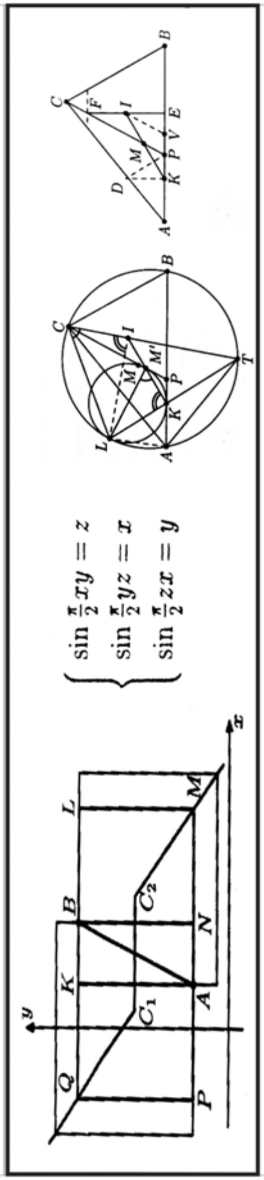


Д. Д. Гущин

Материалы вступительных экзаменов по математике

для поступающих на
физический факультет СПбГУ

2003

Д. Д. Гущин

Материалы вступительных экзаменов по математике

для поступающих на физический факультет СПбГУ

2003

Рекомендовано

Малым физическим факультетом
Санкт–Петербургского государственного университета

Учебное издание

Гущин Дмитрий Дмитриевич

Материалы вступительных экзаменов по математике для поступающих на физический факультет СПбГУ. — Париж: Стетоскоп, 2003. — 67 с.

ISSN 1295-4918

Пособие содержит условия задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах на физический факультет Санкт–Петербургского государственного университета с 1990 по 2002 годы. К задачам первого варианта приведены подробные решения.

1990 год

Физический факультет

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x+1}{2x-1}}(x^2+2x-1)>0$.
2. Решите неравенство $\left|\dfrac{x-1}{x+4}\right|>|3-x|$.
3. Решите уравнение $\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$.
4. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне, а меньшее основание равно b. Найдите боковую сторону, если известно, что она в m раз короче диагонали.
5. Через вершину конуса объема V под углом φ к его основанию проведена плоскость. Найдите периметр треугольника, получающегося в сечении конуса этой плоскостью, если известно, что угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x+\sqrt{5}}{2x-3}}(x^2+2x-3)>0$.
2. Решите неравенство $\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|>|2-x|$.
3. Решите уравнение $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$.
4. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне, а длина диагонали равна d. Найдите меньшее основание, если известно, что большее основание в m раз длиннее боковой стороны.
5. Через вершину конуса, образующая которого наклонена к основанию под углом α, проведена плоскость. Найдите объем конуса, если известно, что сечение конуса этой плоскостью есть треугольник площади S, угол которого при вершине равен β.

1991 год

Физический факультет

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4x + 2 - |4x - x^2|$.
2. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $\sin x + \cos x = \sin a + \cos a$ не имеет решений на отрезке $[0; \pi]$.
3. Найдите все решения неравенства $\lg \sin \frac{x}{2} < \lg \cos x$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.
4. В равнобокой трапеции средняя линия равна *a*, угол при основании равен $\frac{\pi}{4}$, а расстояние между параллельными сторонами равно *b*. Вычислите объем тела, получающегося при вращении трапеции вокруг средней линии.
5. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие — на кривой $y = x - x^2$. Вычислите площадь квадрата.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = |6x + x^2| - 6x - x^2 + 3$.
2. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $\sin x - \cos x = \sin a - \cos a$ не имеет решений на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. Найдите все решения неравенства $\log_{\frac{1}{2}} \cos \frac{x}{2} < \log_{\frac{1}{2}} \cos x$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.
4. В трапеции верхнее основание равно *a*, один угол при нижнем основании равен $\frac{\pi}{4}$, другой прямой, и расстояние между основаниями равно *b*. Вычислите объем тела, получающегося при вращении трапеции вокруг меньшей стороны.
5. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие — на кривой $y = 2x + x^2$. Вычислите площадь квадрата.

1992 год

Физический, геологический факультеты, факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x)=2\lg|x|-|2+\lg x^2|$.
2. Решите уравнение $\sqrt{\cos x-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\sin x-\dfrac{1}{2}}$.
3. Решите неравенство $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\dfrac{1}{2}$.
4. Около окружности радиуса R описана прямоугольная трапеция площади S. Вычислите острый угол трапеции.
5. Диаметр шара совпадает с высотой конуса и объемы конуса и шара равны. Вычислите отношение длины линии пересечения поверхности шара и боковой поверхности конуса к длине окружности основания конуса.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x)=4\log_2|x|-|4-\log_2 x^4|$.
2. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\cos x}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\sin x}$.
3. Решите неравенство $\dfrac{1+\log_3 x}{1-\log_9 x}\ge 4$.
4. Дан периметр P прямоугольной трапеции, описанной около окружности радиуса R. Вычислите острый угол трапеции.
5. Диаметр шара совпадает с высотой правильной четырехугольной пирамиды. Объемы шара и пирамиды равны. Вычислите отношение площади сечения пирамиды плоскостью, содержащей точки пересечения ее боковых ребер с поверхностью шара, к площади основания пирамиды.

1993 год

Физический, геологический факультеты, факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x)=x^2-4|x|+3$.
2. Решите уравнение $\log_3 x+\log_x 9=3$.
3. Решите уравнение $3\,\mathrm{tg}^2\,x-8\cos^2 x+1=0$.
4. Окружность с радиусом 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18 см. На какие отрезки делит окружность другие стороны квадрата?
5. Вершина конуса находится в центре шара, а основание касается шара. Объемы у конуса и шара равны. Вычислите отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности конуса, расположенной внутри шара.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x)=2|x|-x^2-1$.
2. Решите уравнение $\log_2 x+\log_x 16=4$.
3. Решите уравнение $2\,\mathrm{tg}^2\,x+4\cos^2 x=7$.
4. Окружность с радиусом 13 см касается двух смежных сторон прямоугольника со сторонами 18 см и 30 см. На какие отрезки она делит большую из оставшихся сторон прямоугольника?
5. Вершина конуса находится в центре шара, а основание касается шара. Площадь полной поверхности конуса равна площади поверхности шара. Найдите угол между высотой конуса и его образующей.

1994 год

Физический, геологический факультеты, факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x)=x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-|x^2-1|+1}$.
2. Решите уравнение $\log_x 100+\frac{1}{6}=\lg x$.
3. Решите уравнение $\sin x=\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}{4}$.
4. Высота делит прямоугольный треугольник на два треугольника, площади которых равны 96 см^2 и 54 см^2 соответственно. Найдите периметр исходного треугольника.
5. Шар касается трех граней и трех ребер куба с центром a. Найдите радиус шара.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x)=\sqrt{x^2+4-|x^2-4|}-2\sqrt{2}x$.
2. Решите уравнение $\log_x 1000=\lg x+\frac{2}{15}$.
3. Решите уравнение $4\cos x=\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}$.
4. Высота делит прямоугольный треугольник на два треугольника, периметры которых равны 6 см и 8 см соответственно. Найдите площадь исходного треугольника.
5. Шар касается двух граней и одного ребра правильного тетраэдра с ребром b. Найдите радиус шара.

1995 год

Физический, геологический факультеты, факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = |x^2 - |1 + 2x||$.
2. Решите неравенство $\log_2(x-1) + \log_2 x \le 1$.
3. Решите уравнение $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$.
4. Решите уравнение $\cos x = \sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$.
5. В равнобедренную трапецию *ABCD* вписана окружность с центром в точке *O* и радиусом *r*. Найдите радиус окружности, если известно, что $OA = a$ и $OD = b$.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = |x^2 - |2x - 1||$.
2. Решите неравенство $\log_3(x+2) + \log_3 x \le 1$.
3. Решите уравнение $\sqrt{2x-2} + \sqrt{x-2} = 3$.
4. Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$.
5. Равнобедренная трапеция *ABCD* описана около окружности с центром в точке *O* и радиусом *r*. Известно, что $OA = a$. Найдите расстояние от точки *O* до остальных вершин.

1996 год

Физический, геологический факультеты, факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x)=\dfrac{4^{x+1}+2^{x}-3}{3-2^{x+2}}$.
2. Решите уравнение $\sin x\cdot\sin 3x=\dfrac{3}{2}\cos 2x$.
3. Решите уравнение $\sqrt{7-x}-2x=1$.
4. Дана немонотонная функция $f(x)=a\,|\,x-1\,|+bx+2$; $a,b\in\mathbb{R}$. Найдите все пары чисел a и b такие, чтобы на отрезке $[0;\,2]$ минимальное значение этой функции равнялось -1, а максимальное равнялось 3.
5. В окружность радиусом R вписана трапеция с острым углом α. Найдите площадь трапеции, если известно, что ее средняя линия равна m.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x)=\dfrac{3^{2x+1}-5\cdot 3^{x}+2}{3^{x+1}-2}$.
2. Решите уравнение $\cos x\cdot\cos 3x=\dfrac{3}{2}\cos 2x$.
3. Решите уравнение $\sqrt{6+x}+2x=3$.
4. Дана немонотонная функция $f(x)=a\,|\,x+1\,|+bx+1$, $a,b\in\mathbb{R}$. Найдите все пары чисел a и b такие, чтобы на отрезке $[-2;\,0]$ минимальное значение этой функции равнялось -2, а максимальное равнялось 2.
5. В окружность радиусом R вписана трапеция с боковой стороной b и острым углом β. Найдите площадь трапеции.

1997 год

Физический, геологический факультеты, факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. По окружности радиуса R движутся в одинаковом направлении две материальные точки со скоростями V_1 и V_2 соответственно. Найдите расстояние между ними через время T, если известно, что они начали свое движение одновременно из диаметрально противоположных точек.
2. Решите уравнение $\sqrt{|5x-4|-5}=2x-3$.
3. Решите уравнение $\cos 4x+\dfrac{1}{2}=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Постройте график функции $f(x)=\log_2\dfrac{x-1}{x}+\log_4 x^2$.
5. Отрезок AB является гипотенузой прямоугольного треугольника ABC и стороной равнобедренного треугольника ABD. Найдите отношение $\dfrac{AB}{CD}$, если известно, что $\widehat{BAC}=\alpha$ и что отрезки AB и CD не пересекаются.

Вариант 2

1. По окружности радиуса R движутся в противоположном направлении две материальные точки со скоростями V_1 и V_2 соответственно. Найдите расстояние между ними через время T, если известно, что они начали свое движение одновременно из одной и той же точки.
2. Решите уравнение $\sqrt{|5x-2|-\dfrac{3}{2}}=2x-1$.
3. Решите уравнение $\dfrac{1}{2}-\cos 4x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Постройте график функции $f(x)=\log_3\dfrac{x+1}{x}+\log_9 x^2$.
5. Отрезок BC является одной из сторон равностороннего треугольника ABC и гипотенузой прямоугольного треугольника BCD. Найдите отношение $\dfrac{BC}{AD}$, если известно, что $\widehat{CBD}=\beta$ и что отрезки BC и AD не пересекаются.

1998 год

Физический, геологический факультеты, факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y|-x^2+x=y+|x^2-x|$.
2. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}=\dfrac{\sqrt{2x^2+5x}}{x+2}$.
3. Решите неравенство $\log_x(1+x)\le\log_{x^2}(4-3x-x^2)$.
4. Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin 3x+\sin x}=0$.
5. Найдите площадь треугольника, вписанного в окружность радиуса 13 см, если известно, что периметр треугольника 60 см, а одна из сторон — 24 см.

Вариант 2

1. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|1-x^2|-y=1-x^2+|y|$.
2. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x}{2x-5}}=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{2-x}$.
3. Решите неравенство $\log_x(4x-1)\ge\log_{x^2}(x+1-2x^2)$.
4. Решите уравнение $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos 3x-\cos x}=0$.
5. Найдите периметр треугольника, вписанного в окружность радиуса 5 см, если известно, что одна из его сторон 8 см, а площадь треугольника 4 см^2.

1999 год

Психологический и физический факультеты

Вариант 1

1. Три различных числа a, b, c, наибольшее из которых равно 4, в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найдите эту прогрессию, если известно, что некоторой перестановкой ее членов она превращается в арифметическую прогрессию.
2. Решите уравнение $\cos 2x + 2\sqrt{2}\sin x - 2 = \left(\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{3} - \sin x\right)^2$.
3. Решите уравнение $\sqrt{\frac{4x-1}{x}} = \frac{8x^2-2x-3}{x}$.
4. Решите неравенство $\frac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x} \ge 2$.
5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. В него вписана окружность радиуса R. Лучи AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что $\overset{\frown}{AMD} = \alpha$ и радиус окружности, вписанной в треугольник BMC, равен r.

