Гущин Д. Д.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ 12: ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНОЙ

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Производная некоторых элементарных функций. Пусть k и n — любые числа, $a > 0$, $a \neq 1$, а x принимает такие значения, что обе части каждой из формул имеют смысл. Тогда справедливы формулы:

$$(const)' = 0, \qquad x' = 1, \qquad (kx+b)' = k, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

В частности:

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Правила дифференцирования. Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на некотором множестве *I*, c_1 и c_2 — любые действительные числа. Тогда на множестве *I* справедливы соотношения:

$$(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g', \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2},\ g \neq 0, \qquad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

В частности, производная многочлена равна сумме производных всех его членов.

Монотонность и экстремумы функции. Пусть дан график производной функции, определенной во всех точках некоторого промежутка. Существование конечной производной означает дифференцируемость функции на этом промежутке, а значит, влечет существование и непрерывность самой функции на нем. Тогда для определения поведения функции по знаку ее производной можно использовать следующие утверждения.

Если производная функции положительна на некотором промежутке, то функция возрастает на нем.

Если производная функции отрицательна на некотором промежутке, то функция убывает на нем.

Если производная функции в некоторой точке меняет знак с плюса на минус, то функция имеет в этой точке максимум.

Если производная функции в некоторой точке меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Наибольшее и наименьшее значение функции. Для определения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке используют следующие утверждения.

Пусть функция непрерывна на отрезке. Тогда наибольшее и наименьшее на этом отрезке значение функции достигается либо в критических точках, либо на концах отрезка.

Пусть функция непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\ b)$. Тогда наибольшее и наименьшее на отрезке $[a;\ b]$ значение функции достигается либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Тематика экзаменационных задач традиционна, полностью соответствует школьным учебникам. Предлагаемые задания в целом несложные, решение обычно сводится к реализации несложного алгоритма. При подготовке к экзамену следует повторить таблицу производных и правила дифференцирования и обратить внимание на различия в понятиях точка экстремума, экстремум, координаты точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение функции.

Основной корпус заданий представляет собой несложные задачи на определение поведения функции или ее производной по графику этой функции или ее производной. Важно внимательно следить за тем, график какой функции дан и про какую функцию поставлен вопрос задачи. Типичные ошибки решающих состоят в том, что, анализируя график производной, они путают его с графиком самой функции.

Среди экзаменационных заданий на нахождение наибольших и наименьших значений, встречаются такие функции, исследование которых при помощи производных труднее, чем элементарный анализ. В частности, отыскивая точку экстремума функции $f(x) = 2^{x^2-2x+4}$ достаточно заметить, что искомой точкой будет являться абсцисса вершины параболы, задаваемой уравнением $y = x^2 - 2x + 4,$ то есть точка 1.