

Санкт-Петербургский государственный университет, 2005
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. Конечная арифметическая прогрессия состоит из двадцати членов, сумма которых равна 70. Известно, что среди ее членов есть числа 1 и 4. Найдите все такие прогрессии.
2. Решите уравнение $2\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) = \sqrt{2 \cos 2x - \cos 6x}$.
3. Решите неравенство $\log_{x^2-1}(x^2 + 7x) < \log_x(x + 2)$.
4. В равнобедренно треугольнике основание равно 7, а угол при основании равен $\frac{(2n-1)}{n} \cdot 45^\circ$ (n — натуральное число). Докажите, что боковая сторона треугольника меньше $5n$.
5. Найдите все значения параметра a , при которых система
$$\begin{cases} x - y - 4xy = 12, \\ (2 + x - x^2)(2 - y - y^2) = a \end{cases}$$
 имеет ровно два вещественных решения.
6. При каких натуральных n существует целое число, квадрат которого равен $n^3 - 32n^2 + n$?
7. В четырехугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = BC = 18$, $CD = 16$ и диагональ $BD = 14$. Найдите расстояние между точками касания прямой BD с окружностями, вписанными в треугольники ABD и BCD , если известно, что их радиусы одинаковы и $AD \neq CD$.
8. При каких значениях параметра a многочлен $P(x) = ax^2 - (3 + a^2)x - 3a - 9$ имеет хотя бы один общий корень с многочленом $Q(x) = (a + 1)x^2 - a(a + 1)x - 6a - 9$?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. Конечная арифметическая прогрессия состоит из двадцати четырех членов, сумма которых равна 60. Известно, что среди ее членов есть числа 2 и 5. Найдите все такие прогрессии.
2. Решите уравнение $2 \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cos 6x - \cos 2x$.
3. Решите неравенство $\log_{x^2-3}(x^2 + 6x) < \log_x(x + 2)$.
4. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 5, а прилежащий к нему острый угол равен $\frac{(3n-1)}{n} \cdot 30^\circ$ (n — натуральное число, $n > 1$). Докажите, что гипотенуза треугольника меньше, чем $10n$.
5. Найдите все значения параметра a , при которых система
$$\begin{cases} x - y - 2xy = 4, \\ (2 - 3x + x^2)(2 + 3y + y^2) = a \end{cases}$$
 имеет ровно два вещественных решения.
6. При каких натуральных n существует целое число, квадрат которого равен $n^3 - 80n^2 - n$?
7. В четырехугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = CD = 7$, $BC = 12$ и диагональ $BD = 9$. Найдите расстояние между точками касания прямой BD с окружностями, вписанными в треугольники ABD и BCD , если известно, что их радиусы одинаковы и $AD \neq BC$.
8. При каких значениях параметра a многочлен $P(x) = ax^2 + (1 + 2a^2)x + 2 + a$ имеет хотя бы один общий корень с многочленом $Q(x) = (2a - 1)x^2 + 2a(2a - 1)x + 4 - 2a$?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. $\{-6; -5; \dots; 12; 13\}$, $\{13; 12; \dots; -5; -6\}$, $\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \dots; \frac{19}{3}; \frac{20}{3}\right\}$, $\left\{\frac{20}{3}; \frac{19}{3}; \dots; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}$;
2. $\left\{\frac{13\pi}{6} + 4\pi k; \frac{5\pi}{6} + 4\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; 3. $(1; \sqrt{2})$; 5. $a \in \left(\frac{25}{16}; 16\right)$; 6. $n = 144$; 7. 4; 8. $a \in \left\{-2; -\frac{3}{2}; 0\right\}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2005
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. $\{-9; -8; \dots; 13; 14\}$, $\{14; 13; \dots; -8; -9\}$, $\left\{-\frac{4}{3}; -1; \dots; 6; \frac{19}{3}\right\}$, $\left\{\frac{19}{3}; 6; \dots; -1; -\frac{4}{3}\right\}$;
2. $\left\{\pm \frac{3\pi}{3} + 4\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; 3. $(\sqrt{3}; 2)$; 5. $a \in \left\{-\frac{3}{20}\right\} \cup (0; 144)$; 6. $n = 841$; 7. 3; 8. $a \in \left\{0; \frac{5}{4}; 2\right\}$.