Вариант 2

1. Три различных числа a, b, c, наименьшее из которых равно -6, в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию, если известно, что некоторой перестановкой ее членов она превращается в геометрическую прогрессию.
2. Решите уравнение $\cos 2x - 2\sqrt{2}\sin x - 2 = \left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3} - \cos x\right)^2$.
3. Решите уравнение $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{2x^2-2x-10}{x-2}$.
4. Решите неравенство $\frac{2^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}}{9\cdot 2^x - 4\cdot 3^x} \le \frac{1}{3}$.
5. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Лучи AD и BC пересекаются в точке N. Найдите периметр треугольника ABN, если известно, что $AB = a$ и $CD = b$.

2000 год

Психологический и физический факультеты

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2^{2x-x^2}=\dfrac{a-2}{a^2-1}$ имеет решения.
2. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+5}}\geq 1$.
3. Решите уравнение $\log_2 \log_{\frac{x}{9}} \dfrac{x}{27}=\log_2 \log_3 x+1$.
4. На каждой из четырех сторон прямоугольника лежит по одной вершине ромба. Расстояние от вершины острого угла ромба до ближайшей вершины прямоугольника равно 1. Площадь ромба равна 51. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон равна 6.
5. Решите уравнение $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos x$.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3^{x^2+2x}=\dfrac{a+2}{a^2-2a}$ имеет решения.
2. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+10}}\geq\dfrac{1}{2}$.
3. Решите уравнение $\log_3 \log_{\frac{x}{4}} \dfrac{x}{16}=\log_3 \log_2 x+1$.
4. На каждой из четырех сторон прямоугольника лежит по одной вершине ромба. Расстояние от вершины тупого угла ромба до ближайшей вершины прямоугольника равно 2. Площадь ромба равна 15. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон равна 6.
5. Решите уравнение $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos x$.

2001 год

Математико–механический факультет, факультет прикладной математики – процессов управления, физический факультет

Вариант 1

1. Косцы должны выкосить два луга. Начав косить больший луг, через два часа работы они разделились: большая часть косцов отправилась косить малый луг, площадью в два раза меньшей первого, и закончила работу одновременно с первой группой. Требуется определить, сколько косцов осталось работать на большем лугу, если известно, что один косец скашивает малый луг за три дня работы по 8 часов.

2. Решите уравнение $\dfrac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}{2\sin 2x(2\sin x-1)}=\mathrm{ctg}\,2x-\mathrm{ctg}\,x$.

3. Решите неравенство $\log_{x+a}2<\log_x 4$, при условии, что

   а). Математико-механический факультет: $0<a<\dfrac{1}{4}$.

   б). Физический факультет: $a>\dfrac{1}{4}$.

4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$. На биссектрисе угла A внутри треугольника выбрана точка O так, что площади треугольников OAB, AOC и BOC, взятые в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.

5. Найдите объем треугольной пирамиды, каждая грань которой представляет собой треугольник со сторонами длиной $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$.

Вариант 2

1. Две бригады маляров красят два цеха. После трех часов совместной работы в первом цехе вторая бригада перешла во второй цех, объем работы в котором был вдвое меньше, чем в первом. Требуется определить, сколько маляров было во второй бригаде, если известно, что покраска обоих цехов была закончена одновременно, а один маляр может покрасить меньший цех за 6 дней, работая по 8 часов ежедневно.

2. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1}{2\sin 2x(2\cos x - 1)} = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x$.

3. Решите неравенство $\log_{x+a} 3 < \log_{x-a} 9$, при условии, что

   а). Математико-механический факультет: $0 < a < \dfrac{1}{8}$.

   б). Физический факультет: $a > \dfrac{1}{8}$.

4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. На биссектрисе угла A внутри треугольника выбрана точка O так, что площади треугольников AOB, BOC и AOC, взятые в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.

5. Найдите объем треугольной пирамиды, каждая грань которой представляет собой треугольник со сторонами длиной $\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$ и 5.

2002 год

Физический факультет

Вариант 1

1. Выясните, какое из двух чисел больше: $\log_{15} 127$ или $\log_3 2 + \log_5 8$.
2. Решите уравнение $|x^3 - 4x^2 + 5x - 2| = x - 1$.
3. Решите уравнение $\cos x = 3\sin^3 x - \cos^3 x$.
4. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:
$$\begin{cases} |x+y| \le 1 \\ x^2 + y^2 \ge x + y. \end{cases}.$$
5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол между основанием и боковой гранью равен α. Даны два шара, каждый из которых касается основания пирамиды, двух ее боковых граней и другого шара (шары касаются разных граней). Найдите радиусы шаров, если известно, что один из них вдвое больше другого.

Вариант 2

1. Выясните, какое из двух чисел больше: $7\log_{14} 2$ или $\log_4 3 + \log_7 9$.
2. Решите уравнение $|x^3 - 4x^2 + x + 6| = x + 1$.
3. Решите уравнение $\sin x = 7\sqrt{3}\cos^3 x - \sin^3 x$.
4. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:
$$\begin{cases} |x-y| \le 1 \\ x^2 + y^2 + 2(x+y) \le 0. \end{cases}.$$
5. Дана правильная четырехугольная пирамида с высотой h и стороной основания b. Ее основания касаются два шара, каждый из которых касается двух боковых граней пирамиды и другого шара (шары касаются разных граней). Найдите радиусы шаров, если известно, что один из них в полтора раза меньше другого.

Ответы и решения

1990 год

1. Ответ: $(-1-\sqrt{3};\,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{3};\,2)$.

ОДЗ задается системой неравенств

$$\begin{cases} 0<\dfrac{x+1}{2x-1}\neq 1 \\ x^2+2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1-\sqrt{2} \\ \dfrac{1}{2}<x<2 \\ x>2\,. \end{array}\right.$$

Решение 1:

В зависимости от величины основания логарифма имеем два случая:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2x-1}>1 \\ x^2+2x-1>1 \end{cases} \Leftrightarrow -1+\sqrt{3}<x<2$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2x-1}<1 \\ x^2+2x-1<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1-\sqrt{3}<x<\frac{1}{2}\,.$$

Откуда, с учетом ОДЗ, и получаем ответ.

Решение 2:

Поскольку знак выражения $\log_a b$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(b-1)$, справедлив равносильный переход:

$$\log_{\frac{x+1}{2x-1}}(x^2+2x-1)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<\dfrac{x+1}{2x-1}\neq 1 \\ x^2+2x-1>0 \\ \left(\dfrac{x+1}{2x-1}-1\right)(x^2+2x-1-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{x+1}{2x-1} \neq 1 \\ x^2 + 2x - 1 > 0 \\ \left(\dfrac{1-x}{2x-1}\right)(x^2 + 2x - 2) > 0\,. \end{cases}$$

Решение последней системы и дает ответ.

2. Ответ: $(-1-\sqrt{14};\ -4) \cup (-4;\ -\sqrt{11}) \cup (-1+\sqrt{14};\ \sqrt{11})$.

$$\left|\frac{x-1}{x+4}\right| > |3-x| \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ |x-1| > |(3-x)(x+4)| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ |x-1|^2 > |x^2 + x - 12|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ (x-1)^2 - (x^2 + x - 12)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ (-x^2 + 11)(x^2 + 2x - 13) > 0\,, \end{cases}$$

откуда и следует ответ.

3. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi k}{2};\ \dfrac{\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x \Leftrightarrow$$

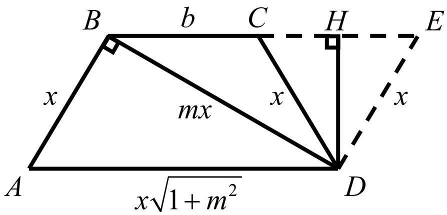
$$\Leftrightarrow 2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos 3x - \cos 7x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x \sin(-2x)\sin 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \sin 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = \pi k \\ 5x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \dfrac{\pi k}{2} \\ x = \dfrac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Заметим, что первая серия решений целиком содержится во второй, откуда и получаем окончательный ответ.

4. Ответ: $\dfrac{b\sqrt{m^2+1}}{m^2-1}$, $m>1$.



Решение 1:

Пусть $ABCD$ — заданная трапеция, $AB=x$, $BD=mx$. Достроим ее до параллелограмма $ABED$, в котором проведем высоту DH (см. рис.).

Из прямоугольного треугольника ABD найдем $AD=\sqrt{x^2+(mx)^2}=x\sqrt{1+m^2}$. Из равнобедренного треугольника CDE найдем длину отрезка CE:

$$CE=2EH=2DE\cos\widehat{DEC}=2DE\cos\widehat{DAB}=2x\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

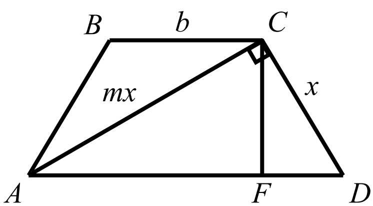
Поскольку противоположные стороны AD и BE параллелограмма $ABED$ равны, имеем равенство

$$x\sqrt{1+m^2}=b+2x\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Откуда $x=\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m^2-1}b$.

Решение 2:

Пусть $x=CD$, тогда $AC=mx$ и $AD=x\sqrt{m^2+1}$. Из подобия треугольников ACD и CFD имеем

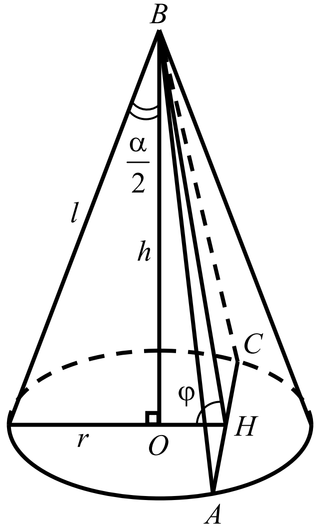


$$FD=\frac{x}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}(x\sqrt{m^2+1}-b),$$

$$x\left(-\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}+\sqrt{m^2+1}\right)=b\Leftrightarrow x=\frac{b}{\dfrac{m^2-1}{\sqrt{m^2+1}}}\Leftrightarrow x=\frac{b\sqrt{m^2+1}}{m^2-1}.$$

5. Ответ:

$$\sqrt[3]{\frac{24V}{\pi \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\varphi \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} \right).$$

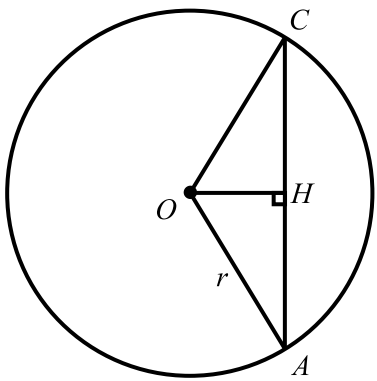


Пусть r — радиус основания конуса, тогда его образующая $l = \dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, высота

$h = r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, объем $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Откуда

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}.$$



Сечение, периметр которого требуется найти, представляет собой треугольник (обозначения см. на рисунке), две стороны которого являются образующими конуса. Расстояние от центра окружности, являющейся основанием конуса до третьей стороны

$$OH = h\operatorname{ctg}\varphi = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\varphi.$$

Поскольку

$$AC = 2AH = 2\sqrt{r^2 - OH^2} = $$
$$= 2r\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi},$$

искомый периметр есть

$$AB + BC + AC = 2\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 2r\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi}.$$

Отсюда и следует ответ.

Вариант 2

1. Ответ: $(-1-\sqrt{5};\,-3)\cup\left(\dfrac{3}{2};\,3+\sqrt{5}\right)$.

2. Ответ: $(-1-\sqrt{6};\,-3)\cup(-3;\,-\sqrt{7})\cup(-1+\sqrt{6};\,\sqrt{7})$

3. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2};\,\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi k}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: $\dfrac{d(m^2-2)}{m\sqrt{m^2-1}}$, $m>\sqrt{2}$.

5. Ответ: $\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{2S}{\sin\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

1991 год

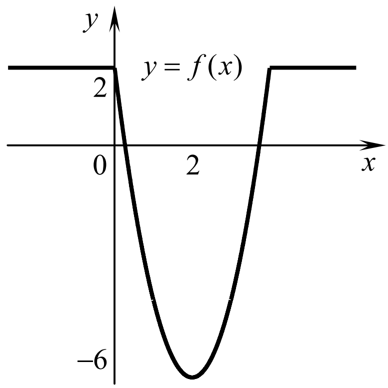
1. Ответ: см. рис.

Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$f(x)=x^2-4x+2-|4x-x^2|=$$

$$=\begin{cases}x^2-4x+2-(4x-x^2), & 4x-x^2\ge 0;\\ x^2-4x+2+(4x-x^2), & 4x-x^2\le 0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}2x^2-8x+2, & x\in[0;\ 4];\\ 2, & x\in(-\infty;\ 0]\cup[4;\ +\infty).\end{cases}$$



Тогда искомый график представляет собой часть объединение части параболы и двух лучей.

2. Ответ: $\pi+2\pi l<a<\dfrac{3\pi}{2}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$.

