221. Может ли при каком-нибудь значении параметра a уравнение $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1$ иметь три корня?

$$2x^6 - x^4 - ax^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^6 - x^4 - ax^2 - 1 = 0.$$

Пусть $f(x) = 2x^6 - x^4 - ax^2 - 1$.

Функция $f(x)$ четная, ее график симметричен относительно оси ординат, она имеет нечетное число нулей, только если $f(0) = 0$, что неверно.

Ответ: нет.

222. Может ли при каком-нибудь значении параметра a уравнение $2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$ иметь пять корней?

$$2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 - 5 = 0.$$

Пусть $f(x) = 2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 - 5$.

Функция $f(x)$ четная, ее график симметричен относительно оси ординат, она имеет нечетное число нулей, только если $f(0) = 0$, что неверно.

Ответ: нет.

223. Докажите, что уравнение $3^x + 3^{-x} = ax^4 + 2x^2 + 2$ имеет нечетное число корней.

$$3^x + 3^{-x} = ax^4 + 2x^2 + 2 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} - ax^4 - 2x^2 - 2 = 0.$$

Пусть $f(x) = 3^x + 3^{-x} - ax^4 - 2x^2 - 2$.

Функция $f(x)$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат, она имеет нечетное число нулей, только если $f(0) = 0$, что верно.

Что и требовалось доказать.

224. Доказать, что уравнение $4^x - 4^{-x} = x^3 + 2ax$ имеет нечетное количество корней.

$$4^x - 4^{-x} = x^3 + 2ax \Leftrightarrow 4^x - 4^{-x} - x^3 - 2ax = 0.$$

Пусть $f(x) = 4^x - 4^{-x} - x^3 - 2ax$.

Функция $f(x)$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат, она имеет нечетное число нулей, только если $f(0) = 0$, что верно.

Что и требовалось доказать.

225. Найти, при каких значениях параметра a уравнение $\log_3(9^x + 3a^2) = x$ иметь ровно два корня.

$$\log_3(9^x + 3a^2) = x \Leftrightarrow 9^x + 3a^2 = 3^x \Leftrightarrow 9^x - 3^x + 3a^2 = 0.$$

Пусть $3^x = t$.

Последнее уравнение, а вместе с ним и исходное имеет два корня в том случае, когда уравнение $t^2 - t + 9a^3 = 0$ имеет два положительных корня.

$$\begin{cases} D > 0 \text{ (уравнение имеет два различных корня)} \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \text{ (корни уравнеия одного знака)} \\ t_1 + t_2 > 0 \text{ (сумма корней положительна)} \end{cases}.$$

Решим систему

$$\begin{cases} 1 - 36a^2 > 0 \\ 9a^3 > 0 \\ 1 > 0 - \text{верно} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 < \dfrac{1}{36} \\ a > 0 \end{cases}.$$

Ответ: при $a \in \left(0; \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$.

226. Найти, при каких значениях параметра a уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет единственный корень.

$$\log_2(4^x - a) = x \Leftrightarrow 4^x - a = 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - a = 0.$$

Пусть $2^x = t$.

Последнее уравнение, а вместе с ним и исходное имеет единственное решение в одном из двух случае:

1. $t^2 - t - a = 0$ имеет единственный корень, и этот корень положителен:

$$\begin{cases} D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases}.$$

Решим систему

$$\begin{cases} 1 + 4a > 0 \\ -a > 0 \\ \dfrac{1}{2} > 0 - \text{верно} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\dfrac{1}{4} \\ a < 0 \end{cases}.$$

2. Уравнение $t^2 - t - a = 0$ имеет два различных корня, из которых один положителен, а другой отрицателен:

$t_1 \cdot t_2 > 0$ (условие $D > 0$ выполнено автоматически).

Решим неравенство

$$-a < 0 \Leftrightarrow a > 0.$$

Ответ: при $a = -\dfrac{1}{4}$.

