Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
математико-механический факультет

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-a}(a^2+(a+1)x-x^2)=2$ имеет единственное решение.
2. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x}}=1+x$.
3. Решите неравенство $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(3-2x)>\dfrac{\pi}{4}$.
4. К окружности проведены три различные касательные AB, BC и AC. Расстояние от точки A до прямой BC равно 1, расстояние от точки касания прямой BC с окружностью до проекции точки A на эту прямую равно $\sqrt{5}$, $BC=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Найдите радиус окружности.
5. В прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписана сфера. Известно, что $AB=15$, $BC=7$ и $AC=20$. Найдите радиус сечения сферы плоскостью A_1BC.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\log_{x+b}(b^2+4x)=2$ имеет единственное решение.
2. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x}}=1-x$.
3. Решите неравенство $\operatorname{arctg}(x+1)+\operatorname{arctg}(1-3x)>\dfrac{\pi}{4}$.
4. К окружности проведены три различные касательные AB, BC и AC. Расстояние от точки A до прямой BC равно 3, расстояние от точки касания прямой BC с окружностью до проекции точки A на эту прямую равно $\sqrt{10}$, $BC=2$. Найдите радиус окружности.
5. В прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписана сфера. Известно, что $AB=13$, $BC=15$ и $AC=4$. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости AB_1C.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
филологический факультет
(лингвистика, прикладная информатика (в области искусств и гуманитарных наук))

Вариант 1

1. По двум взаимно перпендикулярным дорогам в сторону перекрестка выехали два велосипедиста. Расстояние между ними в этот момент было 13 км. Затем в течение получаса расстояние между велосипедистами уменьшалось, а потом стало увеличиваться. Скорость одного из велосипедистов равна 18 км/ч. Найдите скорость другого, если известно, что в момент старта он находился на расстоянии 12 км от перекрестка.
2. Решите неравенство $\log_{3x}\log_{4x^2}8x \ge 0$.
3. Решите уравнение $(2\cos x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}=\sin 2x$.
4. Прямая l является внешней касательной к двум окружностям. Радиус одной из них равен 3. Расстояние между точками касания равно 6, а расстояние между центрами окружностей равно $3\sqrt{13}$. Найдите радиус окружности, касающейся прямой l и каждой из двух данных окружностей.
5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2-x+1=|x^2-x+2y|$.

Вариант 2

1. По двум взаимно перпендикулярным дорогам в сторону перекрестка выехали велосипедист и мотоциклист. Расстояние между ними в этот момент было 60 км. Затем в течение часа расстояние между ними уменьшалось, а потом стало увеличиваться. Скорость велосипедиста равна 18 км/ч. Найдите скорость мотоциклиста, если известно, что в момент старта он находился на расстоянии 48 км от перекрестка.
2. Решите неравенство $\log_{2x}\log_{9x}3x^2 \ge 0$.
3. Решите уравнение $(2\sin x+1)\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{2}}=\sin 2x$.
4. Прямая l является внешней касательной к двум окружностям. Радиус одной из них равен 4. Расстояние между точками касания равно 10, а расстояние между центрами окружностей равно $5\sqrt{5}$. Найдите радиус окружности, касающейся прямой l и каждой из двух данных окружностей.
5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2-y=|y^2+y-2x|$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
экономический факультет
(прикладная информатика (в экономике),
математические методы в экономике)

Вариант 1

1. Девочки делили конфеты, а мальчики — пряники. Первая девочка взяла x конфет и $\frac{1}{5}$ остатка, вторая взяла $2x$ конфет и $\frac{1}{5}$ нового остатка, третья взяла $3x$ конфет и $\frac{1}{5}$ нового остатка, и т. д. Первый мальчик взял y пряников и $\frac{1}{9}$ остатка, второй взял $2y$ пряников и $\