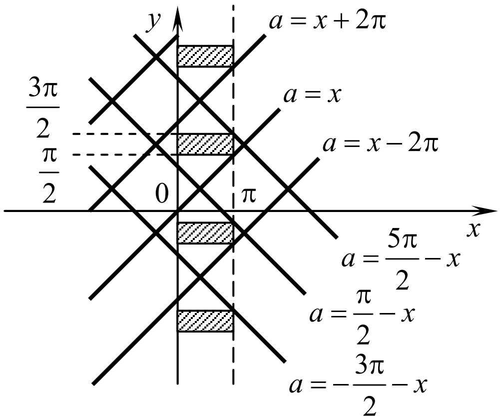
Решение 1:

$$\sin x+\cos x=\sin a+\cos a\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=a+\dfrac{\pi}{4}+2\pi k \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-a+\dfrac{\pi}{4}+2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=x-2\pi k \\ a=\dfrac{\pi}{2}-x+2\pi n;\ k,\ n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Изобразим на плоскости Oax прямые, задаваемые уравнениями совокупности (см. рис.). Поскольку уравнение не должно иметь корней на отрезке $[0;\pi]$, искомым значениям параметра a соответствуют заштрихованные на рисунке области, задаваемые двойными неравенствами



$$\pi+2\pi l<a<\frac{3\pi}{2}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}.$$

Решение 2:

$$\sin x+\cos x=\sin a+\cos a \Leftrightarrow \sin x-\sin a=\cos a-\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}=-2\sin\frac{a+x}{2}\sin\frac{a-x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}=\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}.$$

а) Решим уравнение $\sin\dfrac{x-a}{2}=0$.

$$\sin\frac{x-a}{2}=0\Leftrightarrow\frac{x-a}{2}=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=a+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Значит необходимо, чтобы

$$\pi+2\pi n<a<2\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) Решим уравнение $\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}=1$.

$$\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x+a}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-a+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ясно, что a не должно принадлежать отрезкам

$$\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi m;\ 2\pi+2\pi m\right),\ m\in\mathbb{Z}.$$

Отсюда и следует ответ.

3. Ответ: $\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};\ 2\pi\right)$.

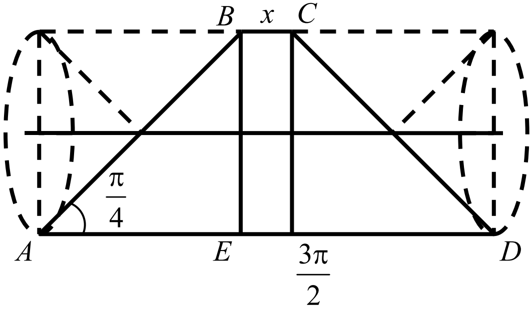
$$\lg\sin\frac{x}{2}<\lg\cos x \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{x}{2}>0\\ \sin\frac{x}{2}<\cos x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{x}{2}>0\\ \sin\frac{x}{2}<1-2\sin^2\frac{x}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{x}{2}>0\\ 2\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{x}{2}>0\\ \sin\frac{x}{2}<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Поскольку мы ищем решения неравенства на отрезке $[0;\ 2\pi]$ необходимо, чтобы $0\le\frac{x}{2}\le\pi$. Тогда $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{6}$ или $\frac{5\pi}{6}<\frac{x}{2}<\pi$ (см. рис.). Отсюда ответ: $0<x<\frac{\pi}{3}$ или $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$.

4. Ответ: $\frac{\pi b^3}{12}(3a+2b)$.

Пусть $ABCD$ — заданная трапеция. Вычислим искомый объем тела вращения как разность объемов цилиндра и двух равных конусов (см. рис.) Поскольку острый угол трапеции равен $\frac{\pi}{4}$ имеем равен-



ство $BE = CF = AE = FD = b$. Пусть длина верхнего основания $|BC| = |EF| = x$. Тогда $\frac{x + x + 2b}{2} = a \Leftrightarrow x = a - b$. Радиус основания конусов и цилиндра равен $r = \frac{b}{2}$. Так как $AD = a + b$, имеем $V_{\text{цил.}} = \pi r^2 AD = \frac{\pi b^2}{4}(a + b)$. Высоты конусов равны $\frac{b}{2}$, а их объемы $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{b}{2} = \frac{\pi b^3}{24}$. Тогда искомый объем равен

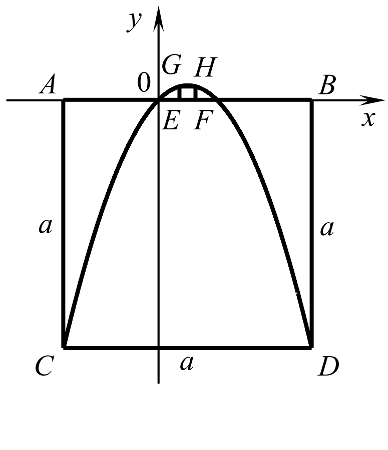
$$V_{\text{цил.}} - 2V_{\text{кон.}} = \frac{\pi b^2}{4}(a + b) - \frac{\pi b^3}{12} = \frac{\pi b^2}{12}(3a + 2b).$$

5. Ответ: $9 + 4\sqrt{5}$, $9 - 4\sqrt{5}$.

Решение 1:

Возможны два случая: квадраты *ABDC* и *EFHG*. Сторона квадрата, равная *a*, точкой $x = \frac{1}{2}$ делится пополам. Точки *F* и *B* имеют координату $x = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a+1}{2}$, и поэтому

$$\left| \frac{a+1}{2} - \left(\frac{a+1}{2} \right)^2 \right| = a \Leftrightarrow |1 - a^2| = 4a.$$



При $a > 1$ имеем

$$a^2 - 4a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2 + \sqrt{5}.$$

В этом случае площадь квадрата равна $a^2 = 9 + 4\sqrt{5}$.

При $a < 1$ имеем

$$a^2 + 4a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -2 + \sqrt{5}.$$

В этом случае площадь квадрата равна $a^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

Решение 2:
Пусть абсцисса одной из вершин квадрата равна x, другой $x+a$. Длина стороны квадрата тогда будет равна $|x-(x+a)|=|a|$, а его площадь $|a|^2=a^2$. Поскольку вертикальные стороны квадрата равны между собой и равны его горизонтальным сторонам, должна быть выполнена система уравнений:

$$\begin{cases} x-x^2=(x+a)-(x+a)^2 \\ x-x^2=a. \end{cases}$$

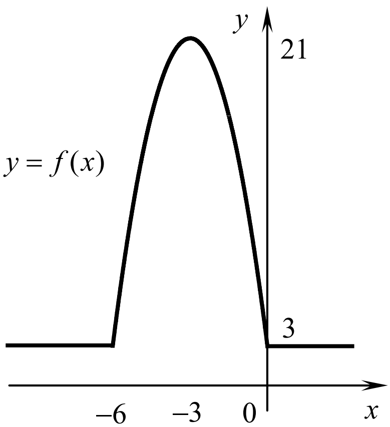
Откуда имеем

$$\begin{cases} a=1-2x \\ x-x^2=1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ a=-2-\sqrt{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ a=-2+\sqrt{5}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Тогда искомая площадь может равняться $9+4\sqrt{5}$ или $9-4\sqrt{5}$.

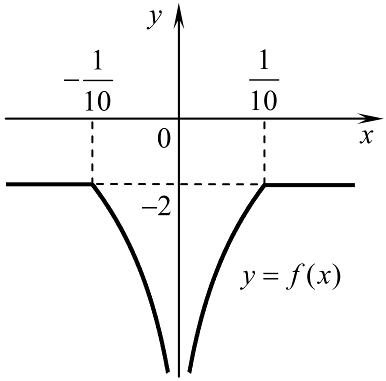
Вариант 2

1. Ответ: см. рис.
2. Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k<a<2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
3. Ответ: $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. Ответ: $\dfrac{\pi}{3}((a+b)^3-a^3)$.
5. Ответ: $12+8\sqrt{2}$ или $12-8\sqrt{2}$.



1. Ответ: см. рис.
Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$f(x) = 2\lg|x| - |2 + \lg x^2| = 2\lg|x| - |2 + 2\lg|x|| \ .$$



Поскольку заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат. Тогда достаточно построить часть графика, лежащую в правой полуплоскости, а затем отразить ее.
Пусть $x > 0$, тогда $|x| = x$, и выражение, задающее функцию, принимает вид

$$f(x) = 2\lg x - 2|1 + \lg x| = \begin{cases} 2\lg x - 2(1 + \lg x), \text{ если } 1 + \lg x \ge 0 \\ 2\lg x + 2(1 + \lg x), \text{ если } 1 + \lg x \le 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -2, \qquad \text{если } x \ge \dfrac{1}{10} \\ 4\lg x + 2, \text{ если } 0 < x \le \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

График последней функции получают растяжением графика функции $\lg x$ в четыре раза вдоль оси ординат и последующим сдвигом на две единицы вверх относительно оси абсцисс.

2. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right) \ge \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

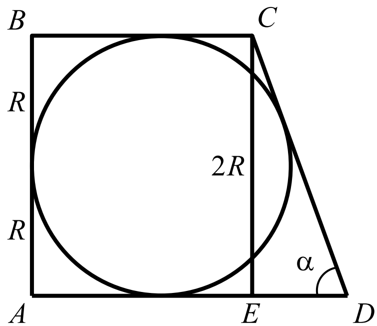
Поскольку $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}$ точки, соответствующие решениям и лежащие в первой четверти, удовлетворяют неравенству. Точки, соответствующие решениям и лежащие в третьей четверти, неравенству не удовлетворяют.

3. Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup[\sqrt{2};\ +\infty)$.

$$\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1-\frac{1}{2}\log_2 x}{1+\log_2 x}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1-2\log_2 x}{2(1+\log_2 x)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x<-1\\ \log_2 x\ge\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{2}\\ x\ge\sqrt{2}\end{array}\right.$$

4. Ответ: $\arcsin\frac{2R^2}{S-2R^2}$.



Проведём $CE\perp AD$. Заметим, что $AB=CE=2R$, так как это высоты трапеции. Пусть острый угол трапеции равен α (см. рис.) Поскольку треугольник CED прямоугольный по построению,

$$CD=\frac{CE}{\sin\alpha}=\frac{2R}{\sin\alpha}.$$

Так как окружность вписана,

$$BC+AD=AB+CD.$$

Тогда

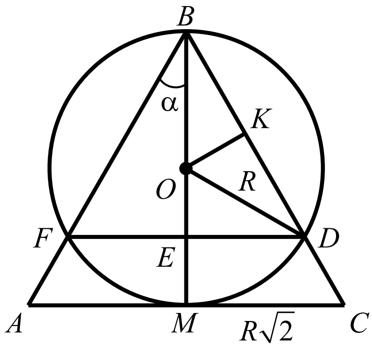
$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)AB=\frac{1}{2}(AB+CD)AB=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2R+\frac{2R}{\sin\alpha}\right)2R=2R^2\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

Величина площади дана и равна S, откуда

$$\sin\alpha=\frac{2R^2}{S-2R^2}\ \text{ и }\ \alpha=\arcsin\frac{2R^2}{S-2R^2}.$$

5. Ответ: $\dfrac{2}{3}$.



Решение 1:

Рассмотрим осевое сечение конуса и введем обозначения, как показано на рисунке.

Пусть $R = OB = OM = OD$ — радиус шара, $r = AM = MC$ — радиус основания конуса, $x = FE = ED$ — радиус окружности — линии пересечения поверхностей конуса и шара.

По условию

$$V_{\text{кон.}} = V_{\text{шара}} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2R = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, из прямоугольного треугольника ABM

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Заметим, что

$$BD = 2BK = 2R\cos\alpha,$$

$$x = ED = BD\sin\alpha = 2R\sin\alpha\cos\alpha.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{2\pi x}{2\pi r} = \frac{x}{r} = \sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{3}.$$

Решение 2:

Треугольник MBC прямоугольный, тогда $MC = \sqrt{2}R$. Треугольник ODE тоже прямоугольный, причем $\widehat{ODE} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, откуда

$$ED = OD\cos\widehat{ODE} = R\sin 2\alpha = R\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (решение 1), найдем $\dfrac{ED}{MC} = \dfrac{2}{3}$.

Вариант 2

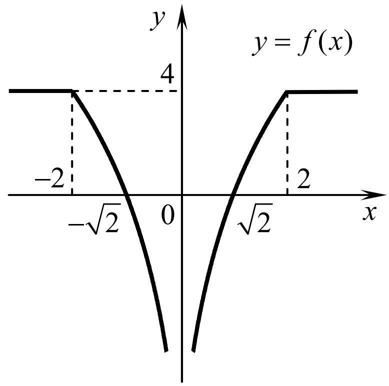
1. Ответ: см. рис.

2. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. Ответ: $[3;\ 9)$.

4. Ответ: $\arcsin\dfrac{4R}{P-4R}$.

5. Ответ: $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{4}+1\right)^2}$.



1993 год

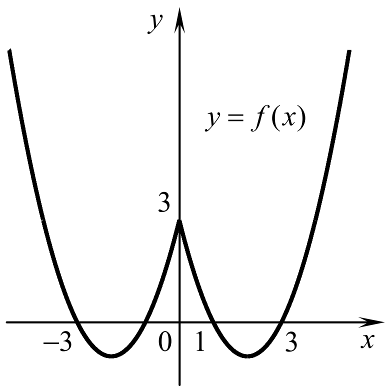
1. Ответ: см. рис.

