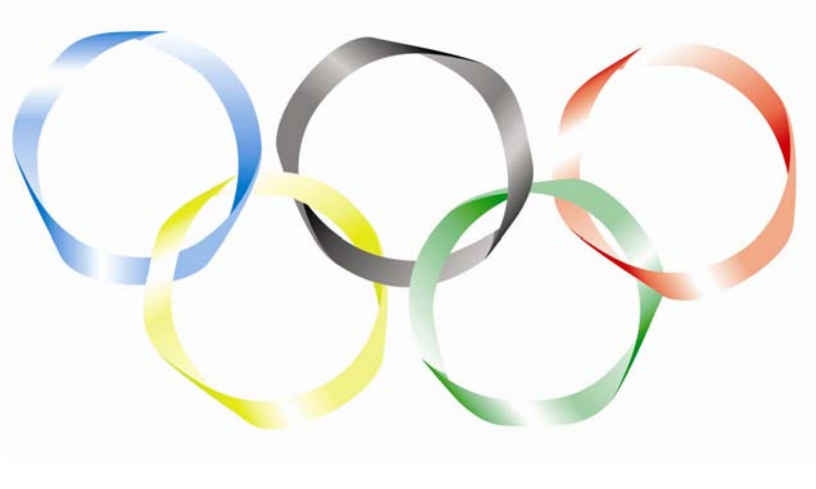
Д. Д. Гущин

Материалы математических олимпиад физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета



Гущин Д. Д.

Материалы математических олимпиад физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

4 издание

Париж
«Стетоскоп»
2007

Учебное издание

Гущин Дмитрий Дмитриевич

Г98 Материалы математических олимпиад физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. — Париж: Стетоскоп, 2007. — 53 с.
ISSN 1295-4918

Пособие содержит условия задач математических олимпиад, проводившихся физическим факультетом Санкт-Петербургского государственного университета в 2004 — 2007 годах. К задачам первого варианта приведены решения.

ISSN 1295-4918

ПРЕДИСЛОВИЕ

Региональные олимпиады абитуриентов физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета проводятся с целью обеспечения приема на физический факультет наиболее подготовленных в области физики, математики и компьютерных технологий выпускников общеобразовательных учебных заведений Санкт-Петербурга, Ленинградской области, городов Северо-Западного региона России, а также других городов и регионов, поддерживающих деловые контакты с физическим факультетом СПбГУ в области подготовки высококвалифицированных специалистов.

Олимпиады призваны способствовать реализации идей непрерывного образования, удаленного обучения, информационной поддержки высококвалифицированного преподавания математики и естествознания в средней школе, формированию соответствующего современному уровню развития науки естественно-научного мировоззрения.

Математические олимпиады физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета — одно из мероприятий, традиционно проводимых физическим факультетом для учащихся 10 — 11 классов.

В предлагаемое издание включены условия задач зимних и весенних математических олимпиад для учащихся одиннадцатых классов, проведенных в 2004 — 2007 учебных годах. К задачам первых вариантов олимпиад приведены краткие решения, все задачи снабжены ответами. (В электронном виде задания вступительных экзаменов по математике и математических олимпиад можно найти на Сайте элементарной математики Дмитрия Гущина: www.mathnet.spb.ru.)

Традиционно в математическую олимпиаду включаются 10 заданий различного уровня сложности по всем темам школьного курса математики: алгебры, геометрии и математического анализа, на решение которых отводится 4 часа. Максимальный балл, который можно набрать при верном и полном решении всех заданий олимпиады, составляет 100 баллов, при этом каждая задача оценивается максимум в 10 баллов. Хорошим является результат, превышающий 80 баллов.

Приятно воспользоваться возможностью высказать благодарность учащимся физико-математического лицея № 239 Илье Виленскому, Александру Золину и Андрею Ильину за помощь в подготовке второго издания и заслуженному учителю России Владимиру Борисовичу Некрасову за помощь в подготовке третьего издания.

Д. Д. Гущин,
лауреат премии Дж. Сороса, победитель Всероссийского конкурса учителей физики и математики фонда «Династия», абсолютный победитель конкурса «Учитель года России 2007».

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2004

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $2^{\sqrt{5}}$ и $3^{\sqrt{3}}$.
2. Решите неравенство $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} \geq 1 - x$.
3. Решите неравенство $\log_4^2 \left(\frac{x}{2}\right)^4 \leq \log_2^3 \left(-\frac{2}{x}\right)$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = x^4 - 1; \\ (x+y)(x^4+y^4) = x^4 + 1. \end{cases}$
5. Решите уравнение $\sin x - 2\cos x = 3\cos^2 x - 2\sin 2x - 5$.
6. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $y = \dfrac{|y+x| + |y-x|}{2}$.
7. Определите количество решений уравнения $\sin^{2004} x + 2004 = \mathrm{ctg}^{2005}\, x$ на отрезке $[0;\ 2005\pi]$.
8. Найдите те первообразные функции $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$, графики которых имеют с графиком функции $f(x)$ ровно две общие точки.
9. Решите уравнение $(x-y)^2 + (e^x - y)^2 = \dfrac{1}{2}$.
10. В основании треугольной пирамиды *SABC* лежит равносторонний треугольник *ABC* со стороной *a*. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью *ABC* угол α. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2004

11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $2^{\sqrt{10}}$ и $3^{\sqrt{3}}$.
2. Решите неравенство $\sqrt{1+x-x^2-x^3} \geq -x-1$.
3. Решите неравенство $\log_9^2\left(\frac{3}{x}\right)^4 \leq \log_3^3\left(-\frac{x}{3}\right)$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=1-y^4; \\ (x-y)(x^4+y^4)=1+y^4.\end{cases}$
5. Решите уравнение $3\sin x+\cos x+5=8\sin^2 x+3\sin 2x$.
6. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $x=\dfrac{|y+x|+|y-x|}{2}$.
7. Определите количество решений уравнения $\cos^{2004} x+2005=\mathrm{tg}^{2005}\, x$ на отрезке $[-2004\pi;\ 0]$.
8. Найдите те первообразные функции $f(x)=12+12x-3x^2$, графики которых имеют с графиком функции $f(x)$ ровно две общие точки.
9. Решите уравнение $(y-x)^2+(y-\ln x)^2=\dfrac{1}{2}$.
10. В основании треугольной пирамиды *SABC* лежит равносторонний треугольник *ABC* со стороной *a*. Высоты всех боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны *h*. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2005

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $\sin 10^\circ \cos 20^\circ$ и $\sin 40^\circ$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{-3x}$.
3. Решите неравенство $\sqrt{x^6+2x^3+1}\le x+1$.
4. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $\log_2(\sin x \sin y)=\log_2|\sin x|+\log_2|\sin y|$.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x(xy+6)=y^3; \\ y(xy-24)=x^3. \end{cases}$
6. Определите, при каких значениях параметра *a* имеет единственное решение уравнение

$$27^x+(a-2)\cdot 9^x-a\cdot 3^x+2a-a^2=0.$$

7. Определите стоимость набора из 11 кг апельсинов, 18 кг яблок и 4 кг груш, если 3 кг апельсинов, 5 кг яблок и 2 кг груш стоят вместе 290 рублей, а 1 кг апельсинов, 2 кг яблок и 4 кг груш стоят 270 рублей.
8. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника провели высоту. В полученные тем самым треугольники вписали окружности радиусов 3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.
9. Куб с длиной ребра 2 повернули вокруг высоты, проходящей через центр его основания, на угол 45°. Докажите, что объем общей части исходного и полученного кубов не меньше чем 4.
10. Определите, при каком значении параметра *a* площадь фигуры, ограниченной линиями, $x=a$, $x=a+1$, $y=x-\sin^2 x$, $y=x^2+x+\cos^2 x$ наименьшая.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2005

11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $\sin 20^\circ \cos 40^\circ$ и $\sin 80^\circ$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{-5x}$.
3. Решите неравенство $\sqrt{x^6-2x^3+1}\le 1-x$.
4. Изобразите множество точек плоскости Oxy, для которых верно равенство $\log_2(\cos x\cos y)=\log_2|\cos x|+\log_2|\cos y|$.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y(xy+24)=x^3; \\ x(xy-6)=y^3. \end{cases}$
6. Определите, при каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение
$$8^x+(2-a)\cdot 4^x-a\cdot 2^x+a^2-2a=0.$$
7. Определите стоимость набора из 3 кг печенья, 4 кг конфет и 5 кг пряников, если 2 кг печенья, 3 кг конфет и 4 кг пряников стоят вместе 220 рублей, а 1 кг печенья, 2 кг конфет и 3 кг пряников стоят 145 рублей.
8. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника провели высоту. Периметры полученных тем самым треугольников равны 3 и 4. Найдите периметр исходного треугольника.
9. Куб с длиной ребра 4 повернули вокруг высоты, проходящей через центр его основания, на угол 45°. Докажите, что объем общей части исходного и полученного кубов не меньше чем 32.
10. Определите, при каком значении параметра a площадь фигуры, ограниченной линиями $x=a-1$, $x=a$, $y=x+\sin^2 x$, $y=x-\cos^2 x-x^2$, наименьшая.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2005

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Сравните числа

$$(\sqrt{2006}-\sqrt{2005}+\sqrt{2004})^{-1} \text{ и } (\sqrt{2008}+\sqrt{2007}-\sqrt{2006})^{-1}.$$

2. Решите уравнение $x^2+x+2x\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}+1=0$.
3. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x}+x^{2\log_2 x}\geq 6$.
4. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $|x|+|y-x|=|y|$.
5. Найдите количество целочисленных решений уравнения $|x|+|1-y|+|y-x|=1$.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=15; \\ x^2+y^2+z^2=75. \end{cases}$
7. Воспользовавшись равенством $\sin 108°=\sin 72°$, найдите $\sin 36°$.
8. В треугольник со сторонами 3, 3 и 2 вписали окружность. Точки касания окружности со сторонами треугольника соединили и в полученный треугольник снова вписали окружность. Найдите ее радиус.
9. Обозначим в правильной треугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания α, угол наклона боковой грани к плоскости основания — β, плоский угол при вершине — γ. Известно, что $\gamma=2\alpha$. Найдите углы α, β, γ.
10. Найдите значение параметра *a*, при котором верно равенство

$$\int_a^{66}\Big|\big||x|-1\big|-1\Big|\,dx=2100.$$

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2005

11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

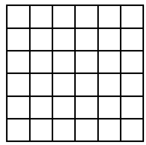
1. Сравните числа
$$(\sqrt{2005}-\sqrt{2004}+\sqrt{2003})^{-1} \text{ и } (\sqrt{2007}+\sqrt{2006}-\sqrt{2005})^{-1}.$$
2. Решите уравнение $x^2-x+2x\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}+1=0$.
3. Решите неравенство $5^{2\log_5^2 x}-4x^{\log_5 x}\ge 5$.
4. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $|y|+|x-y|=|x|$.
5. Найдите количество целочисленных решений уравнения $|y|+|1-x|+|x-y|=1$.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=18; \\ x^2+y^2+z^2=108. \end{cases}$
7. Воспользовавшись равенством $\sin 108^\circ=-\cos 162^\circ$, найдите $\cos 54^\circ$.
8. В треугольник со сторонами 5, 5 и 4 вписали окружность. Точки касания окружности со сторонами треугольника соединили и в полученный треугольник снова вписали окружность. Найдите ее радиус.
9. Обозначим в правильной четырехугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания α, угол наклона боковой грани к плоскости основания — β, плоский угол при вершине — γ. Известно, что $\gamma=2\alpha$. Найдите углы α, β, γ.
10. Найдите значение параметра *a*, при котором верно равенство
$$\int_{-66}^{a}\Big|\big||x|-1\big|-1\Big|\,dx=2100.$$

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2006

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $\log_3 \sin 2$ и $\log_2 \sin 3$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - |2x-1|} = 2x - |x+1|$.
3. Решите неравенство $\arcsin^2 x > \arccos^2 x$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ 8x^3 - 2x^2 - 6x = 2y^2 + \sqrt{3} - 2. \end{cases}$
5. Фрагмент решетки представляет собой квадрат, изображенный на рисунке. Сколько всего квадратов со сторонами параллельными сторонам фрагмента образовано его узлами?



