

**Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)**

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 1

1. Упростите выражение (при $p > q$)

$$\left(\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} + \frac{2q^2 - 2pq}{p + q} \right) \cdot \left(\frac{2pq}{p^2 - q^2} - \left(\frac{q - p}{q} \right)^{-1} + \frac{q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} \right).$$

2. Найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}$.
3. Решите уравнение $\log_3(x - 2) = 1 - \log_3 x$.
4. Антикварный магазин купил два предмета за 22500 руб., затем продал их, получив 40% прибыли. Сколько заплатил магазин за каждый предмет, если на первом было получено 25% прибыли, а на втором 50%?
5. Решите уравнение $6 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 2x - 5 = 0$.
6. Решите уравнение $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 6} = 2$.
7. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \log_3(3x - y) - 2 \log_3(y - 3) = -1, \\ \frac{1}{8} \cdot 2^{2x+1} = 4^y. \end{cases}$$
8. Решите неравенство $|2x - |x - 2|| \leq 4$.
9. Решите неравенство $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.
10. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - |x| + a = 0$ имеет ровно два решения.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 2

1. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{5}{x} - 2e^{x-1} + x^2 \cdot \ln x$ и ее производную в точке $x=1$.

2. Упростите выражение $\left(\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{\frac{2}{x^3} - x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} \cdot (x-1)} \right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{x^3} + 1}{x^{\frac{2}{3}}} \right)^{-1}$.

3. Решите уравнение $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$.

4. В треугольнике ABC : $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 6$. Площадь треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите BC .

5. К 1 л p -процентного раствора некоторого вещества добавили 0,5 л q -процентного раствора того же вещества. Какова концентрация полученного раствора?

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{5}{3} \cdot \frac{y}{x} = \frac{16}{3}, \\ x - y = 6. \end{cases}$$

7. При каком значении параметра a длина промежутка, являющегося областью решений неравенства $x^2 - 4 \leq a$, равна 6?

8. Решите уравнение $2|\sin x| \cdot \cos(2\pi - x) = \cos^2\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$.

9. Решите неравенство $|x+1|^{x^2-2x-3} > 1$.

10. Решите уравнение $x^2 \cdot \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \cdot \log_{\frac{1}{6}}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 3

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x+3}{4-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$ и угол между этой касательной и осью абсцисс.
2. Упростите выражение $\left(\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{1}{a^2 - b\sqrt{ab}} \right)^{-1} \right)^{-1}$.
3. Решите уравнение $\sin x + \cos 4x = \cos 2x$.
4. Три числа, третьим из которых является 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получим арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.
5. Два бассейна наполняются водой. В одном из них уже имеется 200 м^3 воды, а в другом — 112 м^3 . Через сколько часов количество воды в бассейнах станет одинаковым, если во второй бассейн в час вливается на 22 м^3 воды больше, чем в первый?
6. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите катеты.
7. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{\lg(6-4x-x^2)}}{\sin 2x}$.
8. Решите уравнение $\sqrt{|x^2 - 3x + 2|} = 2x + 1$.
9. Решите неравенство $\frac{4 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} + 1}{\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)^2} > 0$.
10. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 4

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ на отрезке $[0; 3]$.

2. Упростите выражение $\left((a-b) \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{\frac{1}{2}} + (b^{-1} - a^{-1})ab \right) \cdot (a-b) \cdot \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 1 \right)$.

3. Решите уравнение $\lg 5^{\frac{(2x-8)x}{5}} = \lg 25$.

4. В лесу жили 1200 волков и зайцев. За год волки съели 60% зайцев, а охотники убили 20% волков. В результате в лесу осталось 560 животных. Сколько в лесу было волков?

5. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-2} + 2\sqrt[3]{(x-2)^2} = 3$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^y = 9, \\ (324)^y = 2x^2. \end{cases}$

7. Найдите, при каком значении параметра a система $\begin{cases} 2x + (a-1)y = 3, \\ (a+1)x + 4y = -3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

8. Решите неравенство $\sqrt{1-2x} \geq 1+x$.

9. Решите неравенство $|\sin x + \cos x| < 1$.

10. Решите неравенство $x^{\lg^2 x - 3 \lg x + 1} > 1000$.

**Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)**

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 5

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 8$, параллельной оси абсцисс.
2. Упростите выражение $\left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 + 2(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$.
3. Решите уравнение $3^{\sqrt{x+1}} - 2 \cdot 5^{\sqrt{x-2}} = 5^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$.
4. Турист преодолел расстояние между двумя городами за три дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй день — $\frac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км и в третий день он проехал $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найдите расстояние между городами.
5. Через точку внутри данного треугольника проведены прямые, параллельные его сторонам. Площади трех образовавшихся треугольников равны соответственно S_1 , S_2 , S_3 . Найдите площадь данного треугольника.
6. Решите неравенство $\frac{x}{x-1} + \frac{x+3}{x+2} > 2$.
7. Решите уравнение $\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} - 3\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = 2$.
8. Найдите наибольшее значение параметра q , при котором уравнение $2\log_2(2x+3) = \log_2(qx)$ имеет единственный корень.
9. Решите уравнение $\sin 2x \cdot \sin 6x \cdot \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 12x = 0$.
10. Решите неравенство $\log_2(9-4^x) + 2x > 3$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 6

1. Второй член арифметической прогрессии составляет 88% от первого члена. Сколько процентов от первого составляет пятый член этой прогрессии?
2. Упростите выражение $\left(\frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} \right)^{-1} \right) \cdot (xy)^{-\frac{1}{2}}$.
3. Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\sin(\pi - x) = 0$.
4. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 см. Вычислите радиус описанной окружности.
5. Жидкость поступает в сосуд через три крана. Заполнение сосуда только через второй кран требует 0,75 времени, за которое сосуд может наполниться через один первый кран. Наполнение сосуда только через третий кран требует времени на 10 мин больше, чем через один второй кран. Если одновременно открыть все три крана, то сосуд заполнится за 6 мин. За какое время наполняет сосуд каждый кран в отдельности?
6. Решите уравнение $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x+3}} = 2$.
7. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + x + y = -1, \\ x^2 y + xy^2 = -2. \end{cases}$
8. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + |5x + 3| \leq 7$.
9. Найдите наибольшее значение x , удовлетворяющее неравенству $x^2 + 7x + 11 \leq -1 \leq \frac{1}{x}$.
10. Определите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{3\log_6^2 x + a} - \log_6 x = 0$ имеет решение, и найдите это решение.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 7

1. Найдите первообразную функции $f(x) = 3 \cos \frac{x}{4} - 2e^{x-\frac{1}{2}}$, график которой проходит через начало координат.

2. Упростите выражение $\frac{(z\sqrt{2} + 1)^2 - \frac{4z}{\sqrt{2}}}{(\sqrt[4]{z} - 1)^2 (z^{\frac{1}{4}} + 1)^2 + 2(\sqrt[4]{z} - 1)(z^{\frac{2}{8}} + 1) + 1} - \frac{z^{-\frac{3}{2}}}{z^{-\frac{1}{2}}}$.

3. Решите уравнение $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$.
4. Решите уравнение $\cos^3 x - \cos x = \sin 2x$.
5. На уборке снега работают две машины. Первая может убрать всю улицу за 1 ч, вторая — за 0,75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали 20 мин, после чего первая машина прекратила работу. Сколько еще нужно времени, чтобы вторая машина закончила работу?
6. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла равна l , другой острый угол равен α . Найдите катеты.
7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$
8. Найдите решения неравенства $x^2 - (a+1)x + a \geq 0$ в зависимости от значения параметра a .
9. Найдите наименьшее значение x , удовлетворяющее неравенству

$$\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2 - 13}.$$

10. Решите неравенство $\lg(10x^2 - 90) - \frac{3}{2}(\log_{x^2-6x+9} 10)^{-1} \leq 1$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 8

1. Число увеличено на 25%. На сколько процентов надо уменьшить новое число, чтобы вновь получить исходное число?

2. Упростите выражение $\left(\frac{1}{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right) \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}$.

3. Решите уравнение $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{2-x} = 11$.

4. Решите уравнение $\sin^2 2x + 8 \cos^2 x = 0$.

5. Два печника могут сложить печь за 12 ч. Если первый печник будет работать 2 ч, а второй — 3 ч, то они выполнят 20% всей работы. За сколько часов может сложить печь каждый печник, работая отдельно?

6. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 6 см. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая BC в точке D так, что $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$. Найдите длину стороны AC .

7. Решите неравенство $5^{x^3-4x-2} < 0,04$.

8. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 8x + 15} \geq x + 2$.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 7, \\ 3x^2 + 8y^2 = 14. \end{cases}$

10. Пусть x_1 и x_2 — различные корни уравнения $3x^2 + 2x + a - 1 = 0$. Найдите все значения параметра a , при которых выполнено неравенство $-1 \leq x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 \cdot x_2 \leq 2$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 9

1. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от первого числа отнять единицу, а от третьего отнять 19, то новая тройка чисел составляет арифметическую прогрессию. Найдите первоначальные числа.
2. Упростите выражение $\left(\frac{1-a^{-2}}{a^2+a^{-2}} - \frac{a-a^{-2}}{a^2-a^{-2}} \right)^2 - \frac{(a^2+2)^2}{a^3}$.
3. Решите уравнение $\lg(x+1) - \frac{1}{2}\lg(5x-1) = \frac{1}{2}\lg x$.
4. Длина садового участка на 10 м больше его ширины. Его площадь решили увеличить на 400 м². Для этого его длину увеличили на 10 м, а ширину — на 2 м. Найдите площадь нового участка.
5. В равнобедренной трапеции задана диагональ, равная a , и угол между диагональю и основанием, равный α . Найдите площадь трапеции.
6. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 7^y \cdot \log_5 x = -14, \\ 7^y + \log_5 x = 5. \end{cases}$
8. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq \frac{2|x+3|}{x+3}$.
9. Найдите все значения параметра a так, чтобы один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$ был квадратом другого.
10. Решите неравенство $\frac{(2x-1)(3-x)}{\log_5 |x-1|} > 0$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 10

1. Смешанную периодическую дробь $0,3(7)$ обратите в обыкновенную, используя понятие прогрессии.

2. Упростите выражение $\left(\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot (a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}})^{-1}$.

3. Решите уравнение $4^{\frac{1}{x-1}} - 2^{\frac{1}{x-2}} - 3 = 0$.

4. Периметр треугольника равен 4,5 см, а биссектриса делит сторону на отрезки, равные 9 и 6 мм. Найдите стороны треугольника.

5. Расстояние от пункта A до пункта B по течению реки катер проходит в 1,5 раза медленнее, чем теплоход, причем за каждый час катер отстаёт от теплохода на 8 км. Путь от пункта B до пункта A против течения реки теплоход проходит в 2 раза быстрее катера. Найдите скорости катера и теплохода в стоячей воде.

6. Решите уравнение $\sin 2x + \sin x = \cos x - \cos 2x$.

7. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \leq 0$.

8. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 1$.

9. При каких значениях параметра k неравенство $x^2 + 2kx + |2k + 3| > 0$ верно для всех x ?

10. Найдите область определения функции $y = \sqrt{2 \sin x - \sqrt{2}} + \log_3(\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + 2)$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Дополнительные задания для самостоятельного решения

Билет 1

1. Постройте график функции $y = x^{\lfloor \log_2 x \rfloor}$.

2. При каких a, b, c совместна система уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0, \\ bx^2 + cx + a = 0, \\ cx^2 + ax + b = 0? \end{cases}$$

3. AD и BC — основания трапеции $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

4. Пусть x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$) — корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$. Каковы корни уравнения

$$bx^2 + a(b+1)x + (b-1)^2 + a^2 = 0?$$

5. Докажите, что если $2a + 3b + 6c = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корень на промежутке $(0; 1)$.

6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sin x + \cos x = \sin a + \cos a$ не имеет решений на промежутке $(0; \pi)$.

7. Решите уравнение $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0$.

8. При каких значениях параметра p уравнение $p \cdot 2^x + 2^{-x} = p + 1$ имеет единственное решение?

9. Пусть x_1 и x_2 — различные корни уравнения $x^2 - 4x + |a - 5| = 0$. Найдите, при каких значениях параметра a выполняется неравенство $x_1(x_2^2 + x_1 \cdot x_2) > 8$.

10. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{4 - x^2} = |x| + a$ в зависимости от значения параметра a ?

