261. Решить неравенство

$$\log_{5x-4x^2} 4^x > 0.$$

По смыслу задачи $x>0$, тогда $4^x > 1$, тогда исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x-4x^2>0 \\ 5x-4x^2<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x<0 \\ 4x^2-5x+1>0 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right)$.

262. Решить неравенство

$$\log_{-6x-5x^2} 6^x > 0 \Leftrightarrow \log_{-6x-5x^2} 6^x > \log_{-6x-5x^2} 1 \Leftrightarrow \log_{-6x-5x^2} 1 < \log_{-6x-5x^2} 6^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -6x-5x^2>1 \\ 6^x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} -6x-5x^2>0 \\ -6x-5x^2<1 \\ 6^x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2+6x+1<0 \\ 6^x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x^2+6x<0 \\ 5x^2+6x+1>0 \\ 6^x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2+6x+1<0 \\ x>0 \end{cases} \text{– решений нет} \\ \begin{cases} 5x^2+6x<0 \\ 5x^2+6x+1>0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+6x<0 \\ 5x^2+6x+1>0 \\ x<0 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(-\frac{6}{5}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 0\right)$.

263. Решить неравенство

$$\log_{4+x^2} 8 < 1 \Leftrightarrow \log_{4+x^2} 8 < \log_{4+x^2}(4+x^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4+x^2>1 \\ 8<4+x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4+x^2>0 \\ 4+x^2<1 \\ 8>4+x^2 \\ 4+x^2>0 \text{ – выполнено} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2>-3 \\ x^2>4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2>-4 \\ x^2<-3 \text{ – решений нет} \\ x^2<4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>-3 \\ x^2>4 \end{cases}.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

264. Решить неравенство

$$\log_{x^2+2} 3 \ge 1 \Leftrightarrow \log_{x^2+2} 3 \ge \log_{x^2+2} x^2+2 \Leftrightarrow \log_{x^2+2} x^2+2 \le \log_{x^2+2} 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+2>1 \text{ – верно} \\ x^2+2\le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2>0 \text{ – верно} \\ x^2+2<1 \text{ – неверно} \\ x^2+2\ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2-1\le 0.$$

Ответ: $[-1;1]$.

265. Решить неравенство

$$\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \ge 2 \Leftrightarrow \log_7 x + \log_x 7 \ge 2 \Leftrightarrow \log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} \ge 2.$$

Пусть $\log_7 x = t$.

Решим неравенство

$$t + \frac{1}{t} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t} \ge 0 \Leftrightarrow t > 0.$$

Таким образом

$$\log_7 x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Ответ: $(1;+\infty)$.

266. Решить неравенство

$$2\log_2 \sqrt{x} - 2 \ge \log_x \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 x + \log_x 2 \ge 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \ge 2.$$

Пусть $\log_2 x = t$.

Решим неравенство

$$t + \frac{1}{t} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t} \ge 0 \Leftrightarrow t > 0.$$

Таким образом

$$\log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Ответ: $(1;+\infty)$.

267. Решить неравенство

$$\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} \le -2.$$

Сумма двух взаимообратных выражений не меньше двух тогда и только тогда, когда они положительны.

Решим неравенство

$$\log_4 x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Ответ: $(1;+\infty)$.

268. Решить неравенство

$$\log_x 3 - 4 \ge -4\log_3 x \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} + 4\log_3 x \ge 4.$$

Пусть $\log_3 x = t$.

Решим неравенство

$$\frac{1}{t} + 4t \ge 4 \Leftrightarrow \frac{4t^2 - 4t + 1}{t} \ge 0 \Leftrightarrow t > 0.$$

Таким образом

$$\log_3 x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Ответ: $(1;+\infty)$.

269. Решить неравенство

$$\log_{\frac{8}{3}} \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - 6) \ge 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - 6) \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \le \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 13 \le 0 \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2\right)\cup\left(3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

270. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2}-4^{x})\le -2 \Leftrightarrow 2^{x+2}-4^{x}\ge\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}\Leftrightarrow 2^{x+2}-4^{x}-3\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}-4\cdot 2^{x}+3\le 0.$$

Пусть $2^{x}=t$.

Решим неравенство

$$t^{2}-4t+3\le 0\Leftrightarrow\begin{cases} t\ge 1\\ t\le 3\end{cases}.$$

Таким образом

$$\begin{cases} 2^{x}\ge 1\\ 2^{x}\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0\\ x\le \log_{2}3\end{cases}.$$

Ответ: $[0; \log_{2}3]$.