Задания для классов с углубленным изучением математики, 1993 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x)=\cos 2x-\sin x$.

а) Докажите равенство $\dfrac{f(x)}{1-2\sin x}=1+\sin x$.

б) Решите уравнение $f(x)=\cos x$.

в) Найдите все решения неравенства $f(x)>1$ из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

г) Выясните, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=a$ имеет четыре корня на отрезке $[-\pi;0]$.

2. Дана функция $f(x)=\dfrac{\log_2\dfrac{x}{4}\cdot\log_2(4x)}{\log_2 2x}$.

а) Решите уравнение $f(x)=\dfrac{3\log_{0,25}x}{\log_{0,25}x-0,5}$.

б) Решите неравенство $f(x)<2,4$.

в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$ при $x\in(0,5;\,2]$.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Рассматриваются комплексные числа z, $z_1=\overline{z}+2i$ и $u=z\cdot z_1$.

а) Найдите все числа z такие, что $u=0$.

б) Изобразите на чертеже множество всех таких чисел z, что вещественная и мнимая части числа z_1 равны.

в) Изобразите на чертеже множество всех таких чисел z, что вещественная и мнимая части числа u равны.

г) Пусть $|z|=1$. Найдите наименьшее значение $|u|$.

3Б. Дана функция $f(x)=x^2-2|x-4|$.

а) Постройте график функции $f(x)$.

б) Найдите значение $\int\limits_3^5 f(x)dx$.

в) Напишите уравнение прямой l, касающейся графика функции $f(x)$ в двух различных точках.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямой l.

3В. Дана функция $f(x)=\sqrt{2x+6}-a\sqrt{x-2}$.

а) Решите неравенство $f(x)\ge 0$ при $a=1$.

б) Решите уравнение $f(x)=4$ при $a=1$.

в) Выясните, при каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y=f(x),\\ y=a\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-2}\end{cases}$ имеет решения.

г) Выясните, при каких значениях параметра a множество решений неравенства $f(x)\ge 0$ будет лучом.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1993 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x)=\cos x-\cos 2x$.

а) Докажите равенство $\dfrac{f(x)}{2\cos x+1}=1-\cos x$.

б) Решите уравнение $f(x)-\sin x=0$.

в) Найдите все решения неравенства $f(x)<1$ из отрезка $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

г) Выясните, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=a$ имеет четыре корня на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Дана функция $f(x)=\dfrac{\log_3\dfrac{x}{9}\cdot\log_3(9x)}{\log_3\dfrac{x}{3}}$.

а) Решите уравнение $f(x)=\dfrac{3\log_{\sqrt{3}}x}{\log_{\sqrt{3}}x-2}$.

б) Решите неравенство $f(x)>1{,}25$.

в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$ при $x\in\left[\dfrac{1}{3};3\right)$.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Рассматриваются комплексные числа z, $z_1=\bar{z}-2$ и $u=z\cdot z_1$.

а) Найдите все числа z такие, что $u=0$.

б) Изобразите на чертеже множество всех таких чисел z, что вещественная и мнимая части числа z_1 противоположны.

в) Изобразите на чертеже множество всех таких чисел z, что вещественная и мнимая части числа u равны.

г) Пусть $|z|=1$. Найдите наибольшее значение $|u|$.

3Б. Дана функция $f(x)=2|x-4|-(x+1)^2$.

а) Постройте график функции $f(x)$.

б) Найдите значение $\int\limits_2^4 f(x)dx$.

в) Напишите уравнение прямой l, касающейся графика функции $f(x)$ в двух различных точках.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямой l.

3В. Дана функция $f(x)=b\sqrt{x-3}-\sqrt{2x+4}$.

а) Решите неравенство $f(x)\le 0$ при $b=1$.

б) Решите уравнение $f(x)+4=0$ при $b=1$.

в) Выясните, при каких значениях параметра b система уравнений $\begin{cases} y=-f(x), \\ y=\sqrt{x-3}-b\sqrt{2x+4} \end{cases}$ имеет решения.

г) Выясните, при каких значениях параметра b неравенство $f(x)\ge 0$ не имеет решений.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1993 год

Ответы к варианту 1

Обязательные задачи

1. б) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ 2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) $\left(-\frac{\pi}{6};\ 0\right)\cup\left(\pi;\ \frac{7\pi}{6}\right)$; г) $1\le a<\frac{9}{8}$. **2.** а) $\{16\}$; б) $\left(0;\ \frac{1}{2\sqrt[5]{8}}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ 16\right)$; в) функция возрастает на $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$; г) $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right]$.

