}\sin x>0\\\operatorname{tg} x=1\end{cases}\\&\begin{cases}\sin x<0\\\operatorname{tg} x=-1\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\pi k\\&\begin{cases}\sin x>0\\x=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{cases}\\&\begin{cases}\sin x<0\\x=-\frac{\pi}{4}+\pi k:k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\pi k\\&x=\frac{\pi}{4}+2\pi k\\&x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$.

187. Решить уравнение с модулем

$$\cos^2 x=\sin x\,|\sin x|\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\cos x=0\\0=0\text{ – верно}\end{cases}\\&\begin{cases}\cos x>0\\\cos^2 x=\sin x\cos x\end{cases}\\&\begin{cases}\cos x<0\\\cos^2 x=\sin x(-\cos x)\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\cos x=0\\&\begin{cases}\cos x>0\\\cos x=\sin x\end{cases}\\&\begin{cases}\cos x<0\\\cos x=-\sin x\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\cos x=0\\&\begin{cases}\cos x>0\\\operatorname{tg} x=1\end{cases}\\&\begin{cases}\cos x<0\\\operatorname{tg} x=-1\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{2}+\pi k\\&\begin{cases}\cos x>0\\x=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{cases}\\&\begin{cases}\cos x<0\\x=-\frac{\pi}{4}+\pi k:k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\pi k\\&x=\frac{\pi}{4}+2\pi k\\&x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$.

188. Решить уравнение с модулем

$$|e^x-1|=(3x+2)(e^x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}(3x+2)(e^x-1)\ge 0\\ \left[\begin{aligned}&e^x-1=(3x+2)(e^x-1)\\&e^x-1=-(3x+2)(e^x-1)\end{aligned}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2)(e^x-1)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} (e^x-1)(3x+1)=0 \\ (e^x-1)(3x+3)=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2)(e^x-1)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{3} \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-1;\ 0\}$.

189. решить уравнение с модулем

$$|\sin x| + \sin x(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0 \\ 0=0 - \text{верно} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x + \sin x(x-4)^2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ -\sin x + \sin x(x-4)^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \begin{cases} \sin x > 0 \\ 1+(x-4)^2 = 0 - \text{решений нет} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ -1+(x-4)^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ (x-4)^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-4=1 \\ x-4=-1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k : k\in\mathbb{Z} \\ \begin{cases} x=5 \\ \sin x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ \sin x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k : k\in\mathbb{Z} \\ x=5 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{5;\ \pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.

190. решить уравнение с модулем

$$\sin x + |\sin x|\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0 \\ 0=0 - \text{верно} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x + \sin x\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin x - \sin x\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \begin{cases} \sin x > 0 \\ 1+\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 = 0 - \text{решений нет} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ -1+\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{3}{2}=1 \\ x+\dfrac{3}{2}=-1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k : k \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ \sin x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k : k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{5}{2}; -\dfrac{1}{2}; \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.