

Дмитрий Гущин, Санкт-Петербург

ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Двигутся звёзды и целые галактики, вся Вселенная в целом и её мельчайшие частицы — молекулы, атомы, электроны. В движении находятся растения и животные, воздушные массы и водные потоки. Отчего это так — почему наш мир — это мир движущихся объектов? Мы не дадим ответа на этот вопрос. Мы расскажем о том, как описывают движения математики.

Для начала приведём примеры геометрических преобразований — это повороты, отражения относительно точки, прямой, плоскости, переносы вдоль прямой или вдоль плоскости, подобие, сжатие и др.

Напомним некоторые определения. Если каждой точке пространства (будем называть её прообразом) поставлена в соответствие некоторая единственная точка пространства (её образ), и при этом каждый образ имеет единственный прообраз, то такое соответствие между точками пространства называется его геометрическим преобразованием. Прообраз точки может совпасть со своим образом, в этом случае он называется неподвижной точкой преобразования. Если все точки преобразования неподвижны, преобразование называют тождественным.

Геометрическое преобразование, при котором сохраняются неизменными расстояния между любыми двумя точками, называют движением. Наглядное представление о движениях фигур в пространстве даёт механическое окружающих нас движение твёрдых тел.

Движение является одним из центральных геометрических понятий. На нём основано понятие равенства фигур: две фигуры считаются равными, если существует движение, переводящее одну из них в другую. Кроме того, если при преобразовании фигуры сохраняются расстояния между её точками, то сохраняются и все остальные геометрические свойства фигуры — углы, параллельность отрезков, площадь и т. п.: все они зависят только от расстояний.

Движения евклидовой планиметрии (именно она изучается в школе) представлены параллельными переносами (такое преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются в одном направлении на одно и то же расстояние), поворотами и осевыми симметриями с последующим параллельным переносом вдоль оси. Оказывается, что других движений плоскости нет, то есть все возможные движения, которые можно совершить на плоскости описываются комбинациями вышеназванных основных движений. Этот факт — теорема Шаля — был доказан в 19 веке французским математиком Мишелем Шалем (1793—1880).

Принципиальная сводимость всех возможных движений к набору из нескольких основных не должна нас особенно удивлять. Самые сложные музыкальные композиции сводятся к проигрыванию той или иной комбинации из нескольких десятков музыкальных звуков, многообразие сочетаний красок происходит от смешивания небольшого количества основных тонов на палитре художника, собрание сочинений писателя — запись комбинаций из трёх десятков букв алфавита. С другой стороны, к комбинациям простейших обычно сводятся структуры, придуманные человеком, но не объекты природы: облака не состоят из нескольких одинаковых «маленьких облачков», а камни не состоят из других «элементарных» камешков. Но, так или иначе, все возможные движения плоскости сводятся к последовательности выполнения (композиции) нескольких основных движений.

Поясним это утверждение следующей иллюстрацией. Рассмотрим солдата ([3]), умеющего выполнять четыре команды строевой подготовки: «смирно» (С), «налево» (Л), «направо» (П), «кругом» (К). Нетрудно проверить, что последовательное выполнение любых двух из этих команд даст тот же результат, что выполнение какой-то одной из этих четырёх. Так, например, результат последовательного выполнения команд «направо» и «кругом» совпадает с результатом выполнения команды «налево»: $К \circ П = Л$, а последователь-

$\circ$	С	П	Л	К
С	С	П	Л	К
П	П	К	С	Л
Л	Л	С	К	П
К	К	Л	П	С

ное выполнение двух команд «налево» даёт тот же результат, что выполнение команды «кругом» $L \circ L = K$. Соответствие между выполнением каких-то двух команд третьей задаётся таблицей умножения (см. табл. 1); такое название не случайно: суть таблицы умножения натуральных чисел и таблицы умножения команд одна и та же — определить результат выполнения операции над двумя объектами. Понятно, что результат выполнения нашим солдатом сколь угодно длинной цепочки команд в конечном итоге будет сведён к выполнению какой-то одной из четырёх основных.

Знаете, как на самом деле называется набор действий солдата? «Циклическая группа 4-го порядка» или «группа вычетов по модулю 4». Понятие группы — одно из важнейших понятий математики. Без конечных групп нельзя, например, указать, какие алгебраические уравнения разрешимы в радикалах, а какие — нет, при помощи групп описывают, как устроены кристаллы. Несмотря на то, что в школьном курсе группы пока не изучаются, мы находим возможность познакомить с ними чрезвычайно привлекательной.

