

5.011. Решите уравнение $2 \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$.

$$\begin{aligned} 2 \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0 &\Leftrightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) - 3 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(4 \cos x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, \\ x = -\arccos \frac{3}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ -\arccos \frac{3}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k; \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.012. Решите уравнение $2 \sin x + 3 \cos 2x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} 2 \sin x + 3 \cos 2x - 3 = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin x + 3(1 - 2 \sin^2 x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(3 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k, \\ x = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \pi k; \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k; \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.013. Решите уравнение $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

$$6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ — не решения

Пусть $\operatorname{tg} x = t$.

Решим уравнение

$$6t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2}, \\ t = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.014. Решите уравнение $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$.

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{tg}^2 x - 2 \text{tg} x - 3 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} - \\ \text{не решения} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg} x = -1 \\ \text{tg} x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \text{arctg} 3 + \pi k; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k; \text{arctg} 3 + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.015. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \sin x = 5, \\ 4y + 2 \sin x = 19. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y + \sin x = 5 \\ 4y + 2 \sin x = 19 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2 \sin x = -10 \\ 4y + 2 \sin x = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 9 \\ 4y + 2 \sin x = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{9}{2}, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{9}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{9}{2} \right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{9}{2} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.016. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3y + 2 \text{tg} x = 4, \\ 2y + 3 \text{tg} x = 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3y + 2 \text{tg} x = 4 \\ 2y + 3 \text{tg} x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 9y + 6 \text{tg} x = 12 \\ -4y - 6 \text{tg} x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 10 \\ 2y + 3 \text{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \text{tg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; 2 \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.017. Решите систему уравнений $\begin{cases} 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1, \\ 4y + \sqrt{3} \cos x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1 \\ 4y + \sqrt{3} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1 \\ -16y - 4\sqrt{3} \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1 \\ 12y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{1}{4}, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{1}{4} \right); \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{1}{4} \right); k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.018. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{3} \sin x - 8y = -1, \\ \sqrt{3} \sin x - 7y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2\sqrt{3} \sin x - 8y = -1 \\ \sqrt{3} \sin x - 7y = \frac{1}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} \sin x - 8y = -1 \\ 2\sqrt{3} \sin x - 14y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6y = -\frac{3}{2} \\ \sqrt{3} \sin x - 7y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{1}{4}, \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{1}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{1}{4} \right); \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{1}{4} \right); k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.019. Решите неравенство $\cos x < x^2 + 1$.

Поскольку $\cos x \leq 1$, а $x^2 + 1 \geq 1$ при всех x , неравенство верно для всех x кроме чисел — решений системы

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5.020. Решите неравенство $\cos x \leq 1 + |x|$.

Поскольку $\cos x \leq 1$, а $1 + |x| \geq 1$ при всех x , неравенство верно для всех x .

Ответ: \mathbb{R} .