

## СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

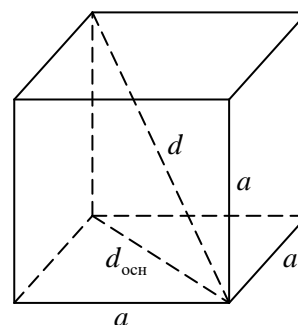
### ЗАДАНИЯ 8: СТЕРЕОМЕТРИЯ

#### ЭТО НАДО ЗНАТЬ: МНОГОГРАННИКИ

**Куб** — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Куб является частным случаем параллелепипеда и призмы, поэтому для него выполнены все их свойства. Кроме того, если  $a$  — длина ребра куба,  $d_{\text{осн}}$  — диагональ основания,  $d$  — диагональ куба,  $S_{\text{полн}}$  — площадь полной поверхности, а  $V$  — объем куба, то справедливы формулы:

$$d_{\text{осн}} = a\sqrt{2}, \quad d = a\sqrt{3},$$

$$S_{\text{полн}} = 6a^2, \quad V = a^3.$$



**Призма.** Призмой ( $n$ -угольной призмой) называется многогранник, две грани которого — равные  $n$ -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные  $n$  граней — параллелограммы.

**Прямой призмой** называется призма, боковое ребро которой перпендикулярно плоскости основания. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру, а все боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

**Правильной призмой** называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник.

**Соотношения для прямой призмы.** Пусть  $H$  — высота прямой призмы,  $AA_1$  — боковое ребро,  $P_{\text{осн}}$  — периметр основания,  $S_{\text{осн}}$  — площадь основания,  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности,  $S_{\text{полн}}$  — площадь полной поверхности,  $V$  — объем прямой призмы. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} AA_1, \quad S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \quad V = S_{\text{осн}} H.$$

**Прямоугольный параллелепипед.** Прямая призма, у которой основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями). Помимо свойств призмы, прямоугольный параллелепипед обладает следующими свойствами.

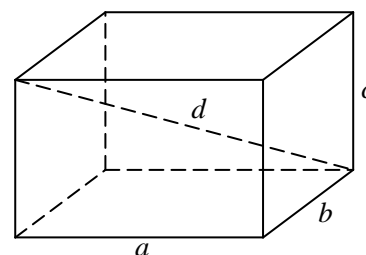
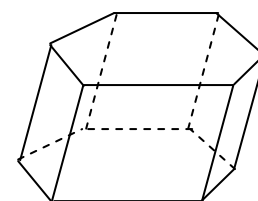
– Противоположные грани прямоугольного параллелепипеда — параллельные и равные прямоугольники.

– Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

– Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений:  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .

– Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна удвоенной сумме попарных произведений его измерений:  $S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac)$ .

– Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений  $V = abc$ .



**Особенности правильной шестиугольной призмы.** В основании правильной шестиугольной призмы лежит правильный шестиугольник. Напомним его свойства.

– Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности.

– Большая диагональ правильного шестиугольника является диаметром описанной вокруг него окружности и равна двум его сторонам.

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника в  $\sqrt{3}$  раз больше его стороны.

– Угол между сторонами правильного шестиугольника равен  $120^\circ$ .

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника перпендикулярна его стороне.

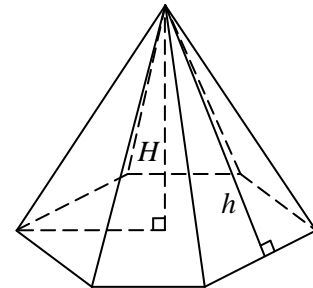
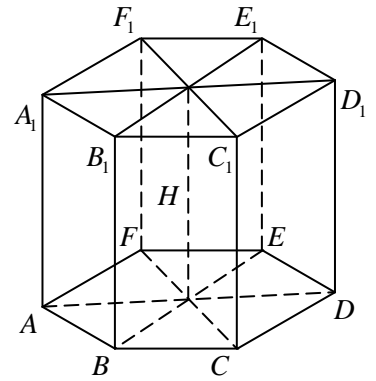
– Треугольник, образованный стороной шестиугольника, его большей и меньшей диагоналями, прямоугольный, а его острые углы равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ .

**Пирамида.** Пусть вне плоскости многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$  задана точка  $P$ . Тогда фигура, образованная треугольниками  $A_1PA_2, A_2PA_3, \dots, A_nPA_1$  и многоугольником  $A_1A_2 \dots A_n$  вместе с их внутренними областями называется *пирамидой* (*n-угольной пирамидой*).

Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а основание ее высоты — центр этого многоугольника.

**Соотношения для правильной пирамиды.** Пусть  $H$  — высота правильной пирамиды,  $h$  — ее апофема,  $P_{\text{осн}}$  — периметр основания пирамиды,  $S_{\text{осн}}$  — площадь основания,  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности,  $S_{\text{полн}}$  — площадь полной поверхности,  $V$  — объем правильной пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} h, \quad S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$



## ЭТО НАДО ЗНАТЬ: СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

*Секущей плоскостью* многогранника называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника. Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется *сечением* многогранника.

Тетраэдр имеет четыре грани, поэтому его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 1). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники (рис. 2).

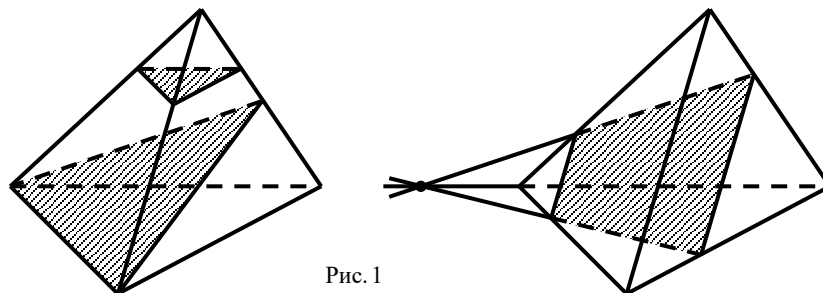


Рис. 1

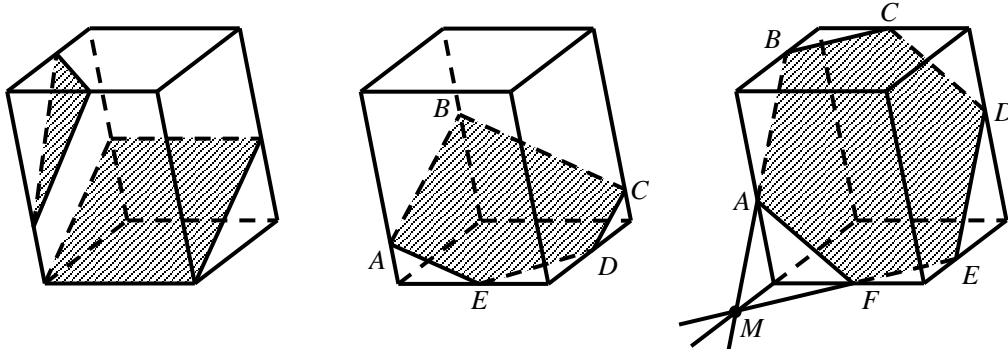


Рис. 2

Напомним теоремы, используемые при построении сечений.

**Теорема 1.** Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны. Поэтому секущая плоскость пересекает плоскости параллельных граней по параллельным прямым.

**Теорема 2.** Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

**Теорема 3.** Если прямая  $l$  параллельна какой-либо прямой  $m$ , проведённой в плоскости  $\alpha$ , то она параллельна и самой плоскости  $\alpha$ .

**Теорема 4.** Если прямая, лежащая в плоскости сечения, не параллельна плоскости некоторой грани, то она пересекается со своей проекцией на эту грань.

Для построения сечений рекомендуем пользоваться следующим алгоритмом.

1. Если две точки секущей плоскости лежат в плоскости одной грани, то проводим через них прямую. Часть прямой, лежащая в плоскости грани — сторона сечения.

