251. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1}-25^x)\le -2 \Leftrightarrow -\log_{\sqrt{6}}(5^{x+1}-25^x)\le -2 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{6}}(5^{x+1}-25^x)\ge 2 \Leftrightarrow$$

$$\log_{\sqrt{6}}(5^{x+1}-25^x)\ge 2 \Leftrightarrow 5^{x+1}-25^x\ge 6 \Leftrightarrow 5\cdot 5^x-5^{2x}-6\ge 0 \Leftrightarrow 5^{2x}-5\cdot 5^x+6\le 0.$$

Пусть $5^x=t$.

Решим неравенство

$$t^2-5t+6\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 2 \\ t\le 3 \end{cases}.$$

Таким образом

$$\begin{cases} 5^x\ge 2 \\ 5^x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \log_5 2 \\ x\le \log_5 3 \end{cases}.$$

Ответ: $[\log_5 2; \log_5 3]$.

252. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3^{x+2}-9^x)\ge -6 \Leftrightarrow -\log_{\sqrt{2}}(3^{x+2}-9^x)\ge -6 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(3^{x+2}-9^x)\le 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+2}-9^x\le 8 \\ 3^{x+2}-9^x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\cdot 3^x-3^{2x}-8\le 0 \\ 9\cdot 3^x-3^{2x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x}-9\cdot 3^x+8\ge 0 \\ 3^{2x}-9\cdot 3^x<0 \end{cases}.$$

Пусть $3^x=t$.

Решим систему неравенств

$$\begin{cases} t^2-9t+8\ge 0 \\ t^2-9t<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>0 \\ t\le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} t\ge 8 \\ t<9 \end{cases} \end{array}\right..$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x>0 \\ 3^x\le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x\ge 8 \\ 3^x<9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x\le 1 \\ \begin{cases} 3^x\ge 8 \\ 3^x<9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ \begin{cases} x\ge \log_3 8 \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty; 0]\cup[\log_3 8; 2)$.

253. Решить неравенство

$$\log_2(2-3x)>4x+1.$$

Область определения неравенства $x<\frac{2}{3}$. Левая часть неравенства — убывающая, а правая часть — возрастающая функция. Если $x=0$, то обе части равны друг другу. Тогда $x<0$ — ответ.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

254. Решить неравенство

$$\log_2(2+x)>1-x.$$

Область определения неравенства $x>-2$. Пусть $x=0$: $\log_2(2+0)=1-0$ — верно. Поскольку $\log_2(2+x)$ — возрастающая функция, а $1-x$ — убывающая, $x>0$ — решение.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

255. Решить неравенство

$$9^x-2\cdot 3^x<3 \Leftrightarrow 9^x-2\cdot 3^x-3<0 \Leftrightarrow -1<3^x<3 \Leftrightarrow 3^x<3 \Leftrightarrow x<1.$$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

256. Решить неравенство

$$4^x-3\cdot 2^x<4 \Leftrightarrow 4^x-3\cdot 2^x-4<0 \Leftrightarrow -1<2^x<4 \Leftrightarrow 2^x<4 \Leftrightarrow x<2 .$$

Ответ: $(-\infty;\, 2)$.

257. Решить неравенство

$$\log_x \frac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0 .$$

По смыслу задачи

$$\begin{cases} 0<x\neq 1 \\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1 .$$

Таким образом

$$\begin{cases} 0<x<1 \\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 2x+\dfrac{2}{5}<5-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x<\dfrac{23}{35} \end{cases} .$$

Ответ: $\left(0;\, \dfrac{23}{25}\right)$.

258. Решить неравенство

$$\log_x \frac{4x+1}{6(x-1)}<0 \Leftrightarrow \log_x \frac{4x+1}{6(x-1)}<\log_x 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{4x+1}{6(x-1)}<1 \\ \dfrac{4x+1}{6(x-1)}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ x<1 \\ \dfrac{4x+1}{6(x-1)}>1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{4x+1-6x+6}{6x-6}<0 \\ \dfrac{4x+1}{6x-6}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ x<1 \\ \dfrac{4x+1-6x+6}{6x-6}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{2x-7}{6x-6}>0 \\ \dfrac{4x+1}{6x-6}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ x<1 \\ \dfrac{2x-7}{6x-6}<0 \end{cases} \text{ – решений нет} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{2x-7}{6x-6}>0 \\ \dfrac{4x+1}{6x-6}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{7}{2} .$$

Ответ: $\left(\dfrac{7}{2};\, +\infty\right)$.

259. Решить неравенство

$$\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)}\geq 0 .$$

Область определения неравенства задается системой соотношений

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \dfrac{3x+2}{4(1-x)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Решим систему

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{3x+2}{4(1-x)} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{3x+2-4(1-x)}{4(1-x)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{7x-2}{4-4x} \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{2}{7}\right]$.

260. Решить неравенство

$$\log_x \frac{2x+5}{4(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \log_x \frac{2x+5}{4(x-1)} \leq \log_x 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{2x+5}{4(x-1)} \leq 1 \\ \dfrac{2x+5}{4(x-1)} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ \dfrac{2x+5}{4(x-1)} \geq 1 \\ 1 > 0 \text{ – выполнено} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{2x+5-4x+4}{4x-4} \leq 0 \\ \dfrac{2x+5}{4x-4} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ \dfrac{2x+5-4x+4}{4x-4} \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{2x-9}{4x-4} \geq 0 \\ \dfrac{2x+5}{4x-4} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ \dfrac{2x-9}{4x-4} \leq 0 \end{cases} \text{ – решений нет} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{2x-9}{4x-4} \geq 0 \\ \dfrac{2x+5}{4x-4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{9}{2}; +\infty\right)$.