6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_2(x^4 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2) + 1$ имеет единственное решение.
7. Докажите равенство:

$$\int_{-2005}^{2006} \big|\big||x-1|-2\big|-1\big|\,dx = \int_{-2005}^{2006} \big|\big|\big||x-1|-1\big|-1\big|-1\big|\,dx.$$

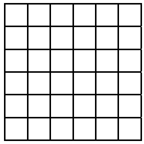
8. Решите уравнение $10^{x-1} = x^9$.
9. В прямоугольном треугольнике с катетами 2 и 4 расстояния от вершин острых углов до некоторой точки, лежащей внутри треугольника, равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$. Найдите расстояние от нее до вершины прямого угла этого треугольника.
10. В правильной призме $ABCDA'B'C'D'$ длины сторон основания $ABCD$ равны 1, а длины боковых ребер равны 2. Через ребро AB проведена плоскость, делящая двугранный угол при основании пополам и пересекающая боковые ребра CC' и DD' в точках P и Q соответственно. Найдите объем пирамиды $B'ABPQ$.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2006

11 КЛАСС   2 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $\log_5 \cos 5$ и $\log_6 \cos 6$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - |2x+1|} = -2x - |1-x|$.
3. Решите неравенство $\operatorname{arctg}^2 x \le \operatorname{arcctg}^2 x$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ 8x^3 - 2x^2 - 6x = 2y^2 - \sqrt{3} - 2. \end{cases}$
5. Фрагмент решетки представляет собой квадрат, изображенный на рисунке. Сколько всего квадратов, со сторонами параллельными диагоналям фрагмента, образовано его узлами?



6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_3(ax^2+3) = \log_3(a^2 - x^4) + 1$ имеет единственное решение.
7. Докажите равенство:
$$\int_{-2006}^{2005} \Big|\big||x+1|-2\big|-1\Big|\, dx = \int_{-2006}^{2005} \Big|\Big|\big||x+1|-1\big|-1\Big|-1\Big|\, dx.$$
8. Решите уравнение $8^{x-1} = x^7$.
9. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 6 расстояния от вершин острых углов до некоторой точки, лежащей внутри треугольника, равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{26}$. Найдите расстояние от нее до вершины прямого угла этого треугольника.
10. В правильной призме *ABCDA'B'C'D'* длины сторон основания *ABCD* равны 1, а длины боковых ребер равны 2. Через ребро *AB* проведена плоскость, делящая двугранный угол при основании пополам и пересекающая боковые ребра *CC'* и *DD'* в точках *P* и *Q* соответственно. Найдите объем пирамиды *D'ABPQ*.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2007

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{8}+\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{24}$ и $\sqrt{3}$.
2. Решите неравенство $|x|+\sqrt{|x+2|-1}\geq x$.
3. Пусть в стране *Л* подоходный налог на зарплату начисляется следующим образом: с суммы не превышающей 1000 денежных единиц взимается 15% налога, с дохода от 1000 до 2000 тысяч денежных единиц с первой тысячи взимается 15%, а с оставшейся суммы взимается 25%, если же доход превышает 2000 единиц, то с первой тысячи взимается 15%, со второй — 25%, с оставшейся суммы взимается 50% налога. Каков (в процентах) итоговый налог выплачивает гражданин этой страны, получающий после выплаты налогов зарплату в 2600 денежных единиц?
4. Решите уравнение $3^{3x}-\dfrac{27}{3^{3x}}-9\left(3^{x}-\dfrac{3}{3^{x}}\right)=8$.
5. Решите уравнение $3^{m}+3^{2m}+3^{3m}+\ldots+3^{k\cdot m}=2007$ в целых числах.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=\sin^{2}y-2,\\ \cos y+\dfrac{1}{\cos y}=\cos^{2}x+2.\end{cases}$
7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $|x|=a\log_{2}|x|$ имеет ровно два решения.
8. Найдите, в каких пределах изменяется высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, если длина одного из его катетов равна *a*, а длина другого не меньше $2a$.
9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $x=\sqrt{y}$, $x=(y+1)^{3}$, $x=0$, $x=1$.
10. Центры одинаковых шаров радиуса 1 лежат в вершинах прямой призмы боковое ребро которой равно 4, а основание — треугольник со сторонами 3, 4, 5. Найдите сумму объёмов частей этих шаров, лежащих внутри призмы.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2007

11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}+\mathrm{tg}\frac{5\pi}{24}$ и 2.
2. Решите неравенство $|x|\sqrt{|x+2|-1}\le x$.
3. Пусть в стране *П* подоходный налог на зарплату начисляется следующим образом: с суммы не превышающей 1000 денежных единиц взимается 50% налога, с дохода от 1000 до 2000 тысяч денежных единиц с первой тысячи взимается 50%, а с оставшейся суммы взимается 25%, если же доход превышает 2000 единиц, то с первой тысячи взимается 50%, со второй — 25%, с оставшейся суммы взимается 15% налога. Каков (в процентах) итоговый налог выплачивает гражданин этой страны, получающий после выплаты налогов зарплату в 3800 денежных единиц?
4. Решите уравнение $2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)=1$.
5. Решите уравнение $2^n+2^{2n}+2^{3n}+\ldots+2^{k\cdot n}=2006$ в целых числах.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=2+\sin^2 y,\\ \cos y+\dfrac{1}{\cos y}=2-\cos^2 x.\end{cases}$
7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a|x|=\log_{0,5}|x|$ имеет ровно два решения.
8. Найдите, в каких пределах изменяется высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, если длина одного из его катетов равна a, а длина другого не больше $2a$.
9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $x=y^3$, $x=\sqrt{y-1}$, $x=0$, $x=1$.
10. Центры одинаковых шаров радиуса 1 лежат в вершинах прямой призмы боковое ребро которой равно 6, а основание — треугольник со сторонами 3, 3, 5. Найдите сумму объёмов частей этих шаров, лежащих внутри призмы.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2007

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Сравните числа $3^{\sqrt{\log_3 2}}$ и $2^{\sqrt{\log_2 3}}$.
2. Решите уравнение $\cos x \cos 3x - 1 = 0$.
3. Решите систему $\begin{cases} x = \sqrt{4y-3}, \\ y = \sqrt{4x-3}. \end{cases}$
4. Решите неравенство $2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \ldots \leq 2$.
5. Решите уравнение $\sqrt{x+1}(3x^2 + x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x$.
6. Решите уравнение $\sqrt{\sin(\pi \log_2 x)} = \ln(\sin(\pi\,|\,x + 0,5\,|))$.
7. Изобразите множество точек плоскости *x0y*, координаты которых удовлетворяют неравенству $\log_2 |\,y - x\,| \geq \log_2 x$.
8. Определите площадь фигуры, ограниченной тремя линиями: $y = 1 - x^2$, $y = \sqrt{x} + 1$, $x = 1$.
9. В прямоугольном треугольнике *ABC* на катетах *AB* и *AC* отмечены точки *P* и *Q* соответственно, такие что $AP = 1$, $PB = 2$, $AQ = 1$, $QC = 3$. Точка *M* делит гипотенузу в отношении 2:3, считая от вершины *B*. Определите, в каком отношении точка *O* пересечения отрезков *PC* и *MQ* делит эти отрезки.
10. В основании пирамиды высотой 4 лежит квадрат со стороной 2. Одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Найдите расстояние от него до скрещивающихся с ним медиан боковой грани.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2007

11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

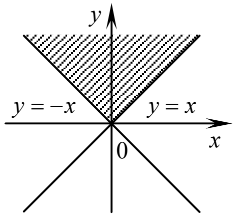
1. Сравните числа $5^{\sqrt{\log_5 3}}$ и $3^{\sqrt{\log_3 5}}$.
2. Решите уравнение $1+\sin x \sin 3x = 0$.
3. Решите систему $\begin{cases} x = \sqrt{3y-2}, \\ y = \sqrt{3x-2}. \end{cases}$
4. Решите неравенство $3^x + 3^{2x} + 3^{3x} + \ldots \le 4$.
5. Решите уравнение $\sqrt{1-x}(3x^2 - x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
6. Решите уравнение $\sqrt{\sin(\pi \log_3 x)} = \ln(\cos(\pi\,|\,x+1\,|))$.
7. Изобразите множество точек плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\log_{0,5} |\,y+x\,| \ge \log_{0,5} y$.
8. Определите площадь фигуры, ограниченной тремя линиями: $y=(x-1)^2$, $y=\sqrt{1-x}$, $y=1$.
9. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно, такие что $AP=1$, $PB=2$, $AQ=3$, $QC=1$. Точка M делит гипотенузу в отношении 2:3, считая от вершины B. Определите, в каком отношении точка O пересечения отрезков BQ и PM делит эти отрезки.
10. В основании пирамиды высотой 2 лежит квадрат со стороной 4. Одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Найдите расстояние от него до скрещивающихся с ним медиан боковой грани.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2004

11 класс, ответы к варианту 1

1. Левое число меньше.
2. $[0;+\infty)$.
3. $\{-2\}\cup[-0,125;\ 0)$.
4. $\{(0;\ 1);\ (2;\ -1)\}$.
5. $\left\{\operatorname{arctg} 2+(-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{2}{\sqrt5}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
6. См. рис.
7. 2005.
8. $F(x)=x^3+6x^2+12x+12$ или $F(x)=x^3+6x^2+12x+8$.
9. $\{(0;\ 0,5)\}$.
10. $\dfrac{a\sqrt3}{6}\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ или $\dfrac{a\sqrt3}{2}\dfrac{\sin\alpha}{3+\cos\alpha}$.