2. Если прямая  $a$  является общей прямой секущей плоскости и плоскости какой-либо грани, то находим точки пересечения прямой  $a$  с прямыми, содержащими ребра этой грани. Полученные точки — новые точки секущей плоскости, лежащие в плоскостях граней.

3. Если никакие две из данных точек не лежат в плоскости одной грани, то строим вспомогательное сечение, содержащее любые две данные точки, а затем выполняем шаги 1, 2.

Для контроля правильности построенного сечения, проверьте, что:

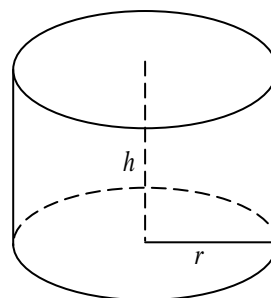
- все вершины сечения лежат на рёбрах многогранника;
- все стороны сечения лежат в гранях многогранника;
- в каждой грани многогранника лежит не более одной стороны сечения.

## ЭТО НАДО ЗНАТЬ: КРУГЛЫЕ ТЕЛА

**Цилиндр.** Цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

**Соотношения для цилиндра.** Пусть  $h$  — высота цилиндра,  $r$  — радиус основания,  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности,  $S_{\text{полн}}$  — площадь полной поверхности,  $V$  — объем цилиндра. Тогда имеют место следующие соотношения:

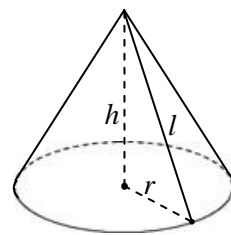
$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h, \quad S_{\text{полн}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad V = S_{\text{осн}} h = \pi r^2 h.$$



**Конус.** *Конусом* называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.

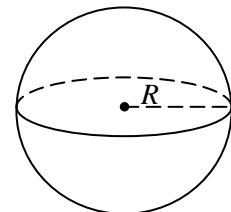
**Соотношения для конуса.** Пусть  $h$  — высота конуса,  $r$  — радиус основания,  $l$  — образующая,  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности,  $S_{\text{полн}}$  — площадь полной поверхности,  $V$  — объем конуса. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$h^2 + r^2 = l^2, \quad S_{\text{бок}} = \pi r l, \quad S_{\text{полн}} = \pi r^2 + \pi r l, \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$



**Сфера и шар.** *Шаром* называется фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр. *Сферой* называется поверхность шара. Пусть  $R$  — радиус шара,  $S$  — площадь сферы,  $V$  — объем шара. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$



## ЭТО НАДО ЗНАТЬ: КОМБИНАЦИИ КРУГЛЫХ ТЕЛ

### Вписанные сферы

Сфера называется *вписанной в цилиндр*, если она касается обоих оснований цилиндра и каждой его образующей.

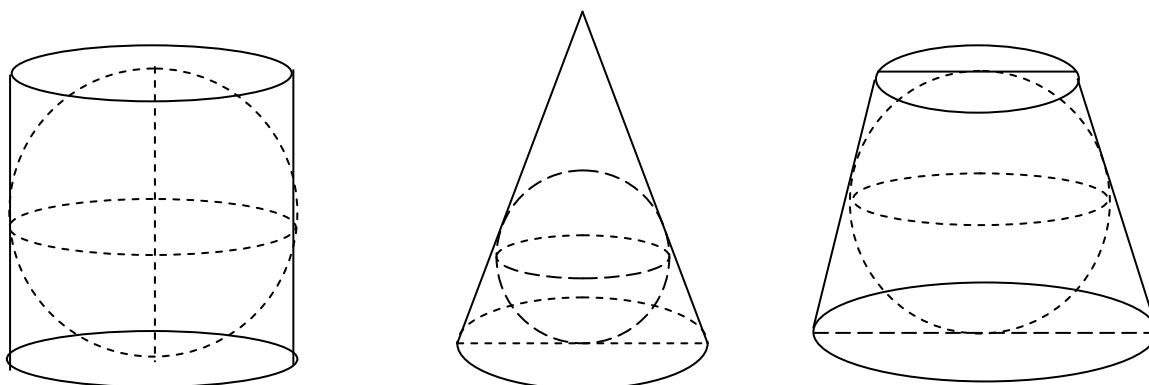
Сфера называется *вписанной в конус*, если она касается основания конуса и каждой его образующей.