Решение 1:

Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, \text{ при } x \le 0 \\ x^2 - 4x + 3, \text{ при } x \ge 0. \end{cases}$$

Искомый график представляет собой объединение двух частей парабол.



Решение 2:

Поскольку заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат. Тогда достаточно построить часть графика, лежащую в правой полуплоскости, т. е. часть параболы $y = x^2 + 4x + 3$, соответствующую неотрицательным x, а затем отразить ее относительно оси ординат.

2. Ответ: $\{3; 9\}$.

$$\log_3 x + \log_x 9 = 3 \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{2}{\log_3 x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \neq 0 \\ \log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 9. \end{array}\right.$$

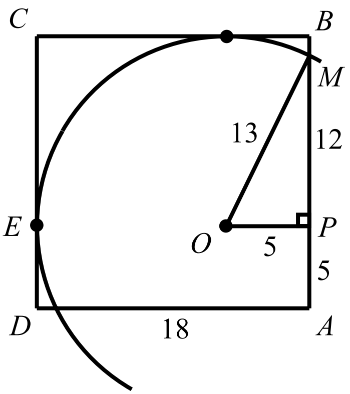
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$3\,\mathrm{tg}^2\, x - 8\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - 8\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x \neq 0 \\ 8\cos^4 x + 2\cos^2 x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = -\frac{3}{4}, \text{ решений нет} \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Ответ: 1 см, 17 см.



Пусть $ABCD$ данный квадрат, введем обозначения как на рисунке. Тогда

$$OE = 13,\ OP = AP = 5,$$

$$MP = \sqrt{OM^2 - OP^2} = \sqrt{169 - 25} = 12.$$

Искомые отрезки таковы:

$$MA = PA + PM = 5 + 12 = 17,$$

$$MB = 18 - 17 = 1.$$

5. Ответ: $2\sqrt{5}$.

Пусть радиус основания конуса равен R, радиус шара — r. Рассмотрим осевое сечение конуса и введем обозначения как на рисунке. Из равенства объемов получаем:

$$V_{\text{кон.}} = V_{\text{шара}} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi R^2 r = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow R^2 = 4r^2 \Leftrightarrow R = 2r.$$

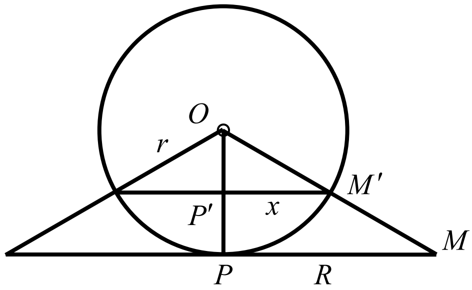
Следовательно,

$$OM = \sqrt{OP^2 + PM^2} = \sqrt{r^2 + R^2} = r\sqrt{5},$$

$$\frac{x}{2r} = \frac{P'M'}{PM} = \frac{OM'}{OM} = \frac{r}{r\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \frac{2r}{\sqrt{5}}.$$

Наконец, отношение площадей поверхностей равно

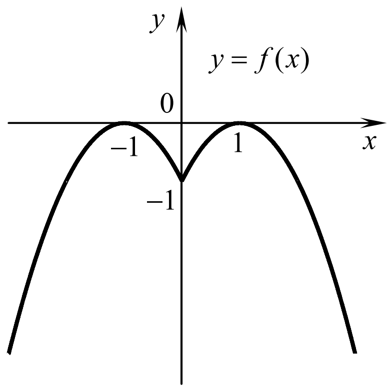
$$\frac{S_{\text{п. ш.}}}{S_{\text{п. к.}}} = \frac{4\pi r^2}{\pi x r} = \frac{4r}{x} = \frac{4r}{\frac{2r}{\sqrt{5}}} = 2\sqrt{5}.$$



.

Вариант 2

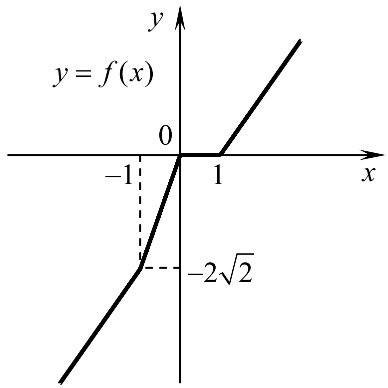
1. Ответ: см. рис.
2. Ответ: $\{4\}$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: 1 см, 24 см, 5 см.
5. Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.



1994 год

1. Ответ: см. рис.

Преобразуем выражение, задающее функцию:



$$f(x)=x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-|x^2-1|+1}=$$

$$=\begin{cases} x\sqrt{2}-\sqrt{2}, & x\in(-\infty;\,-1]\cup[1;\,+\infty) \\ 2x\sqrt{2}, & x\in[-1;\,0] \\ 0, & x\in[0;\,1]. \end{cases}$$

Искомый график представляет собой объединение соответствующих рассматриваемым промежуткам участков прямых.

2. Ответ: $\left\{10\sqrt{10};\ \dfrac{1}{10\sqrt[3]{10}}\right\}$.

$$\log_x 100+\frac{1}{6}=\lg x \Leftrightarrow \frac{2}{\lg x}+\frac{1}{6}=\lg x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x\neq 0 \\ 6\lg^2 x-\lg x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x=-\dfrac{4}{3} \\ \lg x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10^{-\frac{4}{3}} \\ x=10^{\frac{3}{2}}. \end{array}\right.$$

3. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{7\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{11\pi}{12}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\sin x=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{4} \Leftrightarrow 4\sin x=\frac{1}{|\cos x|} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\cos x}=4\sin x \\ \dfrac{1}{\cos x}=-4\sin x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4\sin x \cos x = 1 \\ 4\sin x \cos x = -1 \end{array}\right. \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \dfrac{1}{2} \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \pi k \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi k \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi k \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Откуда и следует ответ.

4. Ответ: 60 см.

Пусть a и b — катеты, а c — гипотенуза исходного треугольника. Площади маленьких треугольников пропорциональны отношению квадратов катетов. Тогда отношение катетов друг к другу есть

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{54}{96}} = \frac{3}{4}.$$

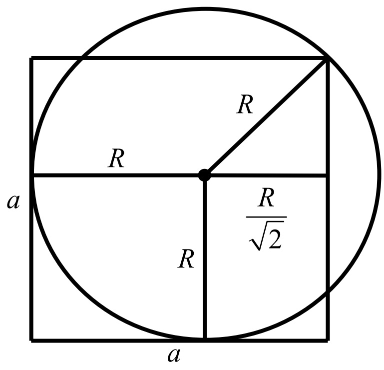
С другой стороны, площадь исходного треугольника равна 150 см^2, и равна половине произведения катетов: $\dfrac{ab}{2} = 150 \Leftrightarrow ab = 300$.

Для положительных a и b имеем систему: $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4} \\ ab = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 20. \end{cases}$

Тогда $c = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$, и искомый периметр равен 60 см.

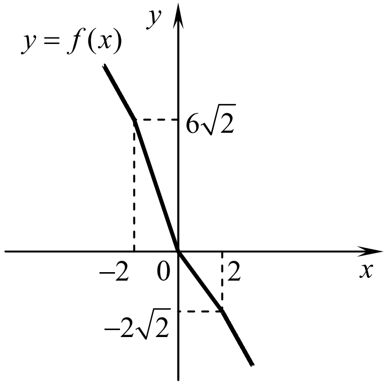
5. Ответ: $R = a(2 - \sqrt{2})$.

Рассмотрим сечение куба, перпендикулярное его ребру и проходящее через точку касания (см. рис.). Поскольку шар касается граней, его центр лежит на диагонали сечения. Тогда $a = R + \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, откуда и ответ.



Вариант 2

1. Ответ: см. рис.



2. Ответ: $\left\{10\sqrt[3]{10^2};\ \dfrac{1}{10\sqrt[5]{10^4}}\right\}$.

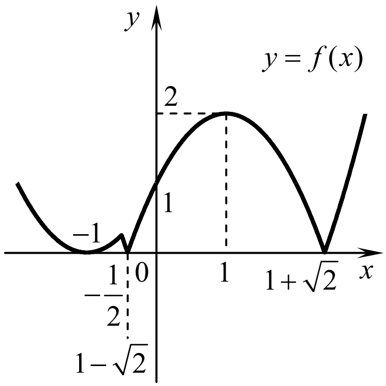
3. Ответ: $\left\{-\dfrac{5\pi}{12}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{12}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

4. Ответ: $\dfrac{25}{6}$ см ^{2}.

5. Ответ: $R=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}b$.

1995 год

1. Ответ: см. рис.



Пусть $g(x)=x^2-|1+2x|$. График функции $f(x)=|g(x)|$ получим из графика функции $g(x)$ отражением его части, лежащей в нижней полуплоскости относительно оси абсцисс. График функции g состоит из двух участков парабол, откуда, с учетом отражения, и следует ответ. Действительно,

$$g(x)=x^2-|1+2x|=$$

$$=\begin{cases} x^2+(1+2x), \text{ при } x\le -\dfrac{1}{2} \\ x^2-(1+2x), \text{ при } x\ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}=\begin{cases} (x+1)^2, \quad \text{при } x\le -\dfrac{1}{2} \\ x^2-2x-1, \text{ при } x\ge -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Ответ: $(1;\,2]$.

$$\log_2(x-1)+\log_2 x\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x-2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\le 2\,.$$

3. Ответ: $\{2\}$.

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ 3x-2+x-1+2\sqrt{(3x-2)(x-1)}=9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{3x^2-5x+2}=6-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 6-2x\ge 0 \\ 3x^2-5x+2=(6-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\le 3 \\ x^2-19x+34=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=17 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2\,.$$

4. Ответ: $\left\{\arcsin\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

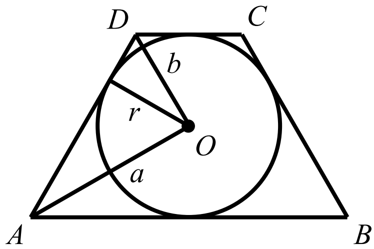
$$\cos x=\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \sqrt{-\sin x}=\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\ge 0 \\ -\sin x=\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \sin x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \text{решений нет} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi n-\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} x=\arcsin\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi k \\ x=\pi-\arcsin\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

5. Ответ: $r = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Центр вписанной в трапецию окружности лежит на пересечении биссектрис ее углов. Поэтому

$$\widehat{OAD} + \widehat{ODA} = \frac{1}{2}(\widehat{BAD} + \widehat{CDA}) = 90^\circ$$

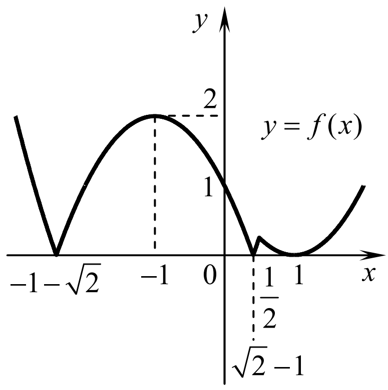
.

Тогда треугольник AOD прямоугольный. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому r — длина высоты треугольника AOD, проведенной из вершины прямого угла. Выразив его площадь как половину произведения катетов, с одной стороны, и как половину произведения высоты, опущенной на гипотенузу, на длину гипотенузы, получим уравнение для вычисления радиуса:

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}r\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow r = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Вариант 2

1. Ответ: см. рис.
2. Ответ: $(0; 1]$.
3. Ответ: $\{3\}$.
4. Ответ: $\left\{\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $a,\ \dfrac{ra}{\sqrt{a^2-r^2}},\ \dfrac{ra}{\sqrt{a^2-r^2}}$.



1. Ответ: см. рис.

Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$f=\frac{4^{x+1}+2^x-3}{3-2^{x+2}}=\frac{(2^x+1)(4\cdot 2^x-3)}{3-4\cdot 2^x}=$$

$$=-2^x-1,\ \ x\neq\log_2\frac{3}{4}.$$

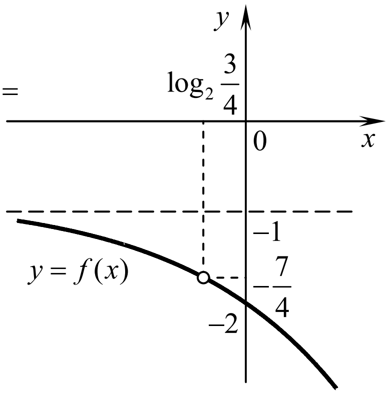


График искомой функции получается из графика функции $y=2^x$ отражением его относительно оси абсцисс и сдвигом полученного графика на 1 единицу вниз вдоль оси ординат.

2. Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi k;\ \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}.$

$$\sin x\sin 3x=\frac{3}{2}\cos 2x\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\cos(-2x)-\cos 4x)=\frac{3}{2}\cos 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\cos 4x=2\cos 2x\Leftrightarrow-(2\cos^2 2x-1)=2\cos 2x\Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\ \text{– решений нет}\\[2mm] \cos 2x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\arccos\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+2\pi k\\[2mm] 2x=-\arccos\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi k\\[2mm] x=-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

3. Ответ: $\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

$$\sqrt{7-x}-2x=1 \Leftrightarrow \sqrt{7-x}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ 7-x=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 4x^2+5x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$

4. Ответ: $a=-3$, $b=1$.

Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$f(x)=a\,|\,x-1\,|+bx+2=\begin{cases} (a+b)x+2-a, & 1 \le x \le 2 \\ (b-a)x+2+a, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

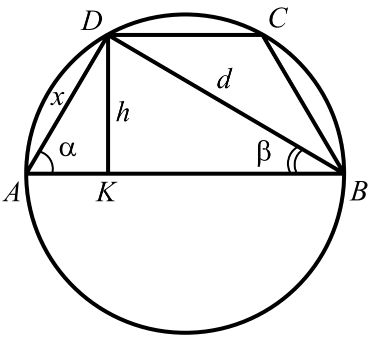
Точкой $x=1$ отрезок $[0;2]$ делится на два промежутка, на каждом из которых функция линейна и, следовательно, монотонна. Поэтому и минимальное и максимальное значения она принимает в одной из точек $x=0$, $x=1$, $x=2$. Вычислим значения функции в этих точках: $f(0)=a+2$, $f(1)=b+2$, $f(2)=a+2+2b$. Наименьшее из этих чисел должно равняться -1, а наибольшее — 3. Если оба числа a и b положительны, то никакое из найденных значений функции не может равняться -1, а если оба числа a и b отрицательны, то никакое из найденных значений функции не может равняться 3. Значит, числа a и b разных знаков, и реализуется один из следующих случаев:

а) $a \ge 0 \ge b$. Тогда наибольшее значение функции есть $f(0)$, откуда $a=1$, а наименьшее значение — одно из оставшихся чисел. Если $f(1)=-1$, то $b=-3$ и $f(2)=-3$, не подходит, ибо $f(1)$ не наименьшее значение. Если же $f(2)=-1$, то $b=-2$ и $f(1)=0$, не подходит, ибо функция f при найденных a и b монотонная.

б) $b \ge 0 \ge a$. Тогда наименьшее значение функции есть $f(0)$, откуда $a=-3$, а наибольшее значение — одно из оставшихся чисел. Если $f(2)=3$, то $b=2$ и $f(1)=4$, не подходит, ибо $f(1)$ не наибольшее значение. Если же $f(1)=3$, то $b=1$ и $f(2)=1$, подходит, ибо функция f при найденных a и b не монотонная.

5. Ответ: $S = m\sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha - m^2}$.

Решение 1:



Пусть $ABCD$ — заданная трапеция, введем обозначения как на рисунке.

Так как окружность описана, трапеция $ABCD$ — равнобедренная. Средняя линия равнобедренной трапеции равна расстоянию от вершины большего основания трапеции до её высоты, опущенной из противоположной вершины меньшего основания. Т. е. $KB = m$. Поскольку окружность описана и около треугольника ADB, можно применить теорему синусов, откуда $DB = 2R\sin\alpha$. Применяя к треугольнику DKB теорему Пифагора, имеем

$$DK = \sqrt{DB^2 - KB^2} = \sqrt{(2R\sin\alpha)^2 - m^2} .$$

Тогда площадь трапеции равна

$$S = mh = m\sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha - m^2} .$$

Решение 2:

Поскольку $m = KB = d\cos\beta$. По теореме синусов

$$\frac{d}{\sin\alpha} = 2R \Leftrightarrow \frac{m}{\sin\alpha} = 2R\cos\beta .$$

С другой стороны,

$$\frac{x}{\sin\beta} = 2R \Leftrightarrow x = 2R\sin\beta .$$

Исключая угол β , получим

$$\left(\frac{m}{\sin\alpha}\right)^2 + x^2 = 4R^2 ,$$

откуда

$$x = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha - m^2} .$$

Учитывая, что $S = mh = mx\sin\alpha$, получаем ответ.

Вариант 2

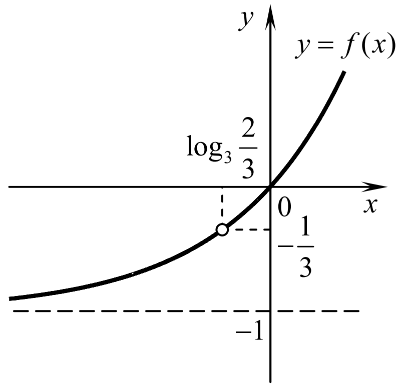
1. Ответ: см. рис.

2. Ответ: $\left\{-\arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\pi k;\ \arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Ответ: $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

4. Ответ: $a=-3$, $b=-1$.

5. Ответ: $S=c\sin^2\alpha\cdot\sqrt{4R^2-c^2}$.



1997 год

1. Ответ: $2R\left|\cos\dfrac{T(V_1-V_2)}{2R}\right|$.

Введем систему декартовых координат Oxy так, чтобы ее начало O совпадало с центром окружности, а материальные точки имели в начальном положении координаты $(R;\,0)$ и $(-R;\,0)$. В момент времени T координаты первой точки суть

$$x_1=R\cos\frac{TV_1}{R},\ y_1=R\sin\frac{TV_1}{R};$$

координаты второй точки:

$$x_2=R\cos\left(\frac{TV_2}{R}+\pi\right)=-R\cos\frac{TV_2}{R},$$

$$y_2=R\sin\left(\frac{TV_2}{R}+\pi\right)=-R\sin\frac{TV_2}{R}.$$

Поэтому, расстояние между точками равно

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=R\sqrt{\left(\cos\frac{TV_1}{R}+\cos\frac{TV_2}{R}\right)^2+\left(\sin\frac{TV_1}{R}+\sin\frac{TV_2}{R}\right)^2}=$$

$$=R\sqrt{2+2\cos\left(\frac{TV_1}{R}-\frac{TV_2}{R}\right)}=R\sqrt{4\cos^2\frac{T(V_1-V_2)}{2R}}=2R\left|\cos\frac{T(V_1-V_2)}{2R}\right|.$$

2. Ответ: $\left\{2;\ \frac{9}{4}\right\}$.

$$\sqrt{|5x-4|-5}=2x-3\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3\geq 0\\ |5x-4|-5=(2x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\underset{\substack{5x-4>0\\ \text{при }x\geq\frac{3}{2}}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x\geq\dfrac{3}{2}\\ 5x-4-5=4x^2-12x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{3}{2}\\ 4x^2-17x+18=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{9}{4}\end{array}\right..$$

3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{12}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$.

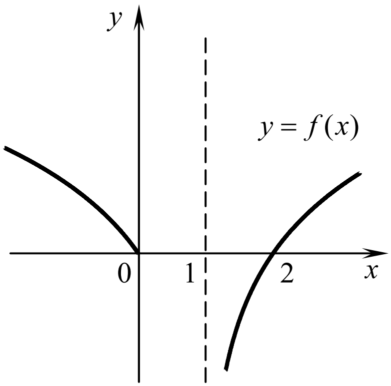
$$\cos 4x+\frac{1}{2}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\cos 4x+\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\left(2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0\\ \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ 2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\\ 2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi k}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{12}+\pi k\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

4. Ответ: см. рис.



Преобразуем выражение, задающее функцию:

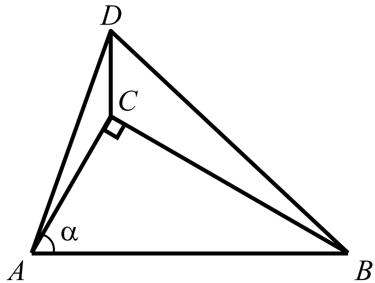
$$f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x} + \log_4 x^2 =$$

$$= \log_2 \frac{x-1}{x} + \log_2 |x| =$$

$$= \begin{cases} \log_2 (x-1), & x > 0 \\ \log_2 (1-x), & x < 0\,. \end{cases}$$

Каждая из ветвей графика получается из графика функции $y = \log_2 x$ известными операциями сдвигов и отражений.

5. Ответ: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha}}$.



Пусть $AB = x$. Тогда $AD = x$ и $AC = x\cos\alpha$. По теореме косинусов имеем:

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos\widehat{CAD}.$

Поскольку точка C может быть как внутри, так и вне треугольника ADB, величина угла CAD определяется неоднозначно. Именно, $\widehat{CAD} = \left| \alpha - \dfrac{\pi}{3} \right|$.

Поэтому

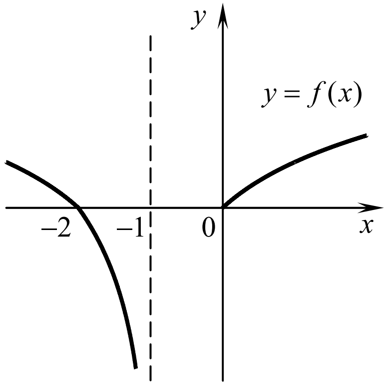
$$CD^2 = x^2\cos^2\alpha + x^2 - 2x^2\cos\alpha\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$x^2\left(\cos^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right) = x^2(1-\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha)\,.$$

Искомое отношение тогда

$$\frac{AB}{CD} = \frac{x}{x\sqrt{1-\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha}}\,.$$

Вариант 2



1. Ответ: $2R\left|\sin\dfrac{T}{2R}(V_1+V_2)\right|$.

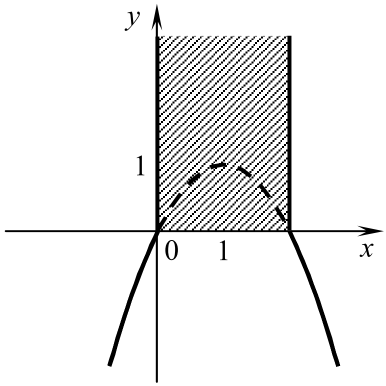
2. Ответ: $\left\{\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{2}\right\}$.

3. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}; \pi k; \dfrac{\pi}{3}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: см. рис.

5. Ответ: $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}\cos\beta\sin\beta}}$.

1998 год



1. Ответ: см. рис.
Если $y\ge 0$, то $|y|=y$, и уравнение, задающее множество точек, принимает вид

$$|x^2-x|=-(x^2-x)\Leftrightarrow x^2-x\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\le x\le 1.$$

Полученному соотношению удовлетворяют все точки вертикальной полосы, ограниченной прямыми $x=0$ и $x=1$. Если $y\le 0$, то $|y|=-y$, и уравнение, задающее множество точек, принимает вид

$$y=\frac{-(x^2-x)-|x^2-x|}{2}=\begin{cases}0, & x\in[0;\ 1]\\ -x^2-x, & x\in(-\infty;\ 0]\cup[1;\ +\infty).\end{cases}$$

Объединение рассмотренных случаев и дает ответ.

2. Ответ: $\{0\}$.

Выясним, какова область определения уравнения:

$$\begin{cases} x \neq -2 \\ \dfrac{x}{x+1} \geq 0 \\ 2x^2 + 5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{5}{2} \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

На промежутке $\left(-\infty;\ -\dfrac{5}{2}\right]$ справедливы равносильные переходы:

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{\sqrt{2x^2+5x}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-(x+1)}} = \frac{\sqrt{-x}\sqrt{-(2x+5)}}{x+2} \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+5)(x+1)} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x^2+7x+5 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+3x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Найденный корень не лежит в рассматриваемом промежутке.
На промежутке $[0;\ +\infty)$ справедливы равносильные переходы:

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{\sqrt{2x^2+5x}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{2x+5}}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{(2x+5)(x+1)} = x+2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}. \end{array} \right.$$

Из найденных корней только $x = 0$ лежит в рассматриваемом промежутке. Отсюда ответ.

3. Ответ: $\left[\dfrac{1}{2};\ 1\right)$.

Для нахождения области определения уравнения, решим систему:

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 1 + x > 0 \\ 0 < x^2 \neq 1 \\ 4 - 3x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Это означает, что основание логарифмов меньше 1, и при потенцировании неравенства требуется изменить его знак.

$$\log_x(1+x) \le \log_{x^2}(4-3x-x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ \log_x(1+x) \le \dfrac{1}{2}\log_x(4-3x-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ \log_x(1+x)^2 \le \log_x(4-3x-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 1+2x+x^2 \ge 4-3x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 2x^2+5x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 1 .$$

4. Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{12}+\pi k;\ \dfrac{7\pi}{12}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

ОДЗ: $\cos x \ne 0$ и $\sin 2x \cos x \ne 0$, то есть $x \ne \dfrac{\pi k}{2}$.

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 3x+\sin x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2\sin 2x\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \sin x \ne 0 \\ \sin 2x \ne 0 \\ \cos x = -2\sin 2x\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \ne 0 \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \\ 2x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+\pi k \\ x=\dfrac{7\pi}{12}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

5. Ответ: 120 см ^{2}.