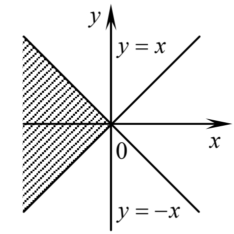


11 класс, ответы к варианту 2

1. Левое число больше.
2. $\{-\infty;\ 1]$.
3. $(-\infty;\ -243]\cup\{-3\}$.
4. $\{(1;\ 0);\ (-1;\ -2)\}$.
5. $\left\{(-1)^k\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}-\operatorname{arctg}\dfrac13+\pi k,\right.$

$\left.(-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{10}}-\operatorname{arctg}\dfrac13+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

6. См. рис.
7. 2004.
8. $F(x)=-x^3+6x^2+12x+12$ и $F(x)=-x^3+6x^2+12x-96$.
9. $\{(1;\ 0,5)\}$.
10. $\dfrac{a\sqrt3}{6}\dfrac{\sqrt{12h^2-a^2}}{a+2\sqrt3h}$ или $\dfrac{a\sqrt3}{2}\dfrac{\sqrt{4h^2-3a^2}}{a\sqrt3+6h}$.

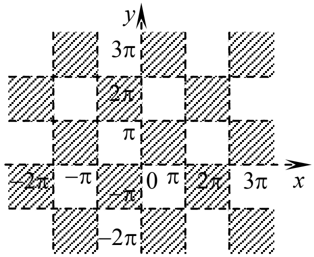


Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2005

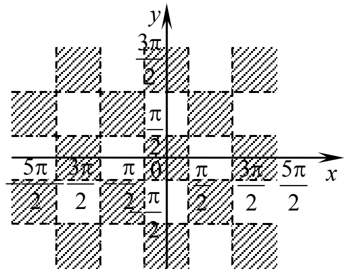
11 класс, ответы к варианту 1

1. Правое число больше.
2. $\{0\}$.
3. $[-1;\ 0]\cup\{1\}$.
4. См. рис.
5. $\{(0;\ 0);\ (4;\ -2);\ (-4;\ 2)\}$.
6. $a\in(-\infty;\ 0)\cup\{1\}\cup[2;\ +\infty)$.
7. 890 руб.
8. 5.
9. Объем больше.
10. $a=-\dfrac{1}{2}$.



11 класс, ответы к варианту 2

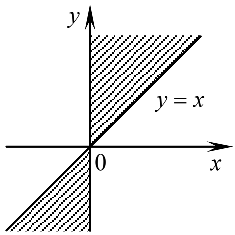
1. Правое число больше.
2. $\{0\}$.
3. $[0;\ 1]\cup\{-1\}$.
4. См. рис.
5. $\{(0;\ 0);\ (4;\ 2);\ (-4;\ -2)\}$.
6. $a\in(0;\ 2]\cup\{4\}$.
7. 295 руб.
8. 5.
9. Объем больше.
10. $a=\dfrac{1}{2}$.



Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

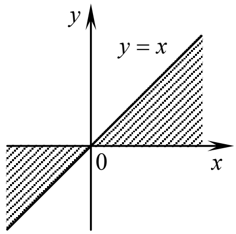
ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2005

11 класс, ответы к варианту 1



1. Левое число больше правого.
2. $\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
3. $(0;\ 0,5]\cup[2;\ +\infty)$
4. См. рис.
5. 3 пары решений.
6. $\{(5;\ 5;\ 5)\}$.
7. $\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
8. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}$.
9. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$, $\gamma = 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
10. $a = -12$.

11 класс, ответы к варианту 2



1. Левое число больше.
2. $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
3. $(-0;\ 0,2]\cup[5;\ +\infty)$.
4. См. рис.
5. 3 пары решений.
6. $\{(6;\ 6;\ 6)\}$.
7. $\cos 54^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
8. $\dfrac{6\sqrt{21}}{15+5\sqrt{30}}$.
9. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4}$, $\gamma = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
10. $a = 12$.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2006

11 класс, ответы к варианту 1

1. Левое число больше правого.
2. $[1;\ +\infty)$.
3. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$.
4. $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{18};\ -\sin\frac{\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{\pi}{18};\ \sin\frac{\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{13\pi}{18};\ -\sin\frac{13\pi}{18}\right);\right.$
$\left.\left(\cos\frac{13\pi}{18};\ \sin\frac{13\pi}{18}\right);\left(\cos\frac{25\pi}{18};\ -\sin\frac{25\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{25\pi}{18};\ \sin\frac{25\pi}{18}\right)\right\}$.
5. 91 квадрат.
6. $a=1$.
7. Подынтегральные выражения равны.
8. $\{1;\ 10\}$.
9. $\frac{\sqrt{170}}{5}$ или $\sqrt{2}$.
10. $\frac{2}{3}$.

11 класс, ответы к варианту 2

1. Правое число больше.
2. $(-\infty;\ -1]$.
3. $(-\infty;\ 1]$.
4. $\left\{\left(\cos\frac{5\pi}{18};\ -\sin\frac{5\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{5\pi}{18};\ \sin\frac{5\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{7\pi}{18};\ -\sin\frac{7\pi}{18}\right);\right.$
$\left.\left(\cos\frac{7\pi}{18};\ \sin\frac{7\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{17\pi}{18};\ -\sin\frac{17\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{17\pi}{18};\ \sin\frac{17\pi}{18}\right)\right\}$.
5. 35 квадратов.
6. $a=1$.
7. Подынтегральные выражения равны.
8. $\{1;\ 8\}$.
9. $\sqrt{2}$ или $\sqrt{29}$.
10. $\frac{1}{3}$.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2007

11 класс, ответы к варианту 1

1. Правое число больше.
2. $(-\infty;\ -3]\cup[-1;\ +\infty)$.
3. 35%.
4. $\{1\}$.
5. $m=0$, $k=2007$.
6. $\left\{\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ 2\pi l\right):\ k,l\in\mathbb{Z}\right\}$.
7. $a<0$, $a=e\ln 2$.
8. $\left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}a;\ a\right)$.
9. $\dfrac{7}{12}$.
10. $\dfrac{2}{3}\pi$.

11 класс, ответы к варианту 2

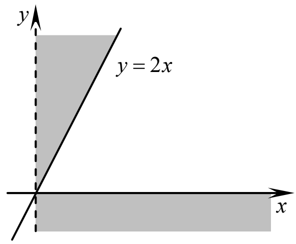
1. Левое число больше.
2. $\{0\}$.
3. 24%.
4. $\{1\}$.
5. $n=0$, $k=2006$.
6. $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ 2\pi l\right):\ k,l\in\mathbb{Z}\right\}$.
7. $\left\{-\dfrac{1}{e\ln 2}\right\}\cup[0;+\infty)$.
8. $\left(0;\dfrac{2}{\sqrt{5}}a\right]$.
9. $\dfrac{7}{12}$.
10. $\dfrac{2}{3}\pi$.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2007

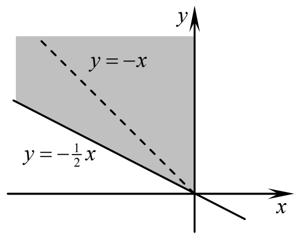
11 класс, ответы к варианту 1

1. Числа равны.
2. $\{\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$.
3. $\{(1;\ 1);\ (3;\ 3)\}$.
4. $\left(-\infty;\ \log_2\dfrac{2}{3}\right]$.
5. $\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
6. $\{2^k:\ k\in\mathbb{N}\}$.
7. См. рис.
8. 1.
9. $9:5$ и $5:2$.
10. $\sqrt{2}$, 1.



11 класс, ответы к варианту 2

1. Числа равны.
2. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. $\{(1;\ 1);\ (2;\ 2)\}$.
4. $\left(-\infty;\ \log_3\dfrac{4}{5}\right]$.
5. $\left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.
6. $\{3^k:\ k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\}$.
7. См. рис.
8. 1.
9. $4:5$ и $5:1$.
10. $2\sqrt{2}$, 2.



ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2004

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

РЕШЕНИЯ

1. Сравните числа $2^{\sqrt{5}}$ **и** $3^{\sqrt{3}}$**.**

Возведем обе части неравенства в степень $\sqrt{3}$:

$$2^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{3}} < (3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{15}} < 3^3,$$

осталось заметить, что $2^{\sqrt{15}} < 2^{\sqrt{16}} = 2^4 = 16 < 27 = 3^3$. Поэтому $2^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{3}}$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} \geq 1 - x$**.**

В силу равенств

$$\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = |x-1|\sqrt{x+1}$$

имеем:

$$|x-1|\sqrt{x+1} \geq 1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ \begin{cases} x < 1, \\ \sqrt{x+1} \geq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ \begin{cases} x < 1, \\ x \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ 0 \leq x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 0.$$

3. Решите неравенство $\log_4^2\left(\frac{x}{2}\right)^4 \leq \log_2^3\left(-\frac{2}{x}\right)$.

Пусть $t = \log_2\left(-\frac{x}{2}\right)$. Тогда заданное неравенство записывается в виде $t^3 + 4t^2 \leq 0$, откуда $t = 0$ или $t \leq -4$.

Возвращаясь к переменной x, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2\left(-\frac{x}{2}\right) = 0; \\ \log_2\left(-\frac{x}{2}\right) \leq -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{x}{2} = 1; \\ 0 < -\frac{x}{2} \leq 2^{-4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2; \\ -\frac{1}{8} \leq x < 0. \end{array}\right.$$

Полученная совокупность задает множество решений неравенства.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=x^4-1;\\(x+y)(x^4+y^4)=x^4+1.\end{cases}$

Умножим первое уравнение на второе. Поскольку правая часть второго уравнения системы не обращается в нуль ни при каких значениях переменной, полученная система будет равносильна исходной:

$$\begin{cases}(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=(x^4-1)(x^4+1);\\(x-y)(x^4+y^4)=x^4+1.\end{cases}$$

Из первого уравнения после раскрытия скобок и приведения подобных получим $y^8=1$, тогда из второго найдем искомые пары решений: $(0;\ -1)$ и $(2;\ 1)$.

5. Решите уравнение $\sin x-2\cos x=3\cos^2 x-2\sin 2x-5$**.**

Уравнение имеет вид $t=t^2-6$, откуда $t=-2$ или $t=3$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\sin x-2\cos x=-2;\\ \sin x-2\cos x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{5}\sin(x-\operatorname{arctg}2)=-2;\\ \sqrt{5}\sin(x-\operatorname{arctg}2)=3,\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{5}\sin(x-\operatorname{arctg}2)=-2\Leftrightarrow x=(-1)^k\arcsin\frac{-2}{\sqrt{5}}+\operatorname{arctg}2+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

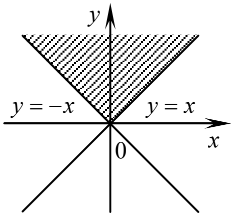
6. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $y=\dfrac{|y+x|+|y-x|}{2}$**.**

Умножим обе части равенства на 2**,** получим $|y+x|+|y-x|=2y$. Поскольку

$$|a|+|b|=a+b\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0,\\b\ge 0,\end{cases}$$

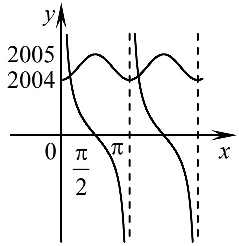
имеем

$$|y+x|+|y-x|=2y\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge x,\\y\ge -x.\end{cases}$$



Искомое множество — угол, ограниченный биссектрисами I и II координатной четвертей.

