

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. Окружность радиуса r вписана в четырехугольник $ABCD$. Найдите его площадь, если известно, что сумма длин его сторон AB и BC равна 42, периметр треугольника ACD равен 18 и $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{4}$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Укажите, при каких значениях r задача имеет решение.
2. Решите уравнение $(4x+2)\sqrt{x+1} - (4x-2)\sqrt{x-1} = 9$.
3. Решите неравенство $\log_{2-x} |x^2 + x| + \log_{2x-x^2} |x^3 + x^2| \leq 2$.
4. Решите систему $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5 - 2x, \\ 2^{x+y} = x^2 - 5x + 4. \end{cases}$
5. Определите число решений уравнения $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x - a}} = \frac{a^2 + \cos x}{\sqrt{\sin x - a}}$ на отрезке $[0; 2\pi]$ в зависимости от параметра a .
6. Найдите все упорядоченные пары целых чисел $(k; l)$, такие, что многочлен

$$P(x) = x^3 - (k-1)x^2 + (k^2 + k - 1)x + k + l$$

имеет лишь целые корни, т.е. представим в виде $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, где x_1, x_2, x_3 — какие-либо целые числа.

7. Какой максимальный объем может иметь треугольная пирамида, у которой какие-либо три ребра равны a , а два из трех оставшихся равны 1?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. Окружность радиуса r вписана в четырехугольник $ABCD$. Найдите его площадь, если известно, что сумма длин его сторон AB и BC равна 22, периметр треугольника ACD равен 54 и $\frac{OD}{OB} = \frac{3}{1}$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Укажите, при каких значениях r задача имеет решение.
2. Решите уравнение $(4x+1)\sqrt{x+2} - (4x-1)\sqrt{x-2} = 21$.
3. Решите неравенство $\log_{2-x} |x^2 - 1| + \log_{2x-x^2} |x^3 - x| \leq 2$.
4. Решите систему $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 - 2x, \\ 3^{x+y} = x^2 - 28x + 27. \end{cases}$
5. Определите число решений уравнения $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\cos x + a}} = \frac{\sin x - a^2}{\sqrt{\cos x + a}}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ в зависимости от параметра a .
6. Найдите все упорядоченные пары целых чисел $(k; l)$, такие, что многочлен

$$P(x) = x^3 - (k+3)x^2 + (k^2 + k - 1)x + k \cdot l$$

имеет лишь целые корни, т.е. представим в виде $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, где x_1, x_2, x_3 — какие-либо целые числа.

7. Какой максимальный объем может иметь треугольная пирамида, у которой какие-либо два ребра равны b , а три из четырех оставшихся равны 1?