Гущин Д. Д.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ В11: ЗАДАЧА ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: владение понятиями многогранник, куб, параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар; знание их свойств; знание формул для вычисления площадей поверхностей и объемов тел; умение применять эти знания при решении задач.

Ориентировочное время выполнения учащимися, изучающими математику на базовом уровне: 10—15 минут.

Типы заданий:

- Элементы, площадь поверхности, объем куба.
- Элементы, площадь поверхности, объем прямоугольного параллелепипеда.
- Элементы, площадь поверхности, объем призмы.
- Элементы, площадь поверхности, объем пирамиды.
- Элементы, площадь поверхности, объем конуса.
- Элементы, площадь поверхности, объем цилиндра.
- Элементы, площадь поверхности, объем шара.

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Задания B11 представляют собой стереометрические задания на установление взаимосвязи между основными элементами многогранников и круглых тел, а также на использование формул для вычисления их площадей поверхностей и объемов. По сравнению с заданиями B9 в заданиях B11 существенно расширены классы рассматриваемых геометрических тел: рассматриваются пирамиды, наклонные призмы, цилиндры, конусы, шары и их комбинации. Вычислительной трудности задания не представляют; решение, как правило, сводится к использованию одной-двух формул. Соответствующие формулы нужно знать наизусть.

Элементы, площадь поверхности, объем куба

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Куб — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Куб является частный случаем параллелепипеда и призмы, поэтому для него выполнены все их свойства. Кроме того, если a — длина ребра куба, $d_{осн}$ — диагональ основания, d — диагональ куба, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, а V — объем куба, то справедливы формулы

$$d_{\text{осн}} = a\sqrt{2}, \qquad d = a\sqrt{3}, \qquad S_{\text{полн}} = 6a^2, \qquad V = a^3.$$

Элементы, площадь поверхности, объем параллелепипеда

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Параллелепипед. *Параллелепипедом* называется призма, основанием которой служит параллелограмм. Тем самым, все грани параллелепипеда — параллелограммы. Для параллелепипеда выполнены все свойства призмы, в частности, объем параллелепипеда равен произведению площади основания на проведенную к нему высоту: $V = S_{\text{осн}}H$.

Прямой параллелепипед. Прямая призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *прямым параллелепипедом*. Для прямого параллелепипеда выполнены все свойства прямой призмы. В частности, боковые ребра являются его высотами, а площадь его боковой поверхности равна произведению периметра основания на длину бокового ребра: $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} l$.

Прямоугольный параллелепипед. Прямая призма, у которой основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями). Помимо свойств призмы, прямоугольных параллелепипед обладает следующими свойствами.

– Противоположные грани прямоугольного параллелепипеда — параллельные и равные прямоугольники.

– Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

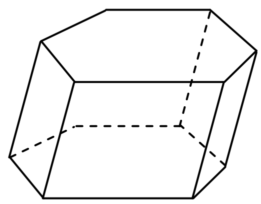
– Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

– Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна удвоенной сумме попарных произведений его измерений: $S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac)$.

– Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений $V = abc$.

Элементы, площадь поверхности, объем призмы

ЭТО НАДО ЗНАТЬ



Призма. *Призмой* (n-угольной призмой) называется многогранник, две грани которого — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы.

Прямой призмой называется призма, боковое ребро которой перпендикулярно плоскости основания. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру, а все боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

Правильной призмой называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник.

Соотношения для прямой призмы. Пусть H — высота прямой призмы, AA_1 — боковое ребро, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем прямой призмы. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} AA_1, \qquad S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \qquad V = S_{\text{осн}} H.$$

Особенности правильной шестиугольной призмы. В основании правильной шестиугольной призмы лежит правильный шестиугольник. Напомним его свойства.

– Все стороны правильного шестиугольника равны и равны радиусу описанного вокруг него круга.

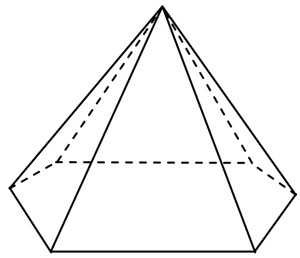
– Большая диагональ правильного шестиугольника является диаметром описанного круга и равна двум сторонам шестиугольника.

– Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°.

Элементы, площадь поверхности, объем пирамиды

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Пирамида. Пусть вне плоскости многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ задана точка P. Тогда фигура, образованная треугольниками A_1PA_2, A_2PA_3, …, A_nPA_1 и многоугольником $A_1A_2\ldots A_n$ вместе с их внутренними областями называется *пирамидой* (*n-угольной пирамидой*).



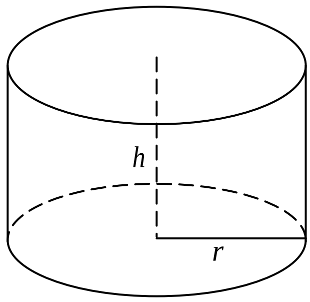
Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а основание ее высоты — центр этого многоугольника.

Соотношения для правильной пирамиды. Пусть H — высота правильной пирамиды, h — ее апофема, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем правильной пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}}h, \qquad S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \qquad V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H.$$

Элементы, площадь поверхности, объем цилиндра

ЭТО НАДО ЗНАТЬ



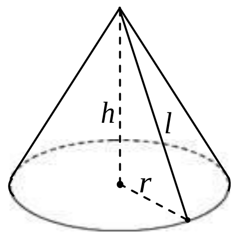
Цилиндр. *Цилиндром* называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Соотношения для цилиндра. Пусть h — высота цилиндра, r — радиус основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем цилиндра. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh, \qquad S_{\text{полн}} = \pi r^2 + 2\pi rh, \qquad V = S_{\text{осн}}h = \pi r^2 h.$$

Элементы, площадь поверхности, объем конуса

ЭТО НАДО ЗНАТЬ



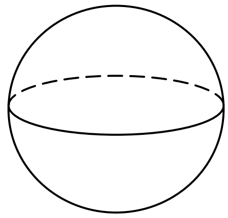
Конус. *Конусом* называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.

Соотношения для конуса. Пусть H — высота конуса, R — радиус основания, L – образующая, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем конуса. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$h^2 + r^2 = l^2, \qquad S_{\text{бок}} = \pi rl, \qquad S_{\text{полн}} = \pi r^2 + \pi rl, \qquad V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Элементы, площадь поверхности, объем шара

ЭТО НАДО ЗНАТЬ



Сфера и шар. *Шаром* называется фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр. *Сферой* называется поверхность шара. Пусть R — радиус шара, S — площадь сферы, V — объем шара. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S = 4\pi R^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$