7. Определите количество решений уравнения $\sin^{2004} x + 2004 = \mathrm{ctg}^{2005}\, x$ на отрезке $[0;\ 2005\pi]$.



Левая и правая части уравнения π-периодичны, точки $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ не являются корнями уравнения, следовательно, на отрезке $[0;\ 2005\pi]$ корней в 2005 раз больше, чем корней на $[0;\ \pi]$. Построив эскизы графиков левой и правой частей (см. рис.), заметим, что на отрезке $[0;\ \pi]$ уравнение имеет ровно одно решение. Тогда всего решений 2005.

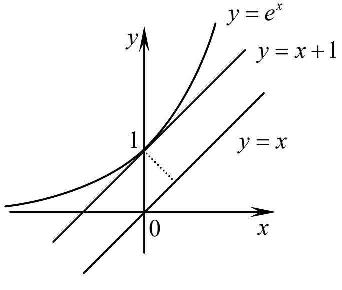
8. Найдите те первообразные функции $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$, графики которых имеют с графиком функции $f(x)$ ровно две общие точки.

Нужно понять, при каких значениях параметра уравнение $3x^2 + 12x + 12 = x^3 + 6x^2 + 12x + c$ имеет ровно два корня. Запишем его в виде $12 - c = x^3 + 3x^2$, два корня соответствуют прохождению прямой $y = 12 - c$ через экстремумы функции $y = x^3 + 3x^2$. Поскольку точки экстремумов суть 0 и –2, искомые постоянные: $c = 12$ и $c = 8$, тогда искомые первообразные суть $F(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 12$ и $F(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

9. Решите уравнение $(x - y)^2 + (e^x - y)^2 = \dfrac{1}{2}$.

Переформулируем задачу: требуется найти числа x и y такие, что квадрат расстояния между точками $(x;\ e^x)$ и $(y;\ y)$ равен 0,5.

Заметим, что точка с координатами $(x;\ e^x)$ лежит на графике функции $y = e^x$, а точка с координатами $(y;\ y)$ лежит на прямой $y = x$.



Наименьшее расстояние между точками этих графиков — расстояние между прямой $y = x$ и параллельной ей касательной к экспоненте. Известно, что эта касательная задается уравнением $y = x + 1$, поэтому (см. рис.) искомое расстояние равно $1/\sqrt{2}$.

Тогда $x = 0$, откуда имеем

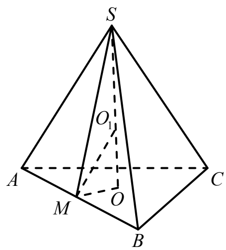
$$y^2 + (1-y)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Поэтому пара $(0;\ 0,5)$ — единственное решение уравнения.

10. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной a. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью ABC угол α. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

Радиус сферы, вписанной в пирамиду, ищется либо как расстояние от ее центра до плоскости любой грани, либо по формуле по формуле $R = \frac{3V}{S}$, где V — объем пирамиды, а S — площадь ее полной поверхности.

В условии подчеркнуто, что боковые грани составляют равные углы не с основанием, а с плоскостью основания. Тем самым проекцией вершины пирамиды могут быть 4 точки: центр окружности, вписанной в основание, и центры трех вневписанных в основание окружностей. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник, для него все вневписанные окружности одинаковы, поэтому можно ограничиться рассмотрением только двух различных случаев.



1 случай. Проведем высоту пирамиды SO. Так как высота проецируется в центр вписанной в основание окружности, рассматриваемая пирамида является правильной. Проведем апофему SM и биссектрису MO_1 угла SMO, точка O_1 — равноудалена от всех граней, следовательно, это центр вписанной сферы.

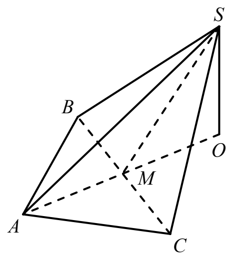
В треугольнике ABC:

$$MO = r = \frac{a}{2\sqrt{3}},\ \angle OMO_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$R_{\text{шара}} = OO_1 = MO \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2 случай. Поскольку площадь основания равна $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, полупериметр основания равен $p=1,5a$, радиус вневписанной окружности есть



$$OM=r_a=\frac{S_{ABC}}{p-a}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда

$$SO=OM\ \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\ ,$$

откуда

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}SO=\frac{a^3}{8}\mathrm{tg}\,\alpha\ .$$

Осталось определить площадь полной поверхности пирамиды:

$$S=S_{осн.}+S_{бок.\ пов.}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{2}a\frac{r_a}{\cos\alpha}=$$
$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{\cos\alpha}\right)$$

и воспользоваться формулой $R=3V/S$, откуда

$$R=\frac{3}{8}a^3\ \mathrm{tg}\,\alpha:\frac{\sqrt{3}a^2\cos\alpha}{4(3+\cos\alpha)}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{\sin\alpha}{3+\cos\alpha}\ .$$

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2005

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

РЕШЕНИЯ

1. Сравните числа $\sin 10° \cos 20°$ **и** $\sin 40°$**.**

Перемножая почленно верные неравенства $0 < \sin 10° < \sin 40°$ и $0 < \cos 20° < 1$, имеем: $0 < \sin 10° \cos 20° < \sin 40°$, поэтому левое число меньше.

2. Решите уравнение $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{-3x}$ **.**

Известно, что $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{b-a} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b, \\ b \ge 0. \end{cases}$. В нашем случае имеем

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{-3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x=x^2-2x, \\ x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

3. Решите неравенство $\sqrt{x^6+2x^3+1} \le x+1$**.**

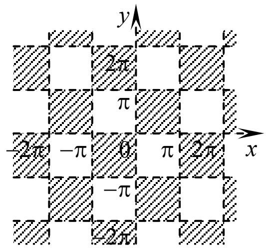
Заметим, что $\sqrt{x^6+2x^3+1}=\sqrt{(x^3+1)^2}=|x^3+1|$. Поскольку по $x<-1$ не является решением данного неравенства, имеем:

$$\begin{cases} x^3+1 \le x+1, \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-1) \le 0, \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ 0 \le x \le 1. \end{array}\right.$$

4. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $\log_2(\sin x \sin y)=\log_2|\sin x|+\log_2|\sin y|$**.**

Поскольку по смыслу задачи $\sin x \cdot \sin y > 0$, равенство выполнено для тех и только для тех чисел x и y, для которых выполнена совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin y > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin y < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (2\pi k;\ \pi+2\pi k), \\ y \in (2\pi l;\ \pi+2\pi l), \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\pi+2\pi k;\ 2\pi k), \\ y \in (-\pi+2\pi l;\ 2\pi l);\ k,\ l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$



Отсюда получаем: искомое множество точек координатной плоскости имеет вид бесконечной «шахматной доски», изображенной на рисунке, причем границы клеток в ответ не входят.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x(xy+6)=y^3; \\ y(xy-24)=x^3. \end{cases}$

Перемножив уравнения системы, получим уравнение-следствие:

$$xy(xy+6)(xy-24)=x^3y^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0; \\ xy=-8. \end{array}\right.$$

Случаю $xy=0$ соответствует пара решений $(0;\ 0)$. В случае, когда $xy=-8$, имеем:

$$\begin{cases} -2x=y^3, \\ -32y=x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}y^3, \\ -32y=-\dfrac{1}{8}y^9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}y^3, \\ y^8=256 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4, \\ y=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, решениями системы являются три пары чисел: $(0;\ 0);\ (-4;\ 2);\ (4;\ -2)$.

6. Определите, при каких значениях параметра *a* имеет единственное решение уравнение

$$27^x+(a-2)\cdot 9^x-a\cdot 3^x+2a-a^2=0\,.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$27^x+(a-2)\cdot 9^x-a\cdot 3^x+2a-a^2=0 \Leftrightarrow (9^x-a)(3^x+a-2)=0\,.$$

Отсюда: уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда:

– $a\ge 2$, тогда уравнение $9^x=a$ имеет решение, а уравнение $3^x=2-a$ — нет;
– $a\le 0$, тогда уравнение $3^x=2-a$ имеет решение, а уравнение $9^x=a$ — нет;
– $a\in(0;\ 2)$, но уравнения $9^x=a$ и имеют одно и тоже решение. Тогда $9^x+3^x-2=0 \Leftrightarrow 3^x=1$, что возможно при $a=1$.

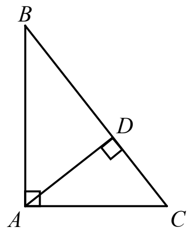
Итак, уравнение имеет одно решение при $a\in(-\infty;\ 0]\cup\{1\}\cup[2;\ +\infty)$.

7. Определите стоимость набора из 11 кг апельсинов, 18 кг яблок и 4 кг груш, если 3 кг апельсинов, 5 кг яблок и 2 кг груш стоят вместе 290 рублей, а 1 кг апельсинов, 2 кг яблок и 4 кг груш стоят 270 рублей.

Пусть x рублей стоит 1 кг апельсинов, y рублей — 1 кг яблок, z рублей — 1 кг груш, тогда $3x+5y+2z=290$, $x+2y+4z=270$, необходимо найти $11x+18y+4z$. Ответ следует из цепочки равенств:

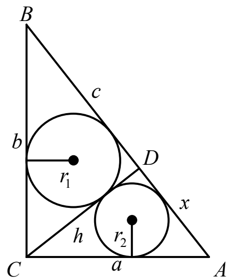
$$11x+18y+4z=4(3x+5y+2z)-(x+2y+4z)=4\cdot 290-270=890 .$$

8. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника провели высоту. В полученные тем самым треугольники вписали окружности радиусов 3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.



1 способ. Введем обозначения, как показано на рисунке. Для трех подобных прямоугольных треугольников ABC, ACD и CBD, сумма площадей двух из которых равна площади третьего, справедливо соотношение $l^2_{ABC}=l^2_{ADC}+l^2_{ADB}$, где l — любой их линейный сходственный элемент. В нашем случае для радиусов вписанных в треугольники окружностей имеем:

$$r_{ABC}=\sqrt{r^2_{ABD}+r^2_{ADC}}=\sqrt{3^2+4^2}=5 .$$



2 способ. Введем обозначения, как показано на рисунке. Из подобия треугольников ABC, ACD и CBD имеем:

$$\frac{b}{a}=\frac{r_1}{r_2}\Leftrightarrow a=\frac{3b}{4} \quad \text{и} \quad \frac{b}{c}=\frac{r_1}{r}\Leftrightarrow r=\frac{4c}{b} .$$

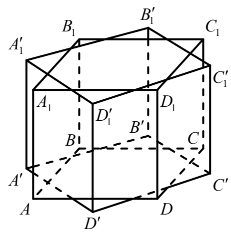
Тогда по теореме Пифагора:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{9b^2}{16}+b^2}=\frac{5b}{4} .$$

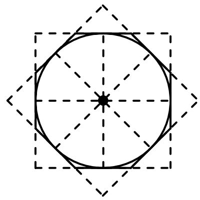
Откуда

$$r=\frac{4c}{b}=\frac{4\cdot\frac{5b}{4}}{b}=5 .$$

9. Куб с длиной ребра 2 повернули вокруг высоты, проходящей через центр его основания, на угол $45°$. Докажите, что объем общей части исходного и полученного кубов не меньше чем 4.



