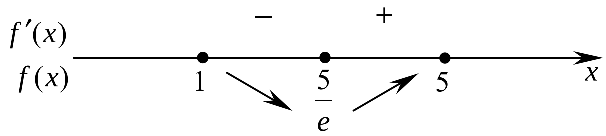
291. Найти наименьшее значение функции $f(x)=x\ln x - x\ln 5$ на отрезке $[1;\,5]$.

$D(f)=(0;\,+\infty)$

$$f'(x)=1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}-\ln 5+1=\ln x+1-\ln 5.$$

Решим уравнение

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-\ln 5+1=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln\frac{5}{e} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=\frac{5}{e} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{e}.$$



$$\min_{[1;\,5]} f(x)=f_{\min}=f\left(\frac{5}{e}\right)=\frac{5}{e}((\ln 5-1)-\ln 5)=-\frac{5}{e}.$$

Ответ: $-\frac{5}{e}$.

292. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\frac{1}{2}x\ln x - x\ln 2$ на отрезке $[1;\,4]$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\ln x-\ln 2+\frac{1}{2}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln x-\ln 2+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln\frac{4}{e} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=\frac{4}{e} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4}{e}.$$

Корень принадлежит заданному отрезку.

$$\min_{[1;\,4]} f(x)=f_{\min}(x)=f\left(\frac{4}{e}\right)=\frac{2}{e}(\ln 4-1)-\frac{2}{e}\ln 4=-\frac{2}{e}.$$

Ответ: $-\frac{2}{e}$.

293. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{6}x\ln 9$ на отрезке $[1;\,3]$.

$$f'(x)=\frac{1}{3}\ln x-\frac{1}{6}\ln 9+\frac{1}{3}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln x-\frac{1}{6}\ln 9+\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln\frac{3}{e} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=\frac{3}{e} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{e}.$$

Корень принадлежит заданному отрезку.

$$\min_{[1;\,3]} f(x)=f_{\min}=f\left(\frac{3}{e}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{e}(\ln 3-1)-\frac{1}{e}\ln 3=-\frac{1}{e}.$$

Ответ: $-\frac{1}{e}$.

294. Найти наименьшее значение функции $f(x)=2x\ln x - x\ln 49$ на отрезке $[1;\,7]$.

$$f'(x)=2+2\ln x-\ln 9.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2+2\ln x-\ln 9=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln\frac{7}{e} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=\frac{7}{e} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7}{e}.$$

Корень принадлежит заданному отрезку.

$$\min_{[1;\,7]} f(x) = f_{\min} = f\left(\frac{7}{e}\right) = \frac{14}{e}(\ln 7 - 1) - \frac{14}{e}\ln 7 = -\frac{14}{e}.$$

Ответ: $-\dfrac{14}{e}$.

295. Найти точки минимума функции $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x - 2x + 1$.

$$f'(x) = -2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - 2.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccccccc}
f'(x) & - & & + & & - & & + & & - & & + & & - & & + \\
f(x) & \searrow & -\frac{2\pi}{3} & \nearrow & 0 & \searrow & \frac{4\pi}{3} & \nearrow & 2\pi & \searrow & \frac{10\pi}{3} & \nearrow & 4\pi & \searrow & \frac{16\pi}{3} & \nearrow
\end{array} \quad x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

296. Найти точки максимума функции $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 10 - 2x$.

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 10 - 2x \Leftrightarrow 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 10 - 2x$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccccccc}
f'(x) & - & & + & & - & & + & & - & & + & & - & & + \\
f(x) & \searrow & -\frac{\pi}{4} & \nearrow & \frac{\pi}{12} & \searrow & \frac{3\pi}{4} & \nearrow & \frac{13\pi}{12} & \searrow & \frac{7\pi}{4} & \nearrow & \frac{25\pi}{12} & \searrow & \frac{11\pi}{4} & \nearrow
\end{array} \quad x$$

$$f'(x) = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{12} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

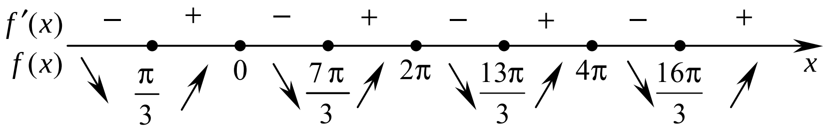
297. Найти точки максимума функции $f(x)=2\sqrt{3}\sin x-2\cos x-2\sqrt{3}x+11$.

$$2\sqrt{3}\sin x-2\cos x-2\sqrt{3}x+11 \Leftrightarrow 4\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}x+11$$

$$f'(x)=4\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \\ x=2\pi k : k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. .$$



Ответ: $\{2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.

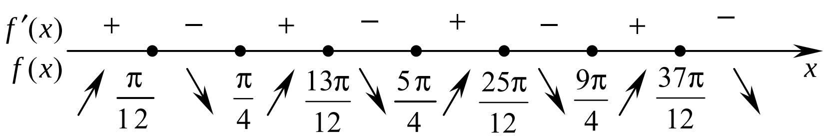
298. Найти точки минимума функции $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+2\sqrt{3}x-3$.

$$\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+2\sqrt{3}x-3 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+2\sqrt{3}x-3$$

$$f'(x)=-4\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+2\sqrt{3}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -4\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ 2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi k \\ x=\frac{\pi}{12}+\pi k : k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. .$$



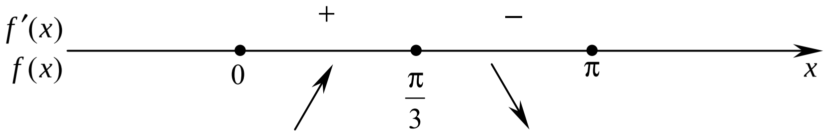
Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

299. Найти наименьшее значение функции $f(x)=1+4\sin x-2x$ на отрезке $[0;\pi]$.

$$f'(x)=4\cos x-2.$$

Решим систему

$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ 0\le x\le\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos x-2=0 \\ 0\le x\le\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{1}{2} \\ 0\le x\le\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \\ 0\le x\le\pi \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}.$$



Поскольку $f(0)=1$, $f(\pi)=1-2\pi$, $f(\pi)<f(0)$.

$\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x)=f(\pi)=1-2\pi$.

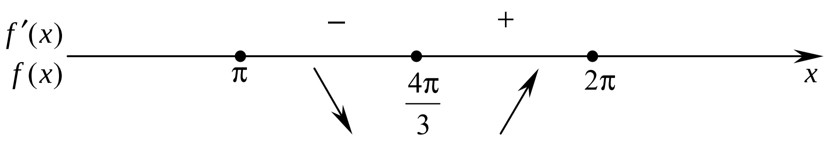
Ответ: $1-2\pi$.

300. Найти наибольшее значение функции $f(x)=-3+4\sin x+2x$ на отрезке $[\pi;\,2\pi]$.

$f'(x)=4\cos x+2$.

Решим систему

$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ \pi\le x\le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos x+2=0 \\ \pi\le x\le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=-\dfrac{1}{2} \\ \pi\le x\le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k \\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \pi\le x\le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3}.$$



Поскольку $f(\pi)=-3+2\pi$, $f(2\pi)=-3+4\pi$, $f(\pi)<f(2\pi)$.

$\max\limits_{[\pi;\,2\pi]} f(x)=f(2\pi)=-3+4\pi$.

Ответ: $-3+4\pi$.