Набор некоторых действий, которые можно последовательно выполнять, называют группой, если в этом наборе для каждого действия обязательно присутствует обратное к нему, а результат последовательного выполнения любых двух действий также является действием из этого набора.

Четыре действия солдата составляют группу $R(\square) = \{C, П, Л, К; \circ\}$. Особую роль играет действие C , которое можно назвать «ничегонеделание». Такое действие обязательно есть в любой группе: мы его получим, выполнив произвольное действие, а затем обратное к нему. У нас действия $П$ и $Л$ обратны друг к другу, действие $К$ — обратно к самому себе, и т. д.

Полезно заметить, что выполнение солдатом двух любых команд не зависит от порядка этих команд, например, $L \circ П = П \circ L$. Такое свойство групповой операции называется свойством коммутативности, а группа в этом случае называется коммутативной или Абелевой. В общем случае (в отличие от привычных нам операций сложения или умножения чисел) групповая операция не обязана быть коммутативной. Скажем, если бы солдат умел ещё выполнять команду «шаг вперёд» (B), то выполнение последовательности команд «налево» и «шаг вперёд» отличалось бы от результата выполнения команд «шаг вперёд» и «налево»: $H \circ B \neq B \circ H$.

Однако групповая операция всегда должна удовлетворять свойству ассоциативности, то есть для любых действий f, g, h должно быть справедливо равенство $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. В случае с нашим солдатом, например, $(B \circ L) \circ K = B \circ (L \circ K)$ — то есть выполнение команды «кругом», а затем результата выполнения двух команд «шаг вперёд» и «налево» приводит к тому же состоянию, что сначала выполнение результата двух команд «кругом» и «шаг налево», а потом команды «шаг вперёд».

С более общих формальных позиций группы могут состоять из элементов любой природы, а групповая операция — не обязательно композиция действий. В этом случае группой называют непустое множество некоторых элементов с заданной операцией над ними, удовлетворяющей следующим условиям: результат выполнения операции даёт элемент этого же множества, выполнено свойство ассоциативности и задана обратная операция. Если набор движений удовлетворяет этим свойствам, то говорят, что задана группа движений. Можно убедиться, что движения евклидовой плоскости образуют группу. (Если к ней добавить гомотетии и их композиции с евклидовыми движениями, то получится группа преобразований подобия.)

Движения в пространстве также сводятся к композиции нескольких основных: центральной симметрии, зеркальной симметрии (симметрии относительно плоскости), параллельному переносу и повороту вокруг оси (в частности, осевой симметрии). В ряде случаев композиция этих движений даёт одно из них же, однако некоторые их композиции приводят к новым движениям пространства: скользящей плоскостной симметрии, зеркальному вращению и винтовому движению. Перечисленными семью различными видами движений исчерпываются все возможные движения пространства.

Интересно отметить, что, оказывается, всякое движение плоскости может быть получено с помощью не более чем трёх осевых симметрий, а любое движение пространства может быть представлено в виде композиции не более чем четырёх симметрий относительно плоскостей. Это — частные случаи общего утверждения о том, что любую изометрию (движение) в n -мерном евклидовом пространстве можно представить в виде композиции не более чем $n + 1$ отражения.

Помимо движений, сохраняющих расстояние между точками, в геометрии изучаются такие преобразования пространства, которые изменяют расстояния. Например, преобразования подобия — эти преобразования изменяют расстояние между точками в одно и то же число раз. Подобие фигур — одно из часто используемых преобразований: план местности, города или квартиры представляет собой изображение, подобное исходному. Преобразование подобия сохраняет отношения пар отрезков... Но это уже другая история.

Библиография

1. *Александров П. С.* Введение в теорию групп. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980 (Библиотечка «Квант. Вып. 7»).

(<http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-kvant/groups.htm>)

2. *Потоскуев Е. В.* Геометрия. 11 кл.. — М.: Дрофа, 2005.

3. *Соснинский А. Б.* Конечные группы, Квант № 2, 1987

(<http://kvant.mirror1.mccme.ru/1987/02/p08.htm>)

4. *Хачатурян А. В.* Геометрия Галилея (Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»), М.: МЦНМО, 2005. — 32 с.: ил. (<http://mmmf.math.msu.su/lect/books/pdf/book032.pdf>).