1 способ. Очевидно, что пересечение кубов будет правильная прямая восьмиугольная призма с высотой 2. Рассмотрим ее основание. Ясно, что площадь восьмиугольника больше площади вписанной в него окружности. Так как восьмиугольник получен из квадратов со стороной 2, радиус вписанной в него окружности равен 1. Тогда $S_{\text{окр.}} = \pi r^2 = \pi > 2$ и



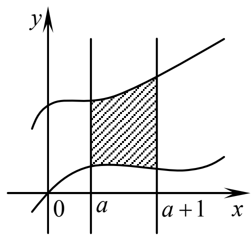
$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = 2S_{\text{осн.}} > 2S_{\text{окр.}} = 2\pi > 4$.

2 способ. Исходный и полученный куб имеют общий центр, и поэтому они имеют общую вписанную сферу. Тогда объем их общей части не меньше объема этой сферы, равного $4\pi/3$, что больше 4.

Примечание. Заметим, что решение 2 справедливо для вращения на любой угол, вдоль любой прямой, проходящей через центр куба.

10. Определите, при каком значении параметра *a* площадь фигуры, ограниченной линиями $x = a$, $x = a+1$, $y = x^2 + x + \cos^2 x$, $y = x - \sin^2 x$, наименьшая.

Поскольку для любых значений переменной $(x^2 + x + \cos^2 x) - (x - \sin^2 x) > 0$, график первой функции при всех значениях аргумента лежит выше графика второй функции. Тогда площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (см. рис.), дается формулой



$$S = \int_a^{a+1} (x^2 + x + \cos^2 x) - (x - \sin^2 x)dx =$$

$$= \int_a^{a+1} (x^2 + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Bigg|_a^{a+1} = \frac{1}{3}((a+1)^3 - a^3) + (a+1) - a = a^2 + a + \frac{4}{3}.$$

Полученный трехчлен достигает наименьшего значения при $a = -\dfrac{1}{2}$.

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2005

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

РЕШЕНИЯ

1. Сравните числа

$$(\sqrt{2006}-\sqrt{2005}+\sqrt{2004})^{-1} \text{ и } (\sqrt{2008}+\sqrt{2007}-\sqrt{2006})^{-1}.$$

Заметим, что

$$\sqrt{2006}-\sqrt{2005}+\sqrt{2004}<\sqrt{2008}+\sqrt{2007}-\sqrt{2006} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2006}+\sqrt{2006}+\sqrt{2004}<\sqrt{2008}+\sqrt{2007}+\sqrt{2005},$$

поэтому левое число больше правого.

2. Решите уравнение $x^2+x+2x\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1=0$**.**

Внесем x под знак квадратного корня. В зависимости от знака переменной возможны два случая.

1 случай: $x>0$. Имеем:

$$x^2+x+2\sqrt{x^2+x}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x}+1)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=-1,$$

полученное уравнение не имеет решений.

2 случай: $x<0$. Имеем:

$$x^2+x-2\sqrt{x^2+x}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x}-1)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=1 \Leftrightarrow x^2+x=1 \underset{x<0}{\Leftrightarrow} x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

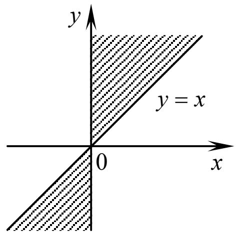
3. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x}+x^{2\log_2 x}\ge 6$**.**

Решение:

$$2^{\log_2^2 x}+x^{2\log_2 x}\ge 6 \Leftrightarrow x^{2\log_2 x}+x^{\log_2 x}-6\ge 0 \Leftrightarrow x^{\log_2 x}\ge 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2^2 x\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge 1;\\ \log_2 x\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2;\\ 0<x\le \frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(1;\ \frac{1}{2}\right]\cup[2;\ +\infty)$.

4. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $|x|+|y-x|=|y|$.



Поскольку сумма модулей двух величин равна модулю их суммы в том и только в том случае, когда они имеют одинаковый знак, имеем

$$|x|+|y-x|=|y| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|+|y-x|=|x+(y-x)| \Leftrightarrow x(y-x)\ge 0 .$$

Тогда в правой полуплоскости искомое множество представляет собой точки, лежащие не ниже, а в левой полуплоскости — не выше прямой $y=x$. Точки прямой $x=0$ удовлетворяют неравенству. Искомое множество изображено на рисунке.

5. Найдите количество решений уравнения в целых числах $|x|+|1-y|+|y-x|=1$.

Поскольку никакой из модулей не может превосходить единицы, можно рассмотреть три случая.

1 случай: $x=0$, тогда $|1-y|+|y|=1 \underset{y\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} y=0; \\ y=1. \end{array}\right.$

2 случай: $x=1$, тогда $|1-y|+|y-1|=0 \underset{y\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} y=1$.

3 случай: $x=-1$, тогда $|1-y|+|y+1|=0$, решений нет.

Тем самым уравнение имеет следующие пары целочисленных решений: $(0;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 1)$, их три.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=15; \\ x^2+y^2+z^2=75. \end{cases}$

1 способ. Вычтем из второго уравнения первое, предварительно умножив на 10 обе его части. Имеем:

$$x^2+y^2+z^2-10x-10y-10z=-75 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=0 \Leftrightarrow x=y=z=5 .$$

Проверка показывает, что полученные числа являются решениями системы.

2 способ. Поскольку

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx),$$

из первого и второго уравнений системы, получим

$$225 = 75+2(xy+yz+zx) \Leftrightarrow xy+yz+zx = 75.$$

Справедливо неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2+x^2) \geq (xy+yz+zx)^2.$$

В нашем случае мы имеем равенство, что соответствует коллинеарности векторов $(x;\ y;\ z)$ и $(y;\ z;\ x)$. Тогда $x = ty,\ \ y = tz,\ \ z = tx$, откуда $xyz = t^3 xyz \Leftrightarrow t = 1$, что дает $x = y = z$.

3 способ. Вычитая из квадрата первого уравнения второе, получим

$$(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = 225-75 \Leftrightarrow 2xy+2yz+2zx = 150.$$

Вычтем из удвоенного второго уравнения полученное, имеем:

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$$

Тогда из первого уравнения $x = y = z = 5$. Найденные числа — решения системы.

4 способ. Запишем первое уравнение в виде следующей суммы: $(x-5)+(y-5)+(z-5) = 0$. Введем теперь новые переменные: $x-5 = a,\ \ y-5 = b,\ \ z-5 = c$. Тогда

$$a^2+b^2+c^2 = x^2+y^2+z^2+75-10(x+y+z) = 75+75-10\cdot 15 = 0,$$

откуда $a = b = c = 0$, что дает $x = y = z = 5$.

5 способ. Рассмотрим два вектора: $(x;\ y;\ z)$ и $(1;\ 1;\ 1)$ с длинами $\sqrt{75}$ и $\sqrt{3}$ соответственно. Первое уравнение системы представляет собой их скалярное произведение:

$$15 = x+y+z = (x;\ y;\ z)\cdot(1;\ 1;\ 1) = |(x;\ y;\ z)|\cdot|(1;\ 1;\ 1)|\cdot\cos\alpha =$$
$$= \sqrt{75}\cdot\sqrt{3}\cos\alpha = 15\cos\alpha,$$

где α — угол между ними. Поскольку $\cos\alpha = 1$, векторы коллинеарны, откуда $x = y = z$, тогда $x = y = z = 5$.

6 способ. Первое уравнение системы задает плоскость, второе — сферу радиуса $\sqrt{75}$ с центром в начале координат. Покажем, что плоскость касается сферы. Используя формулу для расстояния от точки $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

получим

$$d = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 - 15|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \sqrt{75}.$$

Таким образом, расстояние от центра сферы до заданной плоскости равно радиусу сферы, что соответствует случаю их касания. Тогда система имеет единственное решение, которое нетрудно угадать. Итак, $x = y = z = 5$.

Если решение угадать не удается, поступим формально: требуется определить вектор с началом в начале координат, конец которого лежит на плоскости $x + y + z = 15$, коллинеарный вектору нормали к плоскости. Тогда искомый вектор имеет координаты $k\cdot(1;\ 1;\ 1) = (k;\ k;\ k)$. Поскольку координаты удовлетворяют уравнению плоскости, получаем $k + k + k = 15$. Отсюда $k = 5$, и тогда $x = y = z = 5$.

7. Воспользовавшись равенством $\sin 108° = \sin 72°$ **, найдите** $\sin 36°$ **.**

Пусть $36^\circ = \alpha$, тогда, учитывая $\sin\alpha > 0$**,** имеем:

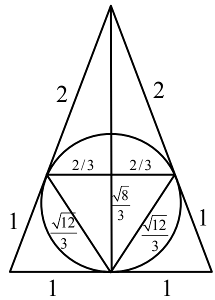
$$\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \Leftrightarrow 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 - 4\sin^2\alpha = 2\cos\alpha \Leftrightarrow 3 - 4(1 - \cos^2\alpha) = 2\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Тогда

$$\sin 36^\circ = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

8. В треугольник со сторонами 3, 3 и 2 вписали окружность. Точки касания окружности со сторонами треугольника соединили и в полученный треугольник снова вписали окружность. Найдите ее радиус.

Длины необходимых отрезков обозначены на рисунке (использовано свойство касательных). Искомый радиус есть

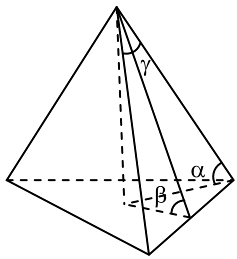


$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{\sqrt{12}}{3}\right)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}.$$

9. Обозначим в правильной треугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания α, угол наклона боковой грани к плоскости основания — β, плоский угол при вершине — γ. Известно, что $\gamma = 2\alpha$. Найдите углы α, β, γ.

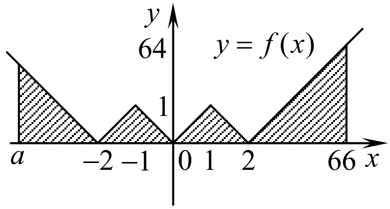
Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной в основание окружностей соответственно. Тогда

$$R\,\mathrm{tg}\,\alpha = r\,\mathrm{tg}\,\beta \text{ и } \frac{R}{\cos\alpha}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{\cos\beta}.$$



Поскольку $R = 2r$ и $\gamma = 2\alpha$, имеем $\beta = \frac{\pi}{3}$, откуда $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\gamma = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. Найдите значение параметра *a*, при котором верно равенство: $\int\limits_a^{66} \Big|\big|\,|x|-1\big|-1\Big|\,dx = 2100$.



