Гущин Д. Д.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ 5: ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Два уравнения называются *равносильными* если множества их корней совпадают; в том числе, уравнения, не имеющие корней, считаются равносильными. Используется обозначение: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow h(x)=\varphi(x)$.

Если все решения первого уравнения являются решениями второго уравнения (множество решений первого уравнения является подмножеством решений второго уравнения), то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Используется обозначение: $f(x)=g(x) \Rightarrow h(x)=\varphi(x)$.

Таким образом, два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Теорема 1. Если любое выражение, входящее в уравнение, заменить тождественно равным ему на области определения уравнения выражением, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если к обеим частям уравнения прибавить выражение, имеющее смысл на области определения уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Следствие. Если любое слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, поменяв его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части уравнения умножить (разделить) на выражение, имеющее смысл и отличное от нуля на области определения уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Линейные уравнения. Уравнение $ax=b$, где x — неизвестное, a и b — любые действительные числа, называется *линейным уравнением* относительно x. Если $a\neq 0$, оно имеет единственное решение тогда $x=\frac{b}{a}$. Если $a=b=0$ его решением является любое действительное число. Если $a=0,\ b\neq 0$, то линейное уравнение не имеет решений.

Квадратные уравнения. Уравнение $ax^2+bx+c=0$, где x — неизвестное, $a\neq 0$, b и c – любые действительные числа, называется *квадратным уравнением* относительно x. Выражение $D=b^2-4ac$ называется дискриминантом уравнения $ax^2+bx+c=0$. В зависимости от значения дискриминанта квадратное уравнение на множестве действительных чисел может иметь два корня, один корень или не иметь корней. Если $D>0$ уравнение имеет два корня $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, если $D=0$ — один корень $x=-\frac{b}{2a}$, если $D<0$ корней нет.

Рациональные уравнения. Уравнения, в которых и левая, и правая части являются рациональными выражениями, называются *рациональными уравнениями*. При решении рациональных уравнений, содержащих переменную в знаменателе, необходимо учитывать, что знаменатель не может обращаться в нуль. Многие учащиеся допускают ошибки при решении уравнений вида $\frac{A}{B}=\frac{A}{C}$. Решим такое уравнение.

Задание. Решите уравнение $\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение. Заметим, что числители дробей равны, а знаменатели должны быть отличны от нуля. Тогда либо числители равны нулю, либо знаменатели равны друг другу.

Имеем:

$$\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+7\neq 0,\ \ 7x+5\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x+8=0,\\ 5x+7=7x+5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-8,\\ x=1.\end{array}\right.$$

Меньший из найденных корней равен –8.

Ответ: –8.

Иррациональные уравнения, включенные в задания ЕГЭ, являются уравнениями одного из трех типов: «корень нечетной степени равен числу», «корень четной степени равен числу» и «квадратный корень равен линейному выражению». Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Теорема. Пусть m — нечетное натуральное число, $m\geq 3$, n — четное натуральное число, a — любое число, $b\geq 0$.

Тогда:

$$\sqrt[m]{f(x)}=a\Leftrightarrow f(x)=a^m,$$
$$\sqrt[n]{f(x)}=b\Leftrightarrow f(x)=b^n,$$
$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)=g^2(x).\end{cases}$$

Иными словами, обе части уравнений указанного вида возводят в степень так, чтобы избавиться от знака корня. Причем возведение в нечетную степень является равносильным преобразованием при любых значениях правой части, а возведение в четную степень является равносильным преобразованием только в случае неотрицательности правой части уравнения.

Показательные уравнения, включенные в задания ЕГЭ, приводятся к одному из двух типов: $a^{f(x)}=a^b$ или $a^{f(x)}=a^{g(x)}$. Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Решение простейших показательных уравнений. Пусть $a>0$, $a\neq 1$. Тогда:

$$a^{f(x)}=a^b\Leftrightarrow f(x)=b,$$
$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

Логарифмические уравнения, включенные в задания ЕГЭ, приводятся к одному из трех типов: $\log_a f(x)=b,$ $\log_{f(x)} a=b,$ $\log_a f(x)=\log_a g(x).$ Для этого могут понадобиться формулы свойств логарифмов: $\log_a b+\log_a c=\log_a bc,$ $\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c},$ $\log_a(b)^n=n\log_a b$. Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Решение простейших логарифмических уравнений. Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $b\in\mathbb{R}$. Тогда:

$$\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b,$$
$$\log_{f(x)} a=b\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)\neq 1,\\ (f(x))^b=a.\end{cases}$$
$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)=g(x).\end{cases}$$

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

При решении многих задач ЕГЭ необходимо установить связь между различными основаниями степени, поэтому будет полезно знать некоторые степени чисел в пределах 1000:

$2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$ $2^5 = 32$ $2^6 = 64$
$2^7 = 128$ $2^8 = 256$, $2^9 = 512$ $2^{10} = 1024$

$3^2 = 9$ $3^3 = 27$ $3^4 = 81$ $3^5 = 243$ $3^6 = 729$

$4^2 = 16$ $4^3 = 64$ $4^4 = 256$ $4^5 = 1024$

$5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$

$6^2 = 36$ $6^3 = 216$ $7^2 = 49$ $7^3 = 343$

$8^2 = 64$ $8^3 = 512$ $9^2 = 81$ $9^3 = 729$