

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 1999 год
математические классы

Работа 1

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_{x+2}(9x^2 + 15x - 6) < 2$.
2. Решите уравнение $8 \cdot 2^{|x|} + 7 \cdot 2^x = 30$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2|x| + 1$ и касательными к нему, проходящими через точку $A\left(-\frac{5}{6}; -\frac{14}{3}\right)$.
4. Найдите общие корни многочленов $x^4 - x^2 - 2x - 1$ и $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$.
5. Изобразите на комплексной плоскости множество всех таких точек z_0 , что для каждой из них для любого решения z уравнения $|z - 3i| = |z - z_0|$ выполняется условие $z^2 \neq ti$ для любого положительного $t \in \mathbb{R}$.
6. Найдите все такие значения параметра a , для каждого из которых уравнение $\cos x = a$ имеет наибольшее количество корней на промежутке $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{29\pi}{2}\right]$. Определите это количество; для каждого такого a найдите сумму корней данного уравнения на рассматриваемом промежутке.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_{1-x}(2x^2 + 3x + 1) \geq 2$.
2. Решите уравнение $15 \cdot 3^{|x|} + 9 \cdot 3^x = 32$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 3|x| + x$ и касательными к нему, проходящими через точку $A\left(-\frac{5}{4}; -\frac{13}{2}\right)$.
4. Найдите общие корни многочленов $x^4 - x^2 + 6x - 9$ и $x^4 - x^3 - 2x^2 + 9x - 9$.
5. Изобразите на комплексной плоскости множество всех таких точек z_0 , что для каждой из них для любого решения z уравнения $|z + 4| = |z - z_0|$ выполняется условие $z^2 \neq ti$ для любого отрицательного $t \in \mathbb{R}$.
6. Найдите все такие значения параметра a , для каждого из которых уравнение $\sin x = a$ имеет наибольшее количество корней на промежутке $\left[-10\pi; \frac{5\pi}{6}\right]$. Определите это количество; для каждого такого a найдите сумму корней данного уравнения на рассматриваемом промежутке.

Вариант 1

1. Найдите модуль и один из аргументов комплексного числа $1 - \cos 9 - i \sin 9$.
2. Пусть $f(x) = \sqrt{2} \cos x + \sin 3x$. Найдите какое-либо отрицательное число t , для которого выполняется равенство $f(t) = -f'(t)$.
3. Исследуйте функцию $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x + \sqrt{9x^2 + 0,0625}) - 2$ на четность и нечетность.
4. Какова вероятность, что в числе, случайно выбранном из всех четырехзначных чисел, нет цифры 7?
5. Сравните два числа: $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} dx$ и $\ln 3$, используя геометрическую интерпретацию определенного интеграла.
6. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^5 - 5x^4 + ax + b = 0$ для любого значения b имеет ровно один корень.

Вариант 2

1. Найдите модуль и один из аргументов комплексного числа $1 - \cos 13 + i \sin 13$.
2. Пусть $g(x) = \sqrt{13} \cos x + \sin 5x$. Найдите какое-либо положительное число t , для которого выполняется равенство $g(t) = -g'(t)$.
3. Исследуйте функцию $f(x) = \log_3(\sqrt{16x^2 + 9} - 4x) - 1$ на четность и нечетность.
4. Какова вероятность, что в числе, случайно выбранном из всех четырехзначных чисел, нет цифры 0?
5. Сравните два числа: $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{5}} \cos \frac{1}{x} dx$ и $\sqrt[3]{2}$, используя геометрическую интерпретацию определенного интеграла.
6. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{1}{5}x^5 - ax^4 + 3x + b = 0$ для любого значения b имеет ровно один корень.

Вариант 1

1. Решите уравнение $\log_x(3x-2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) + \log_{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{3x-2}\right)}$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{2x} - x + 3$, образующей с осями координат равнобедренный прямоугольный треугольник.
3. Изобразите на комплексной плоскости все такие точки z_0 , что среди чисел z , удовлетворяющих уравнению $|z + z_0| = \frac{1}{2}$, есть ровно одно число с модулем 1.
4. Найдите общие корни многочленов $x^4 - x^2 - 6x - 9$ и $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x + 6$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \cos \frac{2x+y}{2} = 3 \sin x, \\ \sin \frac{2x+y}{2} = \cos x. \end{cases}$$
6. На изготовление аквариума объемом $4,8 \text{ м}^3$ в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием требуются уголки по длине всех ребер (12 ребер) и стекло на боковые стенки и пол. Цена уголков — одна условная единица (у.е.) за погонный метр, цена стекла — 4 у.е. за квадратный метр. Каковы должны быть размеры аквариума, чтобы расходы на материал были минимальными?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\log_{x^4}(6x^2 - 5x)^4 = 3 + \sqrt{\log_x^2(6x-5) - 5 \log_x\left(\frac{6x-5}{x}\right)}$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2 \ln x - x - 1$, образующей с осями координат равнобедренный прямоугольный треугольник.
3. Изобразите на комплексной плоскости все такие точки z_0 , что среди чисел z , удовлетворяющих уравнению $|zi - z_0| = \frac{3}{2}$, есть ровно одно число с модулем 2.
4. Найдите общие корни многочленов $x^4 - x^2 + 2x - 1$ и $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + 4$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \cos \frac{2x-y}{2} = \sin x, \\ \sin \frac{2x-y}{2} = 5 \cos x. \end{cases}$$
6. На изготовление открытого контейнера объемом 10 м^3 в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из боковых граней которого — квадрат, требуются уголки по длине всех ребер (12 ребер) и фанера на боковые стенки и пол. Цена уголков — одна условная единица (у.е.) за погонный метр, цена фанеры — 4 у.е. за квадратный метр. Каковы должны быть размеры контейнера, чтобы расходы на материал были минимальными?