Отметим, что площадь подграфика подынтегральной функции на отрезке $[2;\ 66]$ равна $0,5\cdot 64^2 = 2048$, а площадь, подграфика для отрезка $[-2;\ 2]$, равна 2. Таким образом, площадь, соответствующая отрезку $[a;\ -2]$, должна равняться 50. Имеем уравнение $\frac{1}{2}(-2-a)^2 = 50 \underset{a<-2}{\Leftrightarrow} a = -12$.

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2006

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

РЕШЕНИЯ

1. Сравните числа $\log_3 \sin 2$ **и** $\log_2 \sin 3$ **.**

1 способ. Заметим, что углы 2 и 3 радиана лежат во второй четверти, где функция синус убывает, поэтому $0 < \sin 3 < \sin 2 < 1$.

Заметим также, что для всех x из интервала (0; 1) справедливо неравенство $\log_2 x < \log_3 x$. Поэтому

$$\log_3 \sin 2 > \log_3 \sin 3 > \log_2 \sin 3 .$$

2 способ. Левое число больше в силу двойного неравенства $\log_3 \sin 2 > -1 > \log_2 \sin 3$, которое следует из следующих оценок:

$$\sin 3 < \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \log_2 \sin 3 < \log_2 \sin\frac{\pi}{6} = \log_2 \frac{1}{2} = -1 ,$$

$$\sin 2 > \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \log_3 \sin 2 > \log_3 \sin\frac{\pi}{6} = \log_3 \frac{1}{2} > \log_3 \frac{1}{3} = -1 .$$

2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - |2x-1|} = 2x - |x+1|$**.**

По смыслу задачи должно выполняться условие $2x - |x+1| \ge 0$, что возможно только для положительных значений x. Если $x > 0$, то $|x+1| = x+1$, и заданное уравнение принимает вид $\sqrt{x^2 - |2x-1|} = x-1$. Правая часть полученного уравнения должна быть неотрицательна, откуда $x \ge 1$, при этом $|2x-1| = 2x-1$, откуда

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = x-1 \Leftrightarrow |x-1| = x-1 \Leftrightarrow x \ge 1 .$$

3. Решите неравенство $\arcsin^2 x > \arccos^2 x$ **.**

Перенесем правую часть в левую, разложим полученное тем самым выражение на множители и воспользуемся тождеством $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$:

$$\arcsin^2 x > \arccos^2 x \Leftrightarrow \arcsin^2 x - \arccos^2 x > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\arcsin x - \arccos x)\cdot(\arcsin x + \arccos x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\arcsin x - \arccos x)\frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow \arcsin x - \arccos x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arcsin x - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) > 0 \Leftrightarrow 2\arcsin x > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arcsin x > \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 \geq x > \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1,$$

последнее неравенство и задает множество решений.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ 8x^3 - 2x^2 - 6x = 2y^2 + \sqrt{3} - 2. \end{cases}$

Поскольку $x^2 + y^2 = 1$, на отрезке $[0;\ 2\pi]$ найдется число α альфа такое, что $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \\ 8\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha - 6\cos\alpha = 2\sin^2\alpha + \sqrt{3} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = \sqrt{3} + 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3\alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k \Leftrightarrow$$

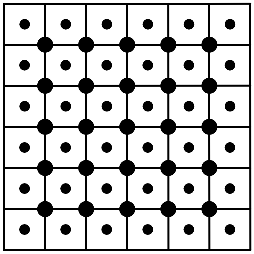
$$\Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \pm\frac{\pi}{18} + 2\pi k; \\ \alpha = \pm\frac{13\pi}{18} + 2\pi k; \\ \alpha = \pm\frac{25\pi}{18} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $\alpha \in [0;\ 2\pi]$, получим решения $(x;\ y)$ исходной системы:

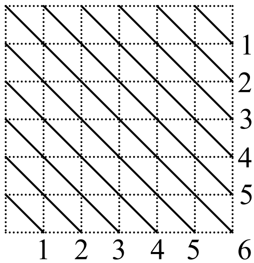
$$\left(\cos\frac{\pi}{18};\ \sin\frac{\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{\pi}{18};\ -\sin\frac{\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{13\pi}{18};\ \sin\frac{13\pi}{18}\right);$$

$$\left(\cos\frac{13\pi}{18};\ -\sin\frac{13\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{25\pi}{18};\ -\sin\frac{25\pi}{18}\right);\ \left(\cos\frac{25\pi}{18};\ \sin\frac{25\pi}{18}\right).$$

5. Фрагмент решетки представляет собой квадрат, изображенный на рисунке. Сколько всего квадратов, со сторонами, параллельными сторонам фрагмента, образовано его узлами?



1 способ. Квадраты, о которых идет речь, однозначно задаются положением их центров. Для квадратиков со стороной 1 положений их центров 6^2 (см. рис.), центров квадратиков со стороной 2 — 5^2 (они являются узлами квадратной решетки со стороной 5), центров квадратиков со стороной 3 — 4^2 и т. д. Всего вариантов: $6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1=91$.



2 способ. (Афанасьев Дмитрий) Для того, чтобы задать квадрат в такой решетке, достаточно указать одну из его диагоналей. Рассмотрим диагональ решетки и параллельные ей отрезки (см. рис., справа и снизу указаны номер типов диагоналей). Вариантов задания концов диагонали для диагоналей первого типа — 1, второго — $C_3^2=3$, третьего — $C_4^2=6$, четвертого — $C_5^2=10$, пятого — $C_6^2=15$, шестого типа (большой диагонали) — $C_7^2=21$. Всего квадратов $21+2(3+6+10+15+1)=91$.

6. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\log_2(x^4+2a^2)=\log_2(1-ax^2)+1$ имеет единственное решение.

Ясно, что если число x — решение уравнения, то число $-x$ тоже его решение. Поскольку уравнение имеет единственное решение, это решение $x=0$, что возможно, если

$$\log_2(2a^2)=\log_2 1+1 \Leftrightarrow \log_2(2a^2)=1 \Leftrightarrow 2a^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1; \\ a=-1. \end{array}\right.$$

Проверим, нет ли у заданного уравнения при найденных значениях параметра других решений, кроме $x=0$.

Если $a=1$ уравнение действительно имеет единственное решение:

$$\log_2(x^4+2)=\log_2(1-x^2)+1 \Leftrightarrow x^4+2=2-2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^2=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Если $a = -1$, уравнение имеет три решения:

$$\log_2(x^4 + 2) = \log_2(1 + x^2) + 1 \Leftrightarrow x^4 + 2 = 2 + 2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \sqrt{2}; \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

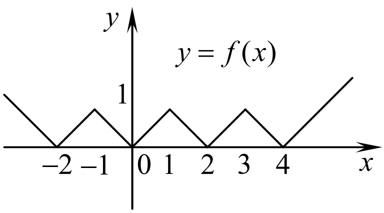
Таким образом, заданное уравнение имеет единственное решение при $a = 1$.

7. Докажите равенство:

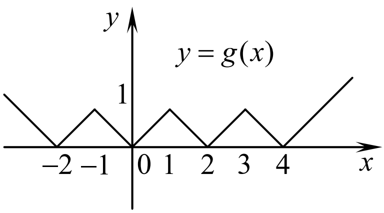
$$\int_{-2005}^{2006} \left|\left|\left| x-1 \right| -2\right| -1\right| dx = \int_{-2005}^{2006} \left|\left|\left|\left| x-1 \right| -1\right| -1\right| -1\right| dx.$$

Равенство интегралов следует из тождественного равенства подынтегральных функций, что в свою очередь немедленно следует из совпадения их графиков:

$$f(x) = |||x-1| - 2| - 1|$$



$$g(x) = ||||x-1| - 1| - 1| - 1|$$

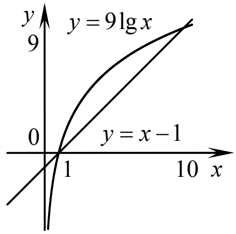


8. Решите уравнение $10^{x-1} = x^9$ **.**

Прологарифмируем обе части данного уравнения по основанию 10:

$$10^{x-1} = x^9 \Leftrightarrow \lg 10^{x-1} = \lg x^9 \Leftrightarrow x - 1 = 9\lg x .$$

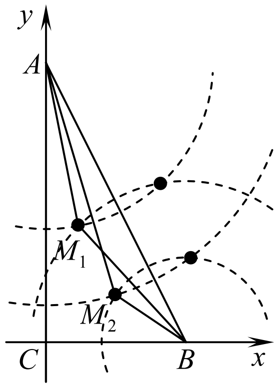
Построим графики левой и правой частей полученного уравнения (см. рис.). Ясно, что числа 1 и 10 его корни. Заметим, что функция $y = 9\lg x$ возрастает и выпукла вверх, а функция $y = x$ возрастает и выпукла вниз. Поскольку графики одномонотонных разновыпуклых функций имеют не более двух точек пересечения других корней, кроме найденных, уравнение не имеет.



9. В прямоугольном треугольнике с катетами 2 и 4 расстояния от вершин острых углов до некоторой точки, лежащей внутри треугольника, равны $\sqrt{2}$ **и** $\sqrt{10}$ **. Найдите расстояние от нее до вершины прямого угла этого треугольника.**

Введем обозначения, как показано на рисунке. Поскольку катеты имеют разные длины, возможны два случая: $AM_1 = \sqrt{2}$, $BM_1 = \sqrt{10}$ или $AM_2 = \sqrt{2}$, $BM_2 = \sqrt{10}$.

Введем систему координат, как указано на рисунке. В этой системе координат: $A(0;\ 4)$, $B(2;\ 0)$, $C(0;\ 0)$, $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$.



Рассмотрим первый случай. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} AM_1 = \sqrt{2}, \\ BM_1 = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + (4-y)^2} = \sqrt{2}, \\ \sqrt{(2-x)^2 + y^2} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (4-y)^2 = 2, \\ (2-x)^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8y - 14, \\ x^2 + y^2 = 4x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y-5)^2 + y^2 = 8y - 14, \\ x = 2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 28y + 39 = 0, \\ x = 2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 3; \\ y = \dfrac{13}{5}, \end{array} \right. \\ x = 2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}, \\ y = \dfrac{13}{5}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, есть две точки, находящиеся на заданных расстояниях от вершин A и B треугольника, причем внутри одна из них лежит внутри, а другая — вне рассматриваемого треугольника. Проверим: если $M_1\left(\dfrac{13}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$, то $CM_1 = \sqrt{\dfrac{1}{25} + \dfrac{169}{25}} = \dfrac{\sqrt{170}}{5}$, если $M_1(1; 3)$, то $CM_1 = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. Поскольку $\sqrt{10} > \dfrac{\sqrt{170}}{5} \Leftrightarrow 250 > 170$, внутри треугольника лежит точка $M_1\left(\dfrac{13}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$.