Пусть $a=24$, b и c — стороны треугольника. По условию $a+b+c=60 \Leftrightarrow b+c=36$. Найдем теперь произведение этих сторон: $S=\dfrac{abc}{4R} \Leftrightarrow bc=\dfrac{13}{6}S$. Из формулы Герона имеем:

$$S=\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)}\Leftrightarrow S^2=30\cdot 6\cdot(30-b)(30-c)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S^2=180(900-30(b+c)+bc)\Leftrightarrow S^2=180\left(900-30\cdot 36+\frac{13}{6}S\right)\Leftrightarrow$$

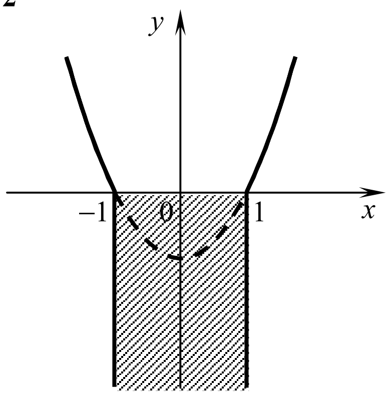
$$\Leftrightarrow S^2=30(13S-6\cdot 180)\Leftrightarrow S^2-390S+180^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}S=120\\ S=270.\end{array}\right.$$

Однако не каждый из найденных корней уравнения в действительности выражает площадь. Стороны треугольника b и c в сумме дают 36, а их произведение равно $\frac{13}{6}S$, т. е. 260 или 585.

Решая системы $\begin{cases}b+c=36\\ bc=260\end{cases}$ и $\begin{cases}b+c=36\\ bc=585\end{cases}$, можно убедиться, что вторая из них не имеет решений, и искомое значение площади равно только 120 см ^{2}. (Другое рассуждение: числа b и c суть корни квадратного уравнения $z^2-36z+\frac{13}{6}S=0$, которое имеет решение, только если $36^2-4\cdot\frac{13}{6}S\geq 0$ или $S\leq\frac{6\cdot 18^2}{13}\leq\frac{6\cdot 20\cdot 20}{10}=240$.)

Вариант 2

1. Ответ: см. рис.
2. Ответ: $\{0\}$.
3. Ответ: $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right]$.
4. Ответ: $\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $8+6\sqrt{2}$ см или $8+4\sqrt{6}$ см.



1. Ответ: $\{(4;-2;1);(-8;4;-2);(-2;4;-8);(1;-2;4)\}$.

Пусть $b=aq$, $c=aq^2$. По определению геометрической прогрессии $a\neq 0$, по смыслу задачи $q\neq 1$. Рассмотрим два случая.

а) Если b, a, c — арифметическая прогрессия, то $b+c=2a \Leftrightarrow aq+aq^2=2a \Leftrightarrow q+q^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=1 \\ q=-2. \end{array}\right.$ Из найденных значений только $q=-2$ удовлетворяет условию различности заданных чисел. Тогда искомая прогрессия имеет вид $a,\ -2a,\ 4a$.

б) Если a, c, b — арифметическая прогрессия, то $a+b=2c \Leftrightarrow a+aq=2aq^2 \Leftrightarrow 1+q=2q^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=1 \\ q=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ Поскольку значение $q=1$ не удовлетворяет условию задачи, искомая геометрическая прогрессия имеет вид $a,\ -\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{4}$. Учитывая теперь для каждого из рассмотренных случаев, что наибольший член прогрессии равен 4, получим ответ.

2. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+6\pi m;\ \dfrac{17\pi}{4}+6\pi m : m\in\mathbb{Z}\right\}$.

Заметим, что левая часть уравнения представляет собой выражение, противоположное полному квадрату разности:

$$\cos 2x+2\sqrt{2}\sin x-2=1-2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x-2=-(\sqrt{2}\sin x-1)^2.$$

Поэтому заданное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -(\sqrt{2}\sin x-1)^2=0 \\ \left(\cos\dfrac{x}{3}-\sin\dfrac{x}{3}-\sin x\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\dfrac{x}{3}-\cos\dfrac{x}{3}=-\sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ \sin\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

При $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$, решим уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2\pi k}{3} - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m \\ \dfrac{2\pi k}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi m \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 3m \\ k = 2 + 3m, \ k, m \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Таким образом искомые решения задаются сериями

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 6\pi m \\ x = \dfrac{7\pi}{4} + 6\pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Для серии возможных решений $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$, рассуждения аналогичны.

3. Ответ: $\left\{ \dfrac{1 - \sqrt{17}}{8}; \dfrac{1 + \sqrt{37}}{8} \right\}$.

$$\sqrt{\frac{4x - 1}{x}} = \frac{8x^2 - 2x - 3}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8x^2 - 2x - 3}{x} \geq 0 \\ \dfrac{4x - 1}{x} = \left(\dfrac{8x^2 - 2x - 3}{x}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8x^2 - 2x - 3}{x} \geq 0 \\ 4x^2 - x = (2(4x^2 - x) - 3)^2. \end{cases}$$

Для решения уравнения введем замену: решим уравнение $t=(2t-3)^2$ где $t=x(4x-1)$. Его корни $t=1$ и $t=\frac{9}{4}$. Вычисляя теперь значения x и отбрасывая посторонние корни, получаем ответ.

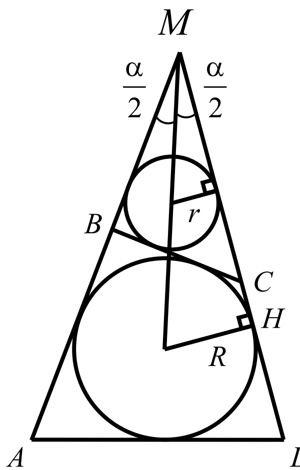
4. Ответ: $(0;\,2]$.

Разделим числитель и знаменатель дроби на 3^x:

$$\frac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x}\geq 2\Leftrightarrow \frac{3+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\left(\frac{5}{3}\right)^x-1}\geq 2\Leftrightarrow \frac{25-9\left(\frac{5}{3}\right)^x}{2\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x-1\right)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<\left(\frac{5}{3}\right)^x\leq\frac{25}{9}\Leftrightarrow 0<x\leq 2.$$

5. Ответ: $\frac{R}{r}(R^2-r^2)\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.



Поскольку в четырехугольник *ABCD* можно вписать окружность, суммы длин его противоположных сторон равны. Тогда $S=pR=(DC+AD)R$, и осталось вычислить стороны четырехугольника. Заметим, что для треугольника *MBC* окружность, вписанная в четырехугольник *ABCD,* является вневписанной. Тогда с одной стороны $p_{MBC}=MH=R\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, с другой стороны

$BC=p_{MBC}-\frac{S_{MBC}}{R}=\frac{p_{MBC}}{R}(R-r)=(R-r)\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Найдем теперь сторону *AD*. Обозначив $\widehat{MDA}=\beta$, найдем $\widehat{DAM}=\pi-(\alpha+\beta)$. Поскольку около четырехугольника *ABCD* можно описать окружность, сумма его противоположных углов равна 180^0, а тогда и $\widehat{MCB}=\pi-(\alpha+\beta)$, что означает подобие треугольников *MDA* и

MBC. Поскольку коэффициент подобия равен, например, отношению радиусов вписанных в треугольники окружностей, имеем $AD = BC\dfrac{R}{r} = \dfrac{R}{r}(R-r)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Отсюда и следует ответ.

Вариант 2

1. Ответ: $\left\{(-6;\ 3;\ 12);\ (12;\ 3;\ -6);\ \left(3;\ -\dfrac{3}{2};\ -6\right);\ \left(-6;\ -\dfrac{3}{2};\ 3\right)\right\}$.

2. Ответ: $\left\{\left(\dfrac{3}{4}\pm 1\right)\pi + 6\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Ответ: $\left\{\dfrac{1-3\sqrt{2}}{2};\ 3\right\}$.

4. Ответ: $(-\infty;\ -1]\cup(2;\ +\infty)$.

5. Ответ: $\dfrac{2a^2}{a-b}$.

2000 год

1. Ответ: $\left[0;\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(2;\ +\infty)$.

Решение 1

Прологарифмируем уравнение при условии $\dfrac{a-2}{a^2-1} > 0$.

$$2^{2x-x^2} = \frac{a-2}{a^2-1} \Leftrightarrow 2x - x^2 = \log_2\frac{a-2}{a^2-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x + \log_2\frac{a-2}{a^2-1} = 0.$$

Для того, чтобы полученное квадратное уравнение имело решения, его дискриминант должен быть неотрицательным. Откуда $\dfrac{a-2}{a^2-1} \le 1$. Осталось решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{a-2}{a^2-1} > 0\\[2mm] \dfrac{a-2}{a^2-1} \le 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le a < \dfrac{1}{2}\\[2mm] a > 2.\end{array}\right.$$

Решение 2

Заметим, что множество значений разности $2x - x^2$ есть $(-\infty;\ 1]$.

Тогда множество значений функции 2^{2x-x^2} есть $(0;\ 2]$. Откуда и имеем систему на правую часть уравнения.

2. Ответ: $(2; 11]$.

Если знаменатель дроби неположителен

$$\sqrt{2x+3} \le \sqrt{x+5} \Leftrightarrow 0 \le 2x+3 \le x+5 \Leftrightarrow -1{,}5 \le x \le 2,$$

то неравенство решений не имеет. Если $x > 2$, то исходное неравенство можно умножить на знаменатель не меняя знака неравенства. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+5}} \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \sqrt{2x+3}-\sqrt{x+5} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \sqrt{2x+3} \le 1+\sqrt{x+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2\sqrt{x+5} \ge x-3. \end{cases}$$

Если $x \in (2; 3)$, то второе неравенство верно. Если $x \ge 3$, то обе части второго неравенства можно возвести в квадрат, откуда получим $x^2 - 10x - 11 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 11$. С учетом того, что $x \ge 3$, получаем $3 \le x \le 11$. Объединяя случаи, имеем $2 < x \le 11$.

3. Ответ: $\{3; 3\sqrt{3}\}$.

Преобразуем уравнение

$$\log_2 \log_{\frac{x}{9}} \frac{x}{27} = \log_2(2\log_3 x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_{\frac{x}{9}} \dfrac{x}{27} = 2\log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \dfrac{\log_3 x - 3}{\log_3 x - 2} = 2\log_3 x. \end{cases}$$

Пусть $\log_3 x = t$, в нашей задаче $t > 0$.

Решим уравнение

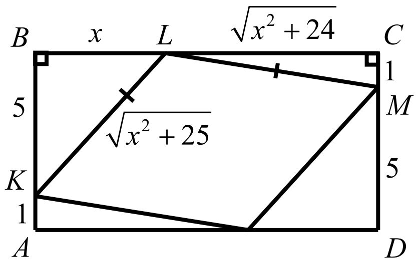
$$\frac{t-3}{t-2} = 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \ne 2 \\ t-3 = 2t(t-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ne 2 \\ 2t^2 - 5t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ne 2 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = 1 \\ \log_3 x = \dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

4. Ответ: 96.

Решение 1:

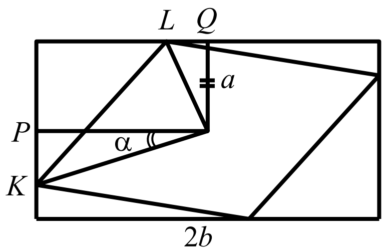


Поскольку площадь прямоугольника больше 51, сторона, длиной 6 — меньшая. Введем обозначения, как на рисунке. Пусть $BL = x$, тогда из прямоугольного треугольника KBL сторона ромба $KL = \sqrt{25+x^2}$. Из прямоугольного треугольника LCM найдем $LC = \sqrt{KL^2 - 1^2} = \sqrt{24+x^2}$. Площадь прямоугольника есть $AB \cdot BC = 6(x + \sqrt{x^2+24})$, что равно сумме площади ромба и четырех примыкающих к нему треугольников. имеем уравнение

$$6(x+\sqrt{x^2+24}) = 51 + 5x + \sqrt{x^2+24} \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+24} = 51 - x \Leftrightarrow x = \frac{29}{4}.$$

Тогда $\sqrt{x^2+24} = \dfrac{35}{4}$, а искомая площадь прямоугольника равна 96.

Решение 2:



Поскольку центр ромба совпадает со серединами его диагоналей и, следовательно, лежит на пересечении средних линий прямоугольника, то он совпадает с центром прямоугольника. Обозначим через α острый угол, который составляют диагонали ромба по отношению к средним линиям прямоугольника, и через a и b длины половинок сторон прямоугольника. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{b}$ и диагонали ромба равны $\dfrac{a}{\cos\alpha}$ и

$\dfrac{b}{\cos\alpha}$. Учитывая, что площадь ромба S равна произведению диагоналей, а $a=3$, получаем

$$S=\frac{2ab}{\cos^2\alpha}=6b\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}=6b(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=6b\left(1+\frac{4}{b^2}\right)=6b+\frac{24}{b}.$$

Подставляя значение площади ромба, получаем уравнение

$$51=6b+\frac{24}{b}\Leftrightarrow\begin{cases}b\neq 0\\6b^2-51b+24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\neq 0\\\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{1}{2}\\b=8\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{1}{2}\\b=8.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $b>a$, получаем, что $b=8$ и, следовательно, $S=2a\cdot 2b=2\cdot 3\cdot 2\cdot 8=96$.

