

Санкт-Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2000-2001 учебный год, октябрь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПЕРВЫЙ ОЧНЫЙ ТУР

1. Найдите сумму квадратов корней уравнения $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.
2. Многочлен $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ при делении на $(x-a)$ дает в остатке A , а при делении на $(x-b)$ дает в остатке B . Найдите остаток от деления этого многочлена на произведение $(x-a)(x-b)$, если $a \neq b$.
3. Найдите площадь четырехугольника, координаты вершин которого удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$
4. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{25}{9} > \frac{3x^2 + \frac{4}{9}}{2\left(x - \frac{1}{3}\right) + \sqrt{x\left(x - \frac{8}{3}\right)}}.$$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.
6. Некоторое количество денег было разложено на n -кучек. После этого из первой кучки переложили во вторую $\frac{1}{n}$ часть бывших в первой кучке денег. Затем из второй кучки $\frac{1}{n}$ оказавшихся в ней после перекладывания денег переложили в третью кучку. Далее $\frac{1}{n}$ часть денег, получившихся после этого в третьей кучке, переложили в четвертую и так далее. Наконец из n -й кучки $\frac{1}{n}$ часть оказавшихся в ней после предшествующего перекладывания денег переложили в первую кучку. После этого в каждой кучке стало по A рублей. Сколько денег было в каждой кучке до перекладывания?
7. В треугольнике ABC , все стороны которого различны, биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . Известно, что $|AB| - |BD| = a$, $|AC| + |CD| = b$. Найдите длину AD .

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ВТОРОЙ ОЧНЫЙ ТУР

1. Объем A составляет m -ю часть суммы объемов B и C , а объем B составляет n -ю часть суммы объемов A и C . Какую часть суммы объемов A и B составляет C ?
2. Вычислите произведение корней уравнения

$$\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4} - \frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x} \right) : \left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5} - \frac{1-x+x^2}{x^3} \right) = \frac{1}{3}.$$

3. Найдите формулу, связывающую a , b и c , если корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ образуют геометрическую прогрессию.
4. Вычислите длину l биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC , если даны его стороны b и c ($b \neq c$) и угол A между ними. Пояснение: длиной биссектрисы внешнего угла A треугольника называется длина отрезка, заключенного между точкой A и точкой пересечения биссектрисы с продолжением стороны a .
5. Найдите сумму всех целых положительных решений неравенства $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} < 35 - 2x$.
6. Найдите периметр пространственного многоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 20, \\ x^4 + y^4 - z^4 = 560. \end{cases}$$
7. В треугольнике ABC взяты точки: M на стороне AC , N на стороне BC , P на отрезке MN , причем $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|CN|}{|NB|} = \frac{|MP|}{|PN|}$. Найдите площадь треугольника ABC , если площади треугольников AMP и BNP равны T и Q .