Рассмотрим первый случай. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} AM_2 = \sqrt{10}, \\ BM_2 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + (4-y)^2} = \sqrt{10}, \\ \sqrt{(2-x)^2 + y^2} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (4-y)^2 = 10, \\ (2-x)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8y - 6, \\ x^2 + y^2 = 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y-1)^2 + y^2 = 8y - 6, \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

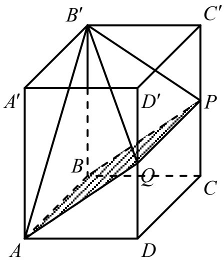
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 12y + 7 = 0, \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 1; \\ y = \dfrac{7}{5}, \end{array} \right. \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{9}{5}, \\ y = \dfrac{7}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, есть две точки, находящиеся на заданных расстояниях от вершин A и B треугольника, причем внутри одна из них лежит внутри, а другая — вне рассматриваемого треугольника. Проверим: если $M_2\left(\dfrac{9}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$, то $CM_2 = \sqrt{\dfrac{81}{25} + \dfrac{49}{25}} = \dfrac{\sqrt{130}}{5}$, если $M_2(1; 1)$, то

$CM_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Поскольку $\dfrac{\sqrt{130}}{5} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 130 > 50$, внутри треугольника лежит точка $M_2(1;\ 1)$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{170}}{5}$ или $\sqrt{2}$.

10. В правильной призме $ABCDA'B'C'D'$ длины сторон основания *ABCD* равны 1, а длины боковых ребер равны 2. Через ребро *AB* проведена плоскость, делящая двугранный угол при основании пополам и пересекающая боковые ребра *CC'* и *DD'* в точках *P* и *Q* соответственно. Найдите объем пирамиды $B'ABPQ$.



Заметим, что поскольку AQ — биссектриса угла $A'AD$, треугольник ADQ прямоугольный и равнобедренный: $AD = QD = 1$, тогда $AQ = \sqrt{2}$, откуда $S_{ABPQ} = \sqrt{2}$, что дает нам площадь основания пирамиды $B'ABPQ$. Осталось найти высоту пирамиды.

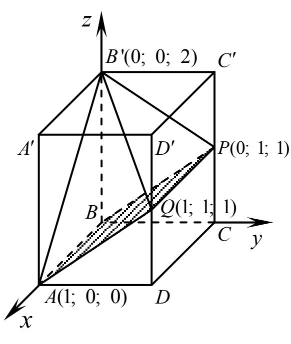
1 способ. Высотой пирамиды является ее ребро $B'P$, действительно:

$$QP \perp BB'C'C \Rightarrow QP \perp B'P,$$

кроме того, $B'P \perp BP$, поскольку

$$\widehat{B'PB} = 180° - \widehat{B'PC} - \widehat{BPC} = 180° - 2\widehat{BPC} = 180° - 2\widehat{AQD} = 90°.$$

Тогда $H_{\text{пирамиды}} = B'P = AQ = \sqrt{2}$.



2 способ. Введем систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат: $B(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $Q(1;\ 1;\ 1)$, $P(0;\ 1;\ 1)$, $B'(0;\ 0;\ 2)$. Поскольку плоскость *ABPQ* является биссектрисой двугранного угла при основании, ее уравнение имеет вид $y = z$ или $y - z = 0$.

Напомним, что расстояние от точки с координатами $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В нашем случае расстояние от вершины пирамиды точки $B'(0;\ 0;\ 2)$ до плоскости ее основания $y - z = 0$ — искомая длина высота пирамиды — дается величиной

$$d = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ .$$

Таким образом, искомый объем пирамиды есть

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2007

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

РЕШЕНИЯ

1. Сравните числа $\mathrm{ctg}\dfrac{3\pi}{8}+\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{24}$ **и** $\sqrt{3}$ **.**

Правое число больше в силу справедливости цепочки неравенств:

$$\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{8}+\mathrm{tg}\frac{5\pi}{24}<\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{8}+\mathrm{tg}\frac{6\pi}{24}=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}<1+\frac{2}{3}<\sqrt{3}.$$

2. Решите неравенство $|x|+\sqrt{|x+2|-1}\ge x$ **.**

1 способ. Раскрывая модуль, перейдем к совокупности систем неравенств:

$$|x|+\sqrt{|x+2|-1}\ge x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\sqrt{x+2-1}\ge x\\ x\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-x+\sqrt{|x+2|-1}\ge x\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+1}\ge 0,\\ x\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{|x+2|-1}\ge 2x,\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 0;\\ \begin{cases}|x+2|\ge 1\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 0;\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+2\ge 1;\\ x+2\le -1,\end{array}\right.\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge -1;\\ x\le -3.\end{array}\right.$$

2 способ. Заметим, что при отрицательных значениях переменной правая часть неравенства отрицательна, а левая неотрицательна, поэтому неравенство верно для всех x из области определения. Для неотрицательных значений x, имеем $|x|=x$, и неравенство принимает вид $\sqrt{|x+2|-1}\ge 0$**,** что также выполнено на области определения. Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству $|x+2|\ge 1$, откуда $x\le -3$ или $x\ge -1$.

3. Пусть в стране *Л* подоходный налог на зарплату начисляется следующим образом: с суммы не превышающей 1000 денежных единиц взимается 15% налога, с дохода от 1000 до 2000 тысяч денежных единиц с первой тысячи взимается 15%, а с оставшейся суммы взимается 25%, если же доход превышает 2000 единиц, то с

первой тысячи взимается 15%, со второй — 25%, с оставшейся суммы взимается 50% налога. Каков (в процентах) итоговый налог выплачивает гражданин этой страны, получающий после выплаты налогов зарплату в 2600 денежных единиц?

Заметим, что если после выплаты налогов зарплата превышает 2000 денежных единиц, то до выплаты налогов она тоже превышает 2000 единиц. Пусть зарплата гражданина составляет $2000 + x$ денежных единиц. В этом случае сумма выплачиваемых им налогов равна

$$1000 \cdot 0,15 + 1000 \cdot 0,25 + 0,5x = 150 + 250 + 0,5x = 400 + 0,5x .$$

Поскольку 2600 единиц в сумме выплаченными налогами составляет всю зарплату гражданина, имеем уравнение:

$$2600 + 400 + 0,5x = 2000 + x \Leftrightarrow 0,5x = 1000 \Leftrightarrow x = 2000 .$$

Тогда зарплата гражданина составляет $2000 + 2000 = 4000$ денежных единиц, а выплачиваемый им налог $4000 - 2600 = 1400$ денежных единиц. Он составляет $(1400 / 4000) \cdot 100 = 35\%$ заработка.

4. Решите уравнение $3^{3x} - \dfrac{27}{3^{3x}} - 9\left(3^x - \dfrac{3}{3^x}\right) = 8$**.**

Положим $t = 3^x - \dfrac{3^x}{3}$ и заметим, что заданное уравнение имеет вид $t^3 = 8$. Действительно,

$$t^3 = \left(3^x - \frac{3}{3^x}\right)^3 = 3^{3x} - 3 \cdot 3^{2x} \cdot \frac{3}{3^x} + 3 \cdot 3^x \cdot \frac{9}{3^{2x}} - \frac{27}{3^{3x}} =$$

$$= 3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} - 9 \cdot \left(3^x - \frac{3}{3^x}\right).$$

Тогда $t = 2$, откуда

$$3^x - \frac{3}{3^x} = 2 \Leftrightarrow 9^x - 3 = 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = -1; \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 ,$$

это и есть ответ.

5. Решите уравнение $3^m+3^{2m}+3^{3m}+\ldots+3^{k\cdot m}=2007$ **в целых числах.**

Отметим, что если $m=0$, то каждое из слагаемых равно 1, и при $k=2007$ равенство будет верно. Покажем, что при прочих целых значениях *m* решений нет.

Если $m<0$, левая часть уравнения представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом 3^m и знаменателем 3^m, сумма которой не больше суммы прогрессии

$$3^{-1}+3^{-2}+\ldots+3^{-k}<3^{-1}+3^{-2}+\ldots+3^{-k}+\ldots<\frac{3^{-1}}{1-3^{-1}}=\frac{1}{2}.$$

Поэтому левая часть заданного уравнения не может равняться 2007.

Пусть $m>0$, тогда левая часть представляет собой геометрическую прогрессию, и ее сумма находится явно:

$$3^m+3^{2m}+3^{3m}+\ldots+3^{k\cdot m}=3^m\,\frac{3^{k\cdot m}-1}{3^m-1}.$$

Отсюда получаем:

$$3^m\,\frac{3^{k\cdot m}-1}{3^m-1}=2007\Leftrightarrow 3^m(3^{k\cdot m}-1)=2007\cdot(3^m-1)\Leftrightarrow 3^m(3^{k\cdot m}-1)=$$

$$=3^2\cdot 223\cdot(3^m-1).$$

Числа $3^{k\cdot m}-1$, 223 и 3^m-1 на три нацело не делятся, следовательно, $m=2$. Тогда $3^{2k}-1=223\cdot 8\Leftrightarrow 3^{2k}-1=1784\Leftrightarrow 3^{2k}=1785$. Число 1785 не является натуральной степенью тройки, следовательно, в натуральных числах уравнение решений не имеет.

Для того, чтобы показать, что в натуральных числах заданное уравнение не имеет решений можно привести другое рассуждение. Рассмотрим три возможности. Пусть $m=1$, имеем:

$$3^1+3^2+3^3+\ldots+3^k=2007\Leftrightarrow 3^2+3^3+\ldots+3^k=2004,$$

что невозможно, поскольку 2004 не кратно 9. Пусть $m=2$, имеем:

$$3^2+3^4+3^6+\ldots+3^{2k}=2007\Leftrightarrow 3^4+\ldots+3^{2k}=1995,$$

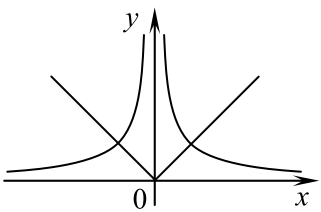
что невозможно, поскольку 1995 не кратно 9. Аналогично для $m\geq 3$: левая часть будет кратна 27, а правая — нет, что и доказывает отсутствие натуральных решений заданного уравнения.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \dfrac{1}{\sin x} = \sin^2 y - 2, \\ \cos y + \dfrac{1}{\cos y} = \cos^2 x + 2. \end{cases}$

Заметим, что правая часть первого уравнения отрицательна, поэтому на множестве решений и левая будет отрицательна. Тогда в силу неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим она не больше -2, что означает, что и правая часть не больше -2. Следовательно, $\sin y = 0$ и $\sin x = -1$. Если $\sin x = -1$, то $\cos x = 0$. Тогда правая часть из второго уравнения системы равна двум, что возможно только если $\cos y = 1$. Таким образом, $\sin x = -1$, $\cos y = 1$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $y = 2\pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

7. Определите, при каких значениях параметра *a* уравнение $|x| = a \log_2 |x|$ **имеет ровно два решения.**

Если $a = 0$, уравнение не имеет решений. Если $a < 0$, то уравнение имеет одно положительное и одно отрицательное решение в силу разномонотонности функций на положительной и отрицательной полуосях.