5. Ответ: $\left\{-\arccos\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}+2\pi k;\ \arccos\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\cos 2x=2\cos x\Leftrightarrow 1+2(2\cos^2 x-1)=4\cos x\Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\\\cos x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\ -\ \text{решений нет}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\arccos\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}+2\pi k\\x=\arccos\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Вариант 2

1. Ответ: $[-1;\,0)\cup(2;\,6]$.
2. Ответ: $(3;\,15]$.
3. Ответ: $\{2;\,2\sqrt[3]{2}\}$.
4. Ответ: 24.
5. Ответ: $\left\{-\arccos\dfrac{-2+\sqrt{7}}{2}+2\pi k;\ \arccos\dfrac{-2+\sqrt{7}}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2001 год

1. Ответ: 5 или 6.

Решение 1:

Пусть всего косцов было $x+y$ человек, осталось на первом лугу x, ушло на второй луг — y человек. По смыслу задачи $x>0$, $y<24$, по условию задачи $x<y$. За один час один косец скашивает $\frac{1}{24}$ площади малого луга или $\frac{1}{48}$ площади большого луга. Тогда x косцов за час скашивают $\frac{x}{24}$ площади малого или $\frac{x}{48}$ площади большого луга. За 2 часа всеми косцами было скошено $\frac{2(x+y)}{48}=\frac{x+y}{24}$ площади большего луга. Второй луг y косцов скосили за время $\frac{24}{y}$. В течение этого же времени косили и первый луг, скосив $\frac{x}{48}\cdot\frac{24}{y}=\frac{x}{2y}$ его площади. В итоге, первый луг был скошен полностью: $\frac{x+y}{24}+\frac{x}{2y}=1 \Leftrightarrow 24y-xy-y^2=12x$. Будем решать уравнение $24y-xy-y^2=12x$.

$$24y-xy-y^2=12x \Leftrightarrow 24y-y^2=x(12+y) \Leftrightarrow x=\frac{24y-y^2}{12+y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{y^2-24y}{y+12} \Leftrightarrow x=-(y-36)-\frac{432}{y+12}.$$

Так как x — натуральное число, то последняя дробь — целое число.

$$432=1\cdot 432=2\cdot 216=3\cdot 144=4\cdot 108=6\cdot 72=$$
$$=8\cdot 54=9\cdot 48=12\cdot 36=16\cdot 27=18\cdot 24.$$

Натуральные решения уравнения суть пары $(4;5)$, $(6;6)$, $(6;12)$, $(5;15)$. Условию задачи удовлетворяют две последних пары.

Решение 2:

Обозначим через m количество косцов, оставшихся на первом лугу, а через n — количество косцов, перешедших на второй луг. Чтобы выкосить второй луг требуется 24 человеко-часа, а первый луг — 48 человеко-часов. Условие задачи приводит к уравнению $\dfrac{48-2(m+n)}{m}=\dfrac{24}{n}$ или $n^2+n(m-24)+12m=0$. Дискриминант этого уравнения равен $m^2-96m+576$. Так как он должен быть неотрицательным, то либо $m\le 24(2-\sqrt{3})$, либо $m\ge 24(2+\sqrt{3})$. Очевидно, $m\le 24$, так как при $m>24$ из теоремы Виета вытекает, что уравнение не имеет положительных корней. Следовательно, $0<m<24(2-\sqrt{3})$, откуда $0<m<8$. Целые n получаются при $m=6$ (тогда $n=6$ или $n=12$) и при $m=5$ (тогда $n=4$ или $n=15$).

2. Ответ: $\left\{\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Преобразуем правую часть уравнения:

$$\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}x=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos 2x\sin x-\cos x\sin 2x}{\sin 2x\cdot\sin x}=$$
$$=\frac{\sin(x-2x)}{\sin 2x\sin x}=-\frac{\sin x}{\sin 2x\sin x}.$$

Тогда

$$\frac{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\sin 2x(4\sin x-2)}=-\frac{\sin x}{\sin 2x\cdot\sin x}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \sin 2x\ne 0\\ \sin x\ne\dfrac{1}{2}\\ 1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x=2-4\sin x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\\ \sin x\ne\dfrac{1}{2}\\ 4\sin x=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\\ \sin x\ne\dfrac{1}{2}\\ 2\sin 2x=\sqrt{3}\sin x+\cos x \text{ (*).}\end{cases}$$

Решим уравнение (*):

$$2\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x \Leftrightarrow 2\sin 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Проверим условия $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq \frac{1}{2}$. Серия $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ при всех целых k не удовлетворяет условию $\sin x \neq \frac{1}{2}$. Серия $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$ может быть представлена в виде трех серий:

$$x = \frac{5\pi}{18} + 2\pi k,\ x = \frac{17\pi}{18} + 2\pi k,\ x = \frac{29\pi}{18} + 2\pi k,$$

каждая из которых при всех целых k удовлетворяет всем условиям.

3. Ответ:

а) при $0 < a < \frac{1}{4}$ решения:

$$\left(0;\ \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 - 2a + \sqrt{1 - 4a}}{2};\ 1 - a\right) \cup (1;\ +\infty),$$

б) при $\frac{1}{4} < a < 1$ решения: $(0;\ 1 - a) \cup (1;\ +\infty)$, при $a \geq 1$ решения: $(1;\ +\infty)$.

Будем решать задачу для всех положительных значений параметра сразу.

$$\log_{x+a} 2 < \log_x 4 \Leftrightarrow \log_{x+a} 2 < \log_{\sqrt{x}} 2.$$

Случай 1. При $x + a > 1$, $\sqrt{x} > 1$: $x + a > \sqrt{x}$.

Случай 2. При $0 < x + a < 1$, $0 < \sqrt{x} < 1$: $x + a > \sqrt{x}$.

Случай 3. При $x+a>1$, $0<\sqrt{x}<1$: решений нет, так как правая часть положительна, а левая отрицательна.

Случай 4. При $0<x+a<1$, $\sqrt{x}>1$: не возможно, так как $a>0$ по условию.

Представим первый и второй случаи в виде

1). $x>1$, $a>\sqrt{x}-x$.

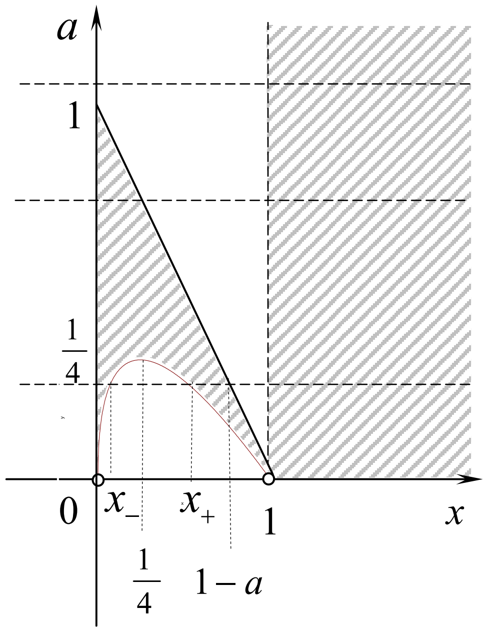
2). $0<x<1$, $\sqrt{x}-x<a<1-x$.

Решим уравнение

$$\sqrt{x}-x=a \Leftrightarrow \sqrt{x}=x+a \Leftrightarrow \begin{cases} x+a\ge 0 \\ x\ge 0 \\ x=(x+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -a \\ x\ge 0 \\ x^2+2ax+a^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+(2a-1)x+a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_-=\dfrac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2} \\ x_+=\dfrac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Будем решать задачу графически (см. рис.).



Видно, что:

при $a\ge 1$: $x>1$;

при $\frac{1}{4}\le a<1$: $0<x<1-a$ и $x>1$;

при $0<a<\frac{1}{4}$:

$0<x<\dfrac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2}$,

$\dfrac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2}<x<1-a$ и $x>1$.

Примечание: задачу можно решить аналитически. Именно,

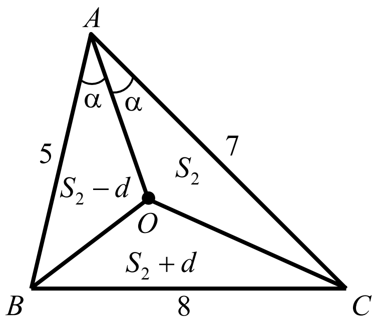
$$\log_{x+a} 2 < \log_x 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2(x+a)} < \frac{2}{\log_2 x} \Leftrightarrow \frac{\log_2 x - 2\log_2(x+a)}{\log_2 x \cdot \log_2(x+a)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x - \log_2(x^2+2ax+a^2)}{\log_2 x \cdot \log_2(x+a)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \dfrac{x-(x^2+2ax+a^2)}{(x+a-1)(x-1)} < 0. \end{cases}.$$

Полученное неравенство можно решить методом интервалов.

4. Ответ: $\frac{50\sqrt{3}}{21}$, $\frac{70\sqrt{3}}{21}$, $\frac{90\sqrt{3}}{21}$.

Пусть площади треугольников *AOB*, *AOC*, *COB* соответственно равны $S_2 - d$, S_2 и $S_2 + d$.



Найдем S_2:

$$S_{ABC} = (S_2 - d) + S_2 + (S_2 + d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_2 = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

Тогда по формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 10\sqrt{3}.$$

Таким образом, $S_2 = \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Поскольку

$$\frac{\frac{1}{2} AB \cdot AO \sin\alpha}{\frac{1}{2} AC \cdot AO \sin\alpha} = \frac{5}{7},$$

найдем *d*:

$$S_2 - d = \frac{5}{7} S_2 \Leftrightarrow d = \frac{2}{7} S_2 \Leftrightarrow d = \frac{20\sqrt{3}}{21}.$$

Тогда члены прогрессии суть числа:

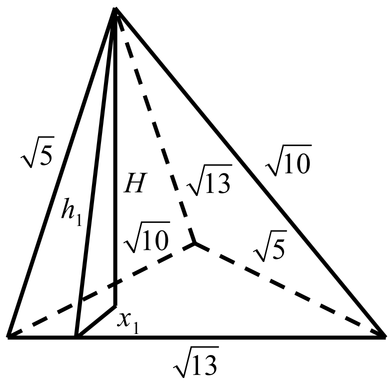
$$S_2 = \frac{10\sqrt{3}}{3},$$

$$S_2 - d = \frac{10\sqrt{3}}{3} - \frac{20\sqrt{3}}{21} = \frac{50\sqrt{3}}{21},$$

$$S_2 + d = \frac{10\sqrt{3}}{3} + \frac{20\sqrt{3}}{21} = \frac{90\sqrt{3}}{21}.$$

5. Ответ: $V = 2$.

Решение 1:



Вычислим площадь основания $S = \frac{7}{2}$.

Найдем высоты боковых граней:

$$\frac{7\sqrt{13}}{13}, \ \frac{7\sqrt{10}}{10}, \ \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

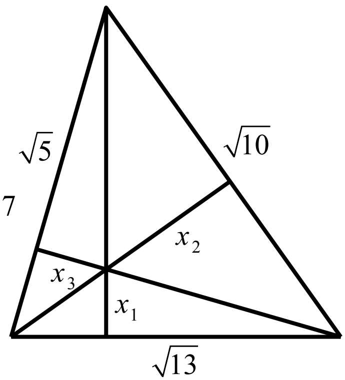
Так как верна формула $h_a = \frac{2S}{a}$, найдем их проекции на плоскость основания:

$$\sqrt{\frac{49}{13} - H^2}, \ \sqrt{\frac{49}{10} - H^2}, \ \sqrt{\frac{49}{5} - H^2}.$$

Выразим площадь основания:

$$\frac{1}{2}x_1\sqrt{13} + \frac{1}{2}x_2\sqrt{10} + \frac{1}{2}x_3\sqrt{5} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49 - 13H^2} + \sqrt{49 - 10H^2} + \sqrt{49 - 5H^2} = 7$$



Из этого уравнения можно было бы найти H, но оно не имеет решений. Поскольку $H^2 < \frac{49}{13}$, справедливо неравенство

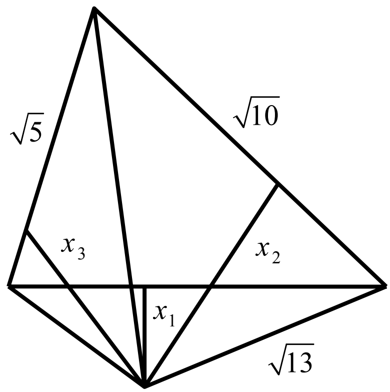
$$\sqrt{49 - 13H^2} + \sqrt{49 - 10H^2} + \sqrt{49 - 5H^2} >$$

$$> \sqrt{0} + \sqrt{49 - 10 \cdot \frac{49}{13}} + \sqrt{49 - 5 \cdot \frac{49}{13}} = 7\left(\sqrt{\frac{3}{13}} + \sqrt{\frac{8}{13}}\right) > 7.$$

Итак, нет такой высоты.