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Билет 2

1. Дана функция $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$. Найдите, при каких значениях a и b $f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144, \\ x^2 + 4x + 5y = 24. \end{cases}$
3. Решите уравнение $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1)$.
4. Найдите сумму четвертых степеней корней уравнения $3x^2 - x - 3 = 0$.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x^2 - \sin y = 1, \\ x^2 + |y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$
6. Решите уравнение $\sin \frac{1992\pi^2}{x} = \frac{1}{\cos x}$.
7. Докажите, что $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.
8. При каком значении параметра a уравнение $x^{100} - a|x| + a^2 - a = 0$ имеет единственное решение?
9. Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ |x| = y - a? \end{cases}$
10. Докажите, что при любых значениях параметра a уравнение

$$(a^3 - 2a^2 + 7a)x^2 - (a^3 + 4a^2 + 9a + 6)x + 5a^2 + 4 = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

11. Найдите все значения параметра $a > 0$, при которых корни уравнения $a^2x^2 - ax + 1 - 7a^2 = 0$ будут целыми.
12. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{a} \cos x - \sin x = \sqrt{2-a}$ имеет решение.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)
типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 1

1. Ответ: $p - q$.
2. Ответ: функция возрастает на: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, убывает — на $(-1; 0) \cup (0; 1)$, $x = 1$ — точка минимума, $x = -1$ — точка максимума, $f(-1) = -\frac{4}{3}$, $f(1) = \frac{4}{3}$.
3. Ответ: $\{3\}$.
4. Ответ: 9000 и 13500 руб.
5. Ответ: $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
6. Ответ: $\{7\}$.
7. Ответ: $\{(13; 12)\}$.
8. Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$.
9. Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$.
10. Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 2

1. Ответ: $D(f) = (0; +\infty)$, $D'(1) = -6$.
2. Ответ: $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}} - 1}$.
3. Ответ: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.
4. Ответ: длина стороны BC равна 4.
5. Ответ: $\frac{2p+q}{3}$ %.
6. Ответ: $\left\{ \left(\frac{15}{2}; \frac{3}{2} \right); (-3; -9) \right\}$.
7. Ответ: $a = 5$.
8. Ответ: $\{ \pi k; 2\pi k - \operatorname{arctg} 2; \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \}$.
9. Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.
10. Ответ: $\left\{ -\frac{13}{5}; -2; 3 \right\}$.

**Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)**
типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 3

1. Ответ: $y = \frac{7}{4}x - 1$, $\angle\varphi = \operatorname{arctg} \frac{7}{4}$.
2. Ответ: $\frac{1}{a-b}$.
3. Ответ: $\left\{ \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: две геометрические: 3, 6, 12; 27, 18, 12 и две арифметические: 3, 6, 9; 27, 18, 9.
5. Ответ: 4 часа.
6. Ответ: катеты равны: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и $\frac{3}{2}$ см.
7. Ответ: $\left[-5; -\frac{3\pi}{2} \right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi \right) \cup \left(-\pi; -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right) \cup (0; 1]$.
8. Ответ: $\left\{ \frac{-7 + \sqrt{61}}{6} \right\}$.
9. Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \right)$.
10. Ответ: (4; 10).

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 4

1. Ответ: наибольшее значение: $f(3) = 9$, наименьшее — $f(0) = 0$.
2. Ответ: $2b(a - b)$.
3. Ответ: $\{-1; 5\}$.
4. Ответ: 200 волков.
5. Ответ: 4 часа.
6. Ответ: $\{(3; 2)\}$.
7. Ответ: $a = -3$.
8. Ответ: $(-\infty; 0]$.
9. Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k \right)$.
10. Ответ: $(1000; +\infty)$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 5

1. Ответ: $y = -3$, $y = -35$.
2. Ответ: $\frac{2}{1-x^4}$.
3. Ответ: $\{9\}$.
4. Ответ: 400 км.
5. Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.
6. Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.
7. Ответ: $\left\{-\frac{11}{8}\right\}$.
8. Ответ: $q = 24$.
9. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
10. Ответ: $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)
типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 6

1. Ответ: 52%.
2. Ответ: 1.
3. Ответ: $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: радиус описанной окружности равен 2,5 см.
5. Ответ: $\frac{53}{6}$, 14, 24 мин.
6. Ответ: {1}.
7. Ответ: $\{(-1; -1); (-1; 2); (2; -1)\}$.
8. Ответ: $\left[-2; \frac{1}{3}\right]$.
9. Ответ: $x = -3$.
10. Ответ: $a \leq 0$, $\{6^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\}$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)
типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 7

1. Ответ: $F(x) = 12 \sin \frac{x}{4} - 2e^{x-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{e}}$.
2. Ответ: $2z$.
3. Ответ: $\{0\}$.
4. Ответ: $\left\{ \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: 10 мин.
6. Ответ: катеты равны: $l \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$ и $l \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.
7. Ответ: $\{(27; 1); (-1; -27)\}$.
8. Ответ: при $a < 1$: $(-\infty; a] \cup [1; +\infty)$, при $a > 1$: $(-\infty; 1] \cup [a; +\infty)$, при $a = 1$: \mathbb{R} .
9. Ответ: $x = 4$.
10. Ответ: $(-\infty; -3) \cup [6; +\infty)$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 8