Если $a > 0$ уравнение имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда график модуля касается графика логарифма, что задается системой соотношений:

$$\begin{cases} x' = (a \log_2 x)', \\ x = a \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{a}{x \ln 2}; \\ x = a \log_2 x \end{cases} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = x \ln 2; \\ x = x \ln 2 \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = x \ln 2; \\ \ln 2 \dfrac{\ln x}{\ln 2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \ln 2; \\ \ln x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \ln 2; \\ x = e. \end{cases}$$

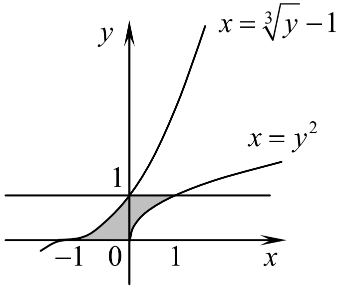
Заметим, что найденное значение параметра действительно положительно, откуда ответ: $a < 0$, $a = e \ln 2$.

8. Найдите, в каких пределах изменяется высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, если длина одного из его катетов равна *a*, а длина другого не меньше $2a$.

Если длина одного катета a, а другого $2a$, то длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, будет равна $(a\cdot 2a)/\sqrt{a^2+(2a)^2}=2a/\sqrt{5}$. При увеличении большего катета высота будет приближаться к меньшему, непрерывно увеличиваясь. Итак, длина высоты может принимать любые значения на промежутке $[2a/\sqrt{5};\ a)$.

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $x=\sqrt{y}$, $x=(y+1)^3$, $x=0$, $x=1$.

Переименуем переменные привычным образом: $y=\sqrt{x}$, $y=(x+1)^3$, $y=0$, $y=1$. Площадь фигуры, ограниченной непересекающихся графиками двух функций найдем как интеграл от их разности. Удобно интегрировать по dy, здесь $x=y^2$, $\sqrt[3]{y}-1$:



$$S=\int_0^1 (y^2-\sqrt[3]{y}+1)dy=\frac{1}{3}y^3\Big|_0^1-\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1+y\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+1=\frac{7}{12}.$$

10. Центры одинаковых шаров радиуса 1 лежат в вершинах прямой призмы боковое ребро которой равно 4, а основание — треугольник со сторонами 3, 4, 5. Найдите сумму объёмов частей этих шаров, лежащих внутри призмы.

Совместим части, лежащие непосредственно под верхним над нижним основаниями. Они образуют секторы, которые в свою очередь при совмещении дадут половину шара. Искомый объем равен половине его объема, т. е. $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$.

ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2007

11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

РЕШЕНИЯ

1. Сравните числа $3^{\sqrt{\log_3 2}}$ **и** $2^{\sqrt{\log_2 3}}$ **.**

Равенство чисел следует из следующей цепочки равносильных преобразований:

$$3^{\sqrt{\log_3 2}} = 2^{\sqrt{\log_2 3}} \Leftrightarrow \log_3 3^{\sqrt{\log_3 2}} = \log_3 2^{\sqrt{\log_2 3}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_3 2} = \sqrt{\log_2 3}\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3 2 = \log_2 3\log_3^2 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 2 = \log_2 3\log_3 2\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3 2 = \log_3 2 .$$

Примечание. Докажем общее соотношение $a^{\sqrt[n]{\log_a^k x}} = x^{\sqrt[n]{\log_x^{n-k} a}}$:

$$a^{\sqrt[n]{\log_a^k x}} = x^{\sqrt[n]{\log_x^{n-k} a}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\log_a^k x} = \sqrt[n]{\log_x^{n-k} a} \cdot \log_a x \Leftrightarrow$$
$$1 = \sqrt[n]{\log_x^{n-k} a} \cdot \sqrt[n]{\log_a^{n-k} x} \Leftrightarrow 1 = 1 .$$

2. Решите уравнение $\cos x \cos 3x - 1 = 0$ **.**

Преобразуем произведение косинусов в сумму косинусов и воспользуемся их ограниченностью сверху:

$$\cos x \cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\pi k, \\ \cos 4\pi k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Решите систему $\begin{cases} x = \sqrt{4y-3}, \\ y = \sqrt{4x-3}. \end{cases}$

1 способ. Подставим второе уравнение системы в первое:

$$\begin{cases} x = \sqrt{4y-3}, \\ y = \sqrt{4x-3} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{4\sqrt{4x-3}-3} \Leftrightarrow x = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4x-3, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Проверка показывает, что пары $(1;\ 1)$ и $(3;\ 3)$ – решения системы.

2 способ. По смыслу задачи значения обеих переменных не меньше 0,75. Тогда

$$\begin{cases} x=\sqrt{4y-3}, \\ y=\sqrt{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4y-3, \\ y^2=4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=4(y-x), \\ y^2=4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x, \\ y^2=4x-3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y-4, \\ y^2=4x-3; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1, \\ x=1; \end{cases} \\ \begin{cases} y=3, \\ x=3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Тем самым пары $(1;\ 1)$ и $(3;\ 3)$ — искомые решения уравнения.

4. Решите неравенство $2^x+2^{2x}+2^{3x}+\ldots\le 2$ **.**

Бесконечная сумма в левой части неравенства не превышает двух, только если она представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Тогда имеем:

$$2^x+2^{2x}+2^{3x}+\ldots\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^x}{1-2^x}\le 2 \\ |\,2^x\,|<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x\le 2-2\cdot 2^x, \\ 2^x<1 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x\le\frac{2}{3} \underset{2>1}{\Leftrightarrow} x\le\log_2\frac{2}{3}.$$

5. Решите уравнение $\sqrt{x+1}(3x^2+x+1)=x^3+3x^2+3x$ **.**

Перенесем все слагаемые в одну часть и воспользуемся формулой куба разности:

$$\sqrt{x+1}(3x^2+x+1)=x^3+3x^2+3x \Leftrightarrow (x-\sqrt{x+1})^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x+1, \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

6. Решите уравнение $\sqrt{\sin(\pi\log_2 x)}=\ln(\sin(\pi\,|\,x+0,5\,|))$ **.**

Заметим, что по смыслу задачи переменная положительна. Тогда $\sin(\pi\,|\,x+0,5\,|)\Leftrightarrow\sin(\pi x+0,5\pi)=\cos\pi x$, откуда:

$$\sqrt{\sin(\pi\log_2 x)} = \ln(\sin(\pi\,|\,x+0,5\,|)) \Leftrightarrow \sqrt{\sin(\pi\log_2 x)} = \ln(\cos\pi x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin(\pi\log_2 x)} = \ln(\cos\pi x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\pi\log_2 x) = 0, \\ \cos\pi x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

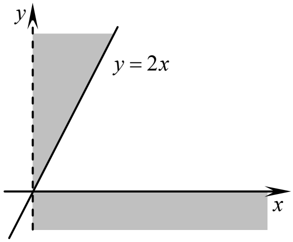
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi\log_2 x = \pi k, \;\; k\in\mathbb{Z}, \\ \pi x = 2\pi n, \;\; n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^k, \\ x = 2n \end{cases} \Leftrightarrow x = 2^k,\, k\in\mathbb{N}.$$

7. Изобразите множество точек плоскости *xOy*, координаты которых удовлетворяют неравенству $\log_2|y-x| \ge \log_2 x$ **.**

Проведем равносильные преобразования:

$$\log_2|y-x| \ge \log_2 x \underset{2>1}{\Leftrightarrow} |y-x| \ge x > 0 \Leftrightarrow$$

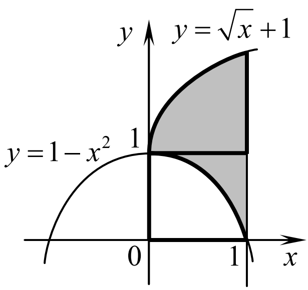
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y-x \ge x; \\ y-x \le -x, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y \ge 2x; \\ y \le 0, \end{array}\right. \\ x > 0. \end{cases}$$



Искомое множество точек изображено на рисунке.

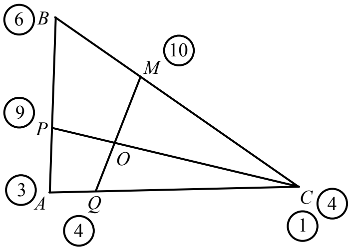
8. Определите площадь фигуры, ограниченной тремя линиями: $y = 1-x^2$, $y=\sqrt{x}+1$, $x = 1$.

Фигура, площадь которой требуется найти заштрихована на рисунке. Функции $y = x^2$ и $y=\sqrt{x}$ взаимно обратные на $[0;\,1]$, поэтому фигуры, обведенные на рисунке жирным контуром равны. Тогда площади можно перегруппировать, и искомая площадь равна площади единичного квадрата; она равна 1.



9. В прямоугольном треугольнике *ABC* на катетах *AB* и *AC* отмечены точки *P* и *Q* соответственно, такие что $AP=1$, $PB=2$, $AQ=1$, $QC=3$ **. Точка *M* делит гипотенузу в отношении 2:3, считая от вершины *B*. Определите, в каком отношении точка *O* пересечения отрезков *PC* и *MQ* делит эти отрезки.**

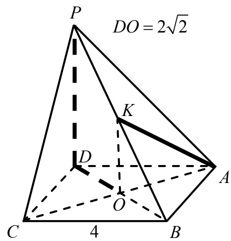
Рассмотрим систему материальных точек $3A,\ 6B,\ 1C, 4C$. Пусть точка O — ее центр масс. Поскольку $\dfrac{3A+6B+1C+4C}{14}=\dfrac{9P+5C}{14}$ и $\dfrac{3A+6B+1C+4C}{14}=\dfrac{10M+4Q}{14}$ центр масс есть точка пересечения отрезков CP и MQ, которые разделены им соответственно в отношениях $9:5$ и $5:2$.



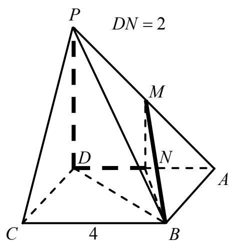
10. В основании пирамиды высотой 4 лежит квадрат со стороной 2. Одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Найдите расстояние от него до скрещивающихся с ним медиан боковой грани.

Введем обозначения как показано на рисунках и рассмотрим 2 случая.

1 случай: требуется найти расстояние между отрезками *PD* и *AK*. Ясно, что длина общего перпендикуляра к прямым *PD* и *AK* равна длине общего перпендикуляра к отрезкам *PD* и *AK*.



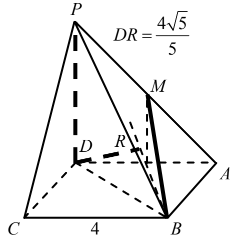
Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них. Спроецируем *PD* и *AK* на плоскость основания и найдем расстояние от точки D до AO. Оно равно $2\sqrt{2}$ — половине диагонали квадрата $ABCD$.



2 случай: требуется найти расстояние между отрезками *PD* и *BM*. Эти отрезки не имеют общего перпендикуляра.

Расстоянием между отрезками является наименьшее расстояние между их точками. В нашем случае — расстояние от отрезка *PD* до точки *M*, оно равно 2.

Примечание. Расстояние DR между скрещивающимися прямыми PD и BM (см. рис.) равно $4/\sqrt{5}$.



С О Д Е Р Ж А Н И Е

Подписано к печати 21.10.2007. Формат бумаги 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 4 усл. п. л. Тираж 200 экз. Заказ 3453.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ.
198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., 26.