Но есть такая, основание которой лежит вне пирамиды. Вновь выразим площадь основания:

$$\frac{1}{2}x_2\sqrt{10}+\frac{1}{2}x_3\sqrt{5}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}x_1\sqrt{13}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{49-10H^2}+\sqrt{49-5H^2}=7+\sqrt{49-13H^2}\ .$$



Обозначая квадрат высоты новой переменной, получим уравнение

$$\sqrt{49-10t}+\sqrt{49-5t}=7+\sqrt{49-13t}$$

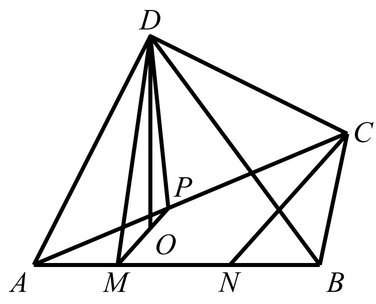
После первого возведения в квадрат получим

$$\sqrt{49^2-15\cdot 49t+50t^2}=t+7\sqrt{49-13t}$$

После второго возведения в квадрат и сокращения на t, получим $2\sqrt{49-13t}=7t-14$. И после третьего возведения в квадрат найдем $t=\frac{144}{9}$. Тогда $H=\frac{12}{7}$, и объем пирамиды есть $V=\frac{1}{3}S\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{12}{7}=2$.

Решение 2:

Пусть $ABCD$ — заданная пирамида и $AB=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{10}$, $AC=\sqrt{13}$. Из условия задачи следует, что длины скрещивающихся ребер пирамиды равны между собой. Для вычисления искомого объема достаточно найти площадь S основания треугольника ABC и высоту h пирамиды. Опустим перпендикуляры DM, PM, CN на сторону AB. По теореме о трех перпендикулярах, высота $h=DO$ пи-



рамиды является высотой в треугольнике *DMP*. Обозначим через φ угол при вершине *C* в треугольнике *ABC* (он же равен углу *DAC* и углу *DBC*). По теореме косинусов $5 = 10 + \frac{13}{16} - 2\sqrt{130}\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = \frac{9}{\sqrt{130}}$, следовательно, $\sin\varphi = \frac{7}{\sqrt{130}}$. Теперь можно найти площадь треугольника, лежащего в основании пирамиды: $S = \frac{ab}{2}\sin\varphi = \frac{7}{2}$. Далее, ищем стороны треугольника *DMP*. Имеем: $DM = CN = \frac{2S}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$, $NB = AM = \sqrt{10 - \frac{49}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, а это — пятая часть *AB*. Из подобия треугольников *AMP* и *ANC* вытекает, что $MP = \frac{1}{4}CN = \frac{7}{4\sqrt{5}}$, $AP = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{13}}{4}$. Таким образом $DM = 4MP$. Рассмотрим треугольник *ADP*. Вновь применив теорему косинусов, получим

$$DP^2 = 10 + \frac{13}{16} - 2\cdot\frac{\sqrt{130}}{4}\cdot\frac{9}{\sqrt{130}} = \frac{101}{16}.$$

С другой стороны, из треугольника *PMD*:

$$DP^2 = MP^2 + MD^2 - 2MP\cdot MD\cdot\cos\angle DMP \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow DP^2 = MP^2(17 - 8\cos\angle DMP) \Leftrightarrow \frac{101}{16} = \frac{49}{16\cdot 5}(17 - 8\cos\angle DMP) \Leftrightarrow$$

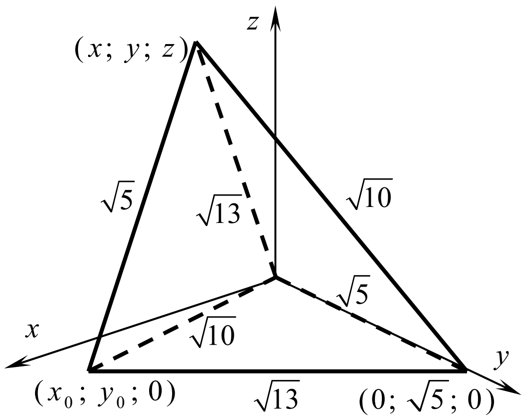
$$\Leftrightarrow \cos\angle DMP = \frac{41}{49} \Leftrightarrow \sin\angle DMP = \frac{12\sqrt{5}}{49}.$$

Теперь из треугольника *MOD* найдем

$$h = MD\sin\angle DMP = \frac{7}{\sqrt{5}}\cdot\frac{12\sqrt{5}}{49} = \frac{12}{7}.$$

Окончательно, $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{12}{7} = 2$.

Решение 3:
Вычислим площадь основания пирамиды (по формуле Герона, найдя предварительно высоту треугольника, способом, изложенным в решении 2 или еще как-либо). Осталось определить высоту пирамиды, применим для этого метод координат.



Пусть система координат введена, как показано на рисунке. Тогда координаты $(x; y; z)$ можно найти из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 13 \\ x^2 + (y - \sqrt{5})^2 + z^2 = 10 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = 5, \end{cases}$$

где $(x_0;\ y_0)$ находятся из системы

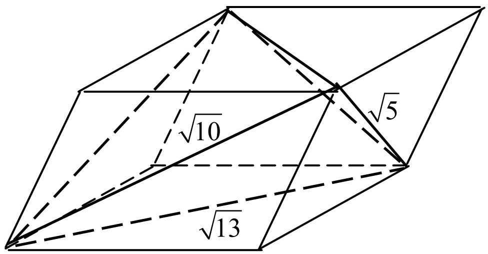
$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 10 \\ x_0^2 + (y_0 - \sqrt{5})^2 = 13\,. \end{cases}$$

Решая указанные системы методом подстановки, получим

$$x_0 = \frac{7}{\sqrt{5}}\,,\ y_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,,\ x = \frac{41}{7\sqrt{5}}\,,\ y = \frac{4}{\sqrt{5}}\,,\ z = \frac{12}{7}\,,$$

причем полученное значение z и является искомой длиной высоты. Отсюда $V = 2$.

Решение 4:



Через каждое ребро тетраэдра проведем плоскость, параллельную противоположному ребру Полученные три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед. Поскольку противоположные ребра тетраэдра равны, он прямоугольный: ребра исходного тетраэдра являются диагоналями граней полученного параллелепипеда, и диагонали противоположных граней равны — все грани прямоугольники. Тогда объем данного тетраэдра составляет треть объема параллелепипеда (от него отсекают 4 треугольные пирамиды, объем каждой из которых равен 1/6 объема параллелепипеда). Очевидно, что ребра параллелепипеда имеют длины 1, 2, 3. Тогда его объем 6, а искомый объем тетраэдра 2.

Вариант 2

1. Ответ: 8 или 16.

2. Ответ: $\left\{\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Ответ:

а) при $0<a<\dfrac{1}{8}$ решения:

$$\left(a;\ \frac{1-2a-\sqrt{1-8a}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-2a+\sqrt{1-8a}}{2};\ 1-a\right)\cup(1+a;\ +\infty).$$

б) при $\dfrac{1}{8}<a<\dfrac{1}{2}$ решения: $(a;\ 1-a)\cup(1+a;\ +\infty)$, при $a\geq\dfrac{1}{2}$ решения $(1+a;\ +\infty)$.

4. Ответ: $\dfrac{25\sqrt{3}}{9}$, $\dfrac{30\sqrt{3}}{9}$, $\dfrac{35\sqrt{3}}{9}$.

5. Ответ: $V=8$.

2002 год

1. Ответ: правое число больше.

Решение 1:

Заметим, что $\log_{15} 127 < \log_{15} 128$. Справедливы переходы:

$$\log_{15} 128 < \log_5 8 + \log_3 2 \Leftrightarrow \frac{7}{\log_2 3 + \log_2 5} < \frac{3}{\log_2 5} + \frac{1}{\log_2 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{3\log_2^2 3 - 3\log_2 3\log_2 5 + \log_2^2 5}{\log_2 5\log_2 3(\log_2 5 + \log_2 3)}$$

Последнее неравенство верно, ибо дробь вида $\dfrac{3a^2 - 3ab + b^2}{ab(a+b)}$ при любых положительных a и b принимает только положительные значения.

Решение 2:

Рассмотрим частное

$$\frac{\log_{15} 127}{\log_3 2 + \log_5 8} < \frac{\dfrac{\log_2 128}{\log_2 15}}{\dfrac{1}{\log_2 3} + \dfrac{\log_2 8}{\log_2 5}} = \frac{7}{\log_3 15 + 3\log_5 15} =$$

$$= \frac{7}{\log_3 15 + \log_5 3375} < \frac{7}{\log_3 9 + \log_5 3125} = \frac{7}{2+5} = 1.$$

Это означает, что знаменатель больше числителя, что и дает ответ.

2. Ответ: $\left\{1; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

$$|x^3 - 4x^2 + 5x - 2| = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = x - 1 \\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = -(x-1) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} (x-1)(x^2-3x+1)=0 \\ (x-1)(x^2-3x+3)=0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. .$$

3. Ответ: $\left\{ \dfrac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Решение 1:

Приведем уравнение к однородному уравнению третьей степени:

$$\cos x = 3\sin^3 x - \cos^3 x \Leftrightarrow \cos x(\cos^2 x + \sin^2 x) = 3\sin^3 x - \cos^3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow 3\,\mathrm{tg}^3\, x - \mathrm{tg}^2\, x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = 1 \\ 3\,\mathrm{tg}^2\, x + 2\,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Решение 2:

Убедимся, что числа, обращающие в нуль косинус, не являются решениями уравнения. Тогда деление на $\cos^3 x$ не приведет к потере корней. Имеем:

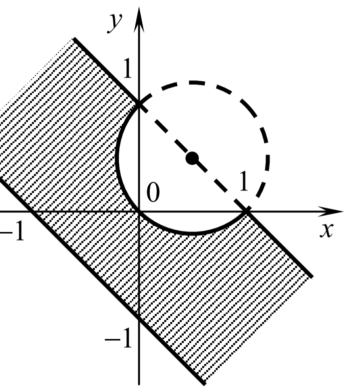
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 3\,\mathrm{tg}^3\, x - 1 \Leftrightarrow 1 + \mathrm{tg}^2\, x = 3\,\mathrm{tg}^3\, x - 1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

.

4. Ответ: см. рис.

$$\begin{cases} |x+y| \le 1 \\ x^2 + y^2 \ge x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \ge -1 \\ x + y \le 1 \\ x^2 - x + y^2 - y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -x-1 \\ y \le -x+1 \\ (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 \ge 0,5. \end{cases}$$

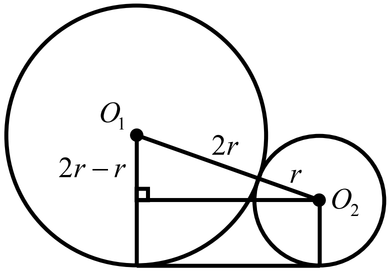


Первые два неравенства задают на координатной плоскости точки, лежащие между двумя параллельными прямыми. Второе неравенство задает внешность окружности с центром в точке $(0,5;\ 0,5)$ и радиусом $\sqrt{2}/2$, проходящей через начало координат.

5. Ответ: радиусы шаров равны $\dfrac{a}{3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+2}$ и $\dfrac{2a}{3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+2}$.

Пусть радиус меньшего шара равен r, тогда радиус большего равен $2r$. Вычислим расстояние между центрами шаров (рис.). Оно равно

$$\sqrt{(2r+r)^2-(2r-r)^2}=2\sqrt{2}r.$$



Каждый из шаров касается боковой грани и основания, угол между которыми равен α. Центр шара, вписанного в двугранный угол, лежит на его биссекторе, поэтому расстояния от точки касания шара с нижним основанием до стороны основания той грани, которой этот шар касается, равны соответственно

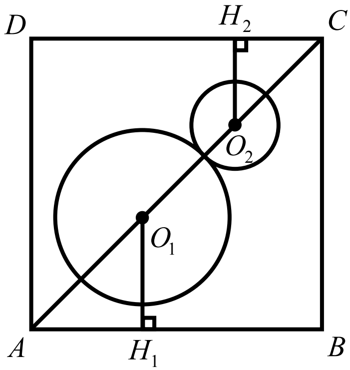
$$O_2H_2=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \text{ и } O_1H_1=2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

(обозначения см. на рис.). Тогда

$$AO_1=2r\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

и

$$CO_2=r\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$



Имеем уравнение:

$$AC=AO_1+O_1O_2+O_2C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{2}=2r\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{2}r+r\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow r=\frac{a}{3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+2}.$$

Отсюда и получаем ответ.

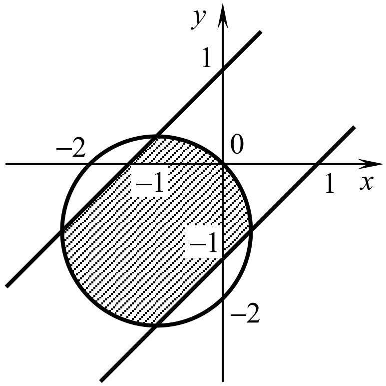
Вариант 2

1. Правое число больше.

2. Ответ: $\left\{-1;\ \frac{5-\sqrt{5}}{2};\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: см. рис.



5. Ответ: радиусы шаров равны

$$\frac{2b}{5\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2h}{b}\right)+2\sqrt{3}}$$

и

$$\frac{3b}{5\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2h}{b}\right)+2\sqrt{3}}.$$

ЛР № 040815 от 22.05.97

Подписано к печати 19.05.2003. Формат бумаги 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 4,25 усл. п. л. Тираж 200 экз. Заказ 2929.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26.