1. Ответ: На 20%.
2. Ответ: 1.
3. Ответ: $\left\{ \log_2 \frac{3}{2}; 2 \right\}$.
4. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: 20 и 30 часов.
6. Ответ: длина стороны AC равна $2\sqrt{6}$ см.
7. Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$.
8. Ответ: $\left(-\infty; \frac{11}{12} \right]$.
9. Ответ: $\left\{ \left(0; -\frac{\sqrt{7}}{2} \right); \left(0; \frac{\sqrt{7}}{2} \right); \left(-\frac{\sqrt{70}}{5}; -\frac{\sqrt{70}}{10} \right); \left(\frac{\sqrt{70}}{5}; \frac{\sqrt{70}}{10} \right) \right\}$.
10. Ответ: $a \in \left[-\frac{10}{3}; \frac{4}{3} \right)$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 9

1. Ответ: 5, 15, 45.
2. Ответ: 0.
3. Ответ: $\{1\}$.
4. Ответ: площадь участка равна 1600 м^2 .
5. Ответ: $\frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$.
6. Ответ: $\left\{ \frac{\pi k}{2}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
7. Ответ: $\left\{ \left(\frac{1}{25}; 1 \right) \right\}$.
8. Ответ: $[0; 1] \cup [4; 5]$.
9. Ответ: $a = -\frac{125}{8}$, $a = \frac{27}{8}$.
10. Ответ: $\left(0; \frac{1}{2} \right) \cup (2; 3)$.

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)
типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 10

1. Ответ: $\frac{17}{45}$.
2. Ответ: $\frac{b}{\sqrt{a}}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
4. Ответ: 1,2 см, 1,8 см, 1,5 см.
5. Ответ: 12 км/ч, 20 км/ч.
6. Ответ: $\left\{\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
7. Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.
8. Ответ: $\left\{-\frac{7}{2}; 2\right\}$.
9. Ответ: $k \in (-1; 3)$.
10. Ответ: $\left(2; \frac{3\pi}{4}\right]$.

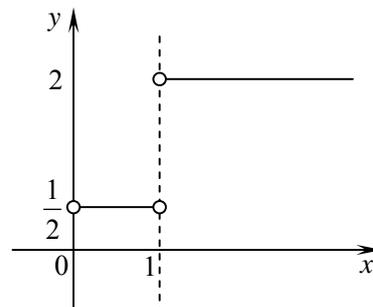
Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Дополнительные задания для самостоятельного решения

Ответы к билету 1

1. Ответ: см. рисунок.
2. Ответ: система совместна тогда и только тогда, когда $a + b + c = 0$.
3. Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.
4. Ответ: $x_1 + \frac{1}{x_1}, x_2 + \frac{1}{x_2}$.
6. Ответ: $a \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right)$.
7. Ответ: $\left\{ \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}; \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \right\}$.
8. Ответ: $p \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$.
9. Ответ: $a \in (1; 3) \cup (7; 9)$.
10. Ответ: при $a < -2$ или $a > 2$: решений нет, при $a = 2$: $\{0\}$, при $a \in [-2; 2)$: два решения.



Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)

типовые задания олимпиад 2004 и последующие года

Ответы к билету 2

1. Ответ: $b = -a$, $a \in (-1; 1)$.
2. Ответ: $\left\{ \left(-4; \frac{24}{5} \right); \left(3; \frac{3}{5} \right) \right\}$.
3. Ответ: $\left\{ -1; -\frac{1}{2}; 2; 4 \right\}$.
4. Ответ: $\frac{199}{81}$.
5. Ответ: $\left\{ \left(-\sqrt{\frac{\pi}{6}}; -\frac{\pi}{6} \right); \left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}; -\frac{\pi}{6} \right) \right\}$.
6. Ответ: $\{16\pi m : m \in \{-83; -3; 1; 249\}\}$.
8. Ответ: $a = 0$.
9. Ответ: при $a < -3\sqrt{2}$ и $a > 3$: решений нет, при $a = 3$: одно решение,
при $|a| < 3$: два решения, при $a = -3$: три решения.
11. Ответ: $a \in \left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1 \right\}$.
12. Ответ: $a \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$.