Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

Гущин Д. Д.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ B13: ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: владение понятиями процент, доля, скорость, расстояние, равномерное движение, производительность, арифметическая и геометрическая прогрессия; умение решать текстовые задачи, составляя математическую модель предложенной в ней ситуации.

Ориентировочное время выполнения учащимися, изучающими математику на базовом уровне: 10—15 минут.

Типы заданий:

- Задачи на проценты, сплавы и смеси.
- Задачи на движение по окружности.
- Задачи на движение по суше и по воде.
- Задачи на совместную работу.
- Задачи на прогрессии.

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

К заданиям B13 отнесены традиционные для школьной математики текстовые задачи, изучаемые в курсе математики, позднее — алгебры и начал анализа на протяжении всего периода обучения. Абсолютное большинство задач B13 решается составлением уравнения или системы уравнений. При подготовке к экзамену уделите особое внимание решению задач на движение и на совместную работу: они являются наиболее сложными и чаще других встречаются в экзаменационных вариантах.

Задачи на проценты, сплавы и смеси

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Процент от числа — это сотая доля этого числа. Задача найти $p\%$ от a, эквивалентна задаче вычислить произведение $p\cdot\dfrac{a}{100}$ или $0,01pa.$ Например, вычисляя 6% от 150, получаем: $0,06\cdot150=6\cdot1,5=9.$ Справедливы следующие утверждения.

– Если некоторое число a увеличить на $p\%,$ то получим $a(1+0,01p)$.

– Если некоторое число a уменьшить на $p\%,$ то получим $a(1-0,01p)$.

– Если некоторое число a увеличить на $p_1\%,$ а полученный результат уменьшить на $p_2\%,$ то оно получим $a(1+0,01p_1)(1-0,01p_2).$

– Положенная в банк под $p\%$ годовых начальная сумма S_0 через n лет с учетом процентов достигнет величины $S_n=S_0(1+0,01p)^n.$

Задачи на движение по окружности

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Пусть скорости двух тел, начинающих движение одновременно, суть v_1 и v_2, тогда:

– при движении в одном направлении по замкнутой траектории длины S при условии $v_1 > v_2$ тела, отправившиеся из одной точки, снова встретятся через время $\frac{S}{v_1 - v_2}$;

– при встречном движении по замкнутой траектории длины s тела, отправившиеся из одной точки, снова встретятся через время $\frac{S}{v_1 + v_2}$.

Задачи на движение по суше и по воде

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Пусть скорости двух тел, начинающих движение одновременно, суть v_1 и v_2, расстояние между ними S. Тогда:

– при движении навстречу друг другу они встретятся через время $\frac{S}{v_1 + v_2}$;

– при движении в одну сторону, если $v_1 > v_2$, первое тело догонит второе через время $\frac{S}{v_1 - v_2}$;

– при движении в противоположные стороны тела через время t будут находиться друг от друга на расстоянии $S + (v_1 + v_2)t$.

– Если тело движется по течению реки, то его скорость относительно берега w есть сумма скорости тела в стоячей воде v и скорости течения реки u: $w = u + v$, при движении против течения: $w = u - v$.

Большая часть задач на движение, рассматриваемая в этом разделе, сводится к рациональным уравнениям, в свою очередь приводящимся к квадратным уравнениям. Для извлечения корня из дискриминантов будет полезна таблица квадратов:

$$11^2 = 121, \quad 12^2 = 144, \quad 13^2 = 169, \quad 14^2 = 196, \quad 15^2 = 225,$$
$$16^2 = 256, \quad 17^2 = 289, \quad 18^2 = 324, \quad 19^2 = 361, \quad 20^2 = 400,$$
$$21^2 = 441, \quad 22^2 = 484, \quad 23^2 = 529, \quad 24^2 = 576, \quad 25^2 = 625,$$
$$26^2 = 676, \quad 27^2 = 729, \quad 28^2 = 784, \quad 29^2 = 841, \quad 30^2 = 900.$$

Большинство экзаменационных задач на движение могут быть решены при помощи следующего алгоритма:

– обозначаем неизвестную величину буквой x, выясняем область ее определения;

– составляем таблицу со столбцами «Скорость», «Время», «Расстояние»;

– заполняем два столбца таблицы, вписывая в них x и данные задачи;

– заполняем оставшийся «ключевой» столбец по формулам $S = vt,\ v = \frac{S}{t},\ t = \frac{S}{v}$;

– составляем уравнение на данные ключевого столбца таблицы;

– решаем полученное уравнение на области определения x, и находим неизвестную.

Проиллюстрируем этот подход (в приведенных ниже таблицах ключевой столбец выделен).

Задачи на совместную работу

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Большинство экзаменационных задач на совместную работу могут быть решены при помощи следующего алгоритма:

– обозначаем неизвестную величину буквой x, выясняем область ее определения;

– составляем таблицу со столбцами «Производительность», «Время», «Объем работы»;

– заполняем два столбца таблицы, вписывая в них x и данные задачи; если объем работы не задан принимаем его за 1;

– заполняем оставшийся «ключевой» столбец по формулам $V = vt$, или $v = \frac{V}{t}$, или $t = \frac{V}{v}$, связывающим объем работы V, производительность v и время t.

– составляем уравнение на данные ключевого столбца таблицы;

– решаем полученное уравнение на области определения x, и находим неизвестную.

Проиллюстрируем этот подход (в приведенных ниже таблицах ключевой столбец выделен).

Задачи на прогрессии

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Арифметическая прогрессия. *Арифметической прогрессией* называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с постоянным для данной последовательности числом, называемым разностью прогрессии.

Пусть a_n — n-й член прогрессии, d — ее разность, S_n — сумма n первых членов. Тогда:

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad a_n = a_k + d(n-k), \qquad a_k + a_n = a_{k-m} + a_{n+m},\ m<k,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n \ge 2, \qquad a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},\ n>k, \qquad d = \frac{a_n - a_k}{n-k},\ n \ne k,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n, \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Геометрическая прогрессия. *Геометрической прогрессией* называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для данной последовательности отличное от нуля число, называемое знаменателем прогрессии.

Пусть b_n — n-й член прогрессии, q — ее знаменатель, S_n — сумма n первых членов. Тогда:

$$b_n = b_1 q^{n-1} = b_k q^{n-k}, \qquad b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} = b_{n-k}b_{n+k},\ n>k, \qquad b_n b_k = b_{n+m} b_{k-m},\ k>m,$$

$$|q| = \sqrt[n-k]{\frac{b_n}{b_k}},\ n>k, \qquad S_n = \begin{cases} b_1 n, & q = 1, \\ b_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}, & q \ne 1. \end{cases}$$