Сфера называется *вписанной в усеченный конус*, если она касается обоих оснований конуса и всех его образующих.

**Теорема 1.** В прямой круговой цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота равна диаметру основания. Причём центр сферы есть середина оси цилиндра.

**Теорема 2:** в любой прямой круговой конус можно вписать сферу. Причём центр сферы есть точка пересечения оси конуса с биссектрисой угла наклона образующей конуса к плоскости его основания.

**Теорема 3.** в усеченный конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда он прямой круговой, и длина его образующей равна сумме длин радиусов оснований. Причём центр сферы есть середина оси усеченного конуса.



### Описанные сферы

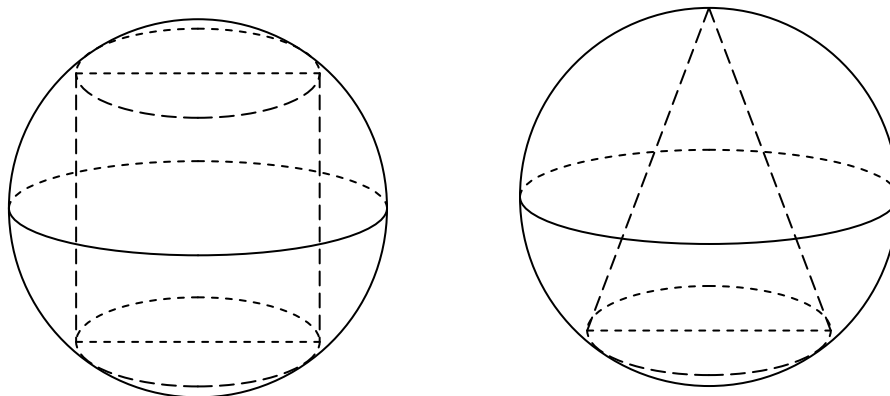
Сфера называется *описанной около цилиндра*, если окружности его оснований лежат на сфере.

Сфера называется *описанной около конуса*, если вершина конуса и его основание лежат на сфере.

**Теорема 1:** около цилиндра можно описать сферу тогда и только тогда, когда он прямой круговой. Причём центр сферы есть середина оси цилиндра.

**Теорема 2:** около конуса можно описать сферу тогда и только тогда, когда он круговой. Причём центр сферы есть точка пересечения прямой, перпендикулярной к плоскости основания и проходящей через центр его, и плоскости, перпендикулярной какой-либо его образующей конуса и проходящей через середину этой образующей.

**Следствие:** сферу можно описать около любого прямого кругового конуса. В этом случае, центр сферы — точка пересечения прямой, содержащей высоту конуса с плоскостью, перпендикулярной какой-либо из его образующих и проходящей через ее середину.



### Комбинации конуса и цилиндра

Цилиндр называется *вписанным в конус*, если одно его основание лежит на основании конуса, а второе совпадает с сечением конуса плоскостью, параллельной основанию. Конус в этом случае называется *описанным вокруг цилиндра*.

Цилиндр называется *описанным вокруг конуса*, если центр одного из оснований цилиндра является вершиной конуса, а противоположное основание цилиндра совпадает с основанием конуса. Конус в этом случае называется *вписанным в цилиндр*.

## ЭТО НАДО ЗНАТЬ: КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫХ ТЕЛ

### Описанные сферы

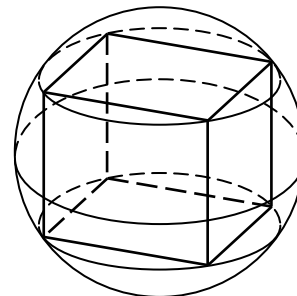
Сфера называется *описанной* около многогранника, если все его вершины лежат на этой сфере. Многогранник называется в этом случае *вписанным в сферу*.