Сюжеты на выбор

3А. а) $\{0;\ 2i\}$; б) см. рисунок 1; в) см. рисунок 2; г) 1. **3Б.** а) см. рисунок 3; б) $\frac{92}{3}$; в) $y=8x-17$; г) $\frac{2}{3}$. **3В.** а) $[2;\ +\infty)$; б) $\{40+8\sqrt{22}\}$; в) $a=1$; г) $a\le\sqrt{2}$.

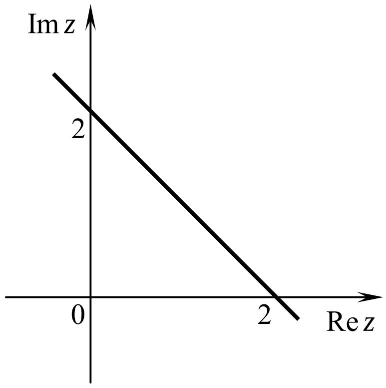

рис. 1

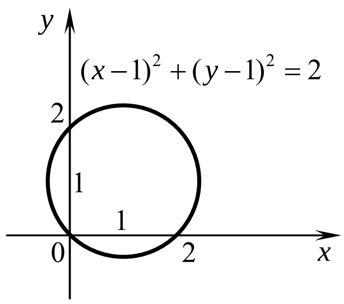

рис. 2

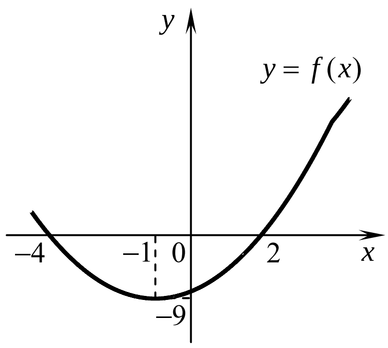

рис. 3

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1993 год

Ответы к варианту 2

Обязательные задачи

1. б) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}\right)$; г) $1\le a<\frac{9}{8}$. **2.** а) $\left\{\frac{1}{81}\right\}$; б) $\left(0;\ \frac{1}{27}\right)\cup(3;\ 3\sqrt[4]{27})$; в) функция убывает на $(0;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; г) $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right]$.

Сюжеты на выбор

3А. а) $\{0;\ 2\}$; б) см. рисунок 4; в) см. рисунок 5; г) 3. **3Б.** а) см. рисунок 6; б) $-\frac{92}{3}$; в) $y=-8x+9$; г) $\frac{2}{3}$. **3В.** а) $[3;\ +\infty)$; б) $\{41+8\sqrt{22}\}$; в) $b=-1$; г) $b\le\sqrt{2}$.

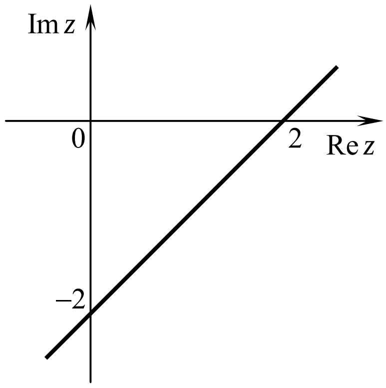

рис. 4

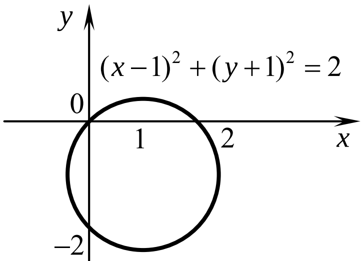

рис. 5

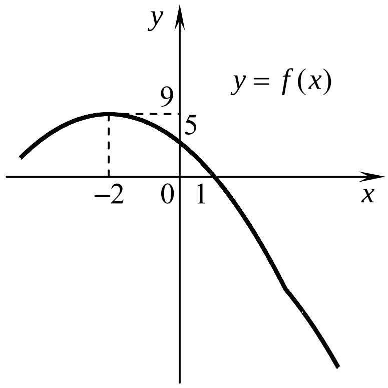

рис. 6