227. Найдите, при каком значении параметра a уравнение $\log_2(4^x + a^3) + x = 0$ имеет ровно два корня.

При любом значении параметра a левая часть уравнения возрастающая на своей области определения функция (как сумма двух возрастающих функций). Возрастающая функция не может принимать значение 0 в двух различных точках поэтому искомых значений параметра a не существует.

Ответ: нет.

228. Найти, при каких значениях a уравнение $x - \log_3(2a - 9^x) = 0$ не имеет корней.

$$x - \log_3(2a - 9^x) = 0 \Leftrightarrow \log_3(2a - 9^x) = x \Leftrightarrow 2a - 9^x = 3^x \Leftrightarrow 9^x + 3^x - 2a = 0.$$

Пусть $3^x = t$.

Решим уравнение

$$t^2 + t - 2a = 0.$$

Последнее уравнение, а вместе с ним и исходное не имеет корней в одном из следующих двух случаев:

1. $t^2 + t - 2a = 0$ не имеет корней:

$$D < 0.$$

Решим неравенство

$$1 + 4a < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{4}.$$

2. Уравнение $t^2 + t - 2a = 0$ имеет только неположительные решения:

$$\begin{cases} D < 0 \\ t_1 \cdot t_2 \le 0 \\ t_1 + t_2 \le 0 \end{cases}.$$

Решим систему

$$\begin{cases} 1 + 4a < 0 \\ -2 \le 0 - \text{выполнено} \\ -\dfrac{1}{2a} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\dfrac{1}{4} \\ a > 0 \end{cases}.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0)$.

229. Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения $|x-1| = ax+2$.

$$|x-1| = ax+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ x-1 = ax+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1 \\ 1-x = ax+2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ (a-1)x = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1 \\ (a+1)x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ x = -\dfrac{3}{a-1} \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1 \\ x = -\dfrac{1}{a+1} \end{cases} \end{array}\right.$$

Заметим, что при a равных 1 и –1 только одно из линейных уравнений имеет решение. При прочих a разделим на коэффициенты перед x.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\dfrac{3}{a-1} \ge 1 \\ x = -\dfrac{3}{a-1} \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{a+1} \le 1 \\ x = -\dfrac{1}{a+1} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{a+2}{a-1} \le 0 \\ x = -\dfrac{3}{a-1} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{a+2}{a+1} \ge 0 \\ x = -\dfrac{1}{a+1} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2 \le a < 1 \\ x = \dfrac{3}{1-a} \end{cases} \\ \begin{cases} a \le -2 \text{ или } a > -1 \\ x = -\dfrac{1}{a+1} \end{cases} \end{array}\right.$$

Теперь ясно, что при $a \in (-2;\ -1)$ уравнение не имеет решений, при $a \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$ уравнение имеет единственное решение, при $a \in (-1;\ 1)$ уравнение имеет два решения.

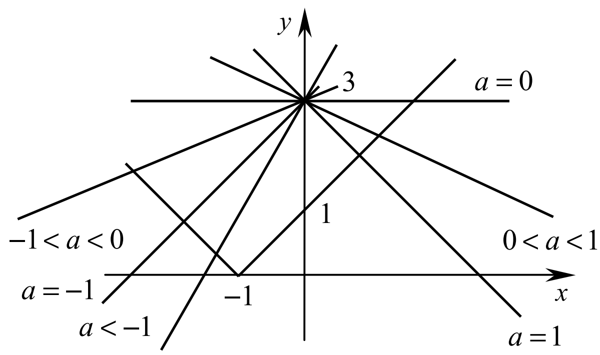
Ответ: нет решений при $a \in (-2;\ -1)$,

одно решение при $a \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$,

два решения при $a \in (-1;\ 1)$.

230. Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения $|x+1| = 3-ax$.

Решим графически:



Ответ: при $-1 < a < 1$ — 2 решения, при $a \le -1$; $a \ge 1$ — 1 решение.