Возможность описать сферу около многогранника означает существование точки (центра сферы), равноудалённой ото всех вершин многогранника.

**Теорема 1:** если из центра описанной около многогранника сферы опустить перпендикуляр на какое-либо из его рёбер, то основание этого перпендикуляра разделит ребро на две равные части.

**Теорема 2:** если из центра описанной около многогранника сферы опустить перпендикуляр на какую-либо из его граней, то основание этого перпендикуляра попадёт в центр круга, описанного около соответствующей грани.

**Теорема 3:** если около многогранника описана сфера, то её центр лежит на пересечении перпендикуляров к каждой грани пирамиды, проведённых через центр окружности, описанной около соответствующей грани.



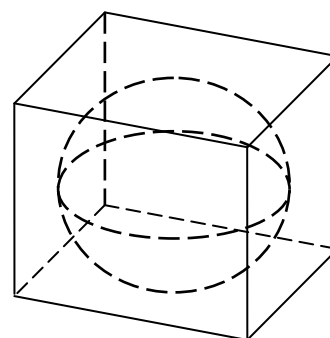
**Теорема 4:** если около многогранника описана сфера, то её центр является точкой пересечения всех плоскостей, проведённых через середины рёбер пирамиды перпендикулярно к этим рёбрам.

### Вписанные сферы

Сфера называется *вписанной* в многогранник, если все его грани касаются этой сферы. Многогранник называется в этом случае описанным около сферы.

**Теорема:** если в многогранник с площадью поверхности  $S$  и объёмом  $V$  вписан шар радиуса  $r$ , то справедливо соотношение:

$$r = \frac{3V}{S}.$$



### Комбинации конуса, цилиндра и многогранников

В условиях задач встречаются также следующие понятия, не входящие в школьные учебники, которые уточняются непосредственно в условиях задач. Приведем наиболее употребительные из них.

Цилиндр *вписан в призму*: основания цилиндра вписаны в основания призмы.

Цилиндр *описан вокруг призмы*: основания цилиндра описаны вокруг оснований призмы.

Цилиндр *вписан в пирамиду*: одно из оснований цилиндра вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, а другое основание цилиндра принадлежит основанию пирамиды.

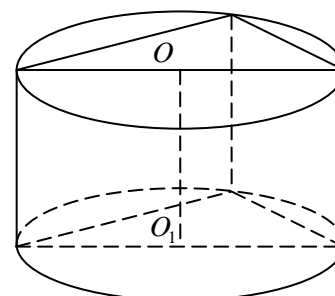
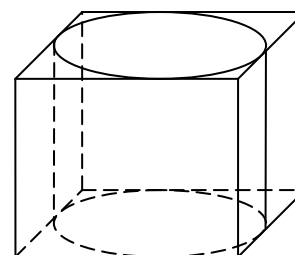
Цилиндр *описан вокруг пирамиды*: вершина пирамиды принадлежит одному из оснований цилиндра, а другое его основание описано вокруг основания пирамиды.

Конус *вписан в призму*: основание конуса вписано в основание призмы, а вершина конуса принадлежит противоположному основанию призмы.

Конус *описан вокруг призмы*: одно из оснований призмы вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, а другое основание призмы вписано в основание конуса.

Конус *вписан в пирамиду*: их вершины совпадают, а основание конуса вписано в основание пирамиды. Вписать конус в пирамиду можно только тогда, когда апофемы пирамиды равны между собой.

Конус *описан вокруг пирамиды*: их вершины совпадают, а основание конуса описано вокруг основания пирамиды.



### ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Задания этого вида представляют собой стереометрические задания на установление взаимосвязи между основными элементами многогранников и круглых тел, а также на использование формул для вычисления их площадей поверхностей и объёмов. Вычислительной трудности задания не представляют; решение, как правило, сводится к использованию одной-двух формул. Соответствующие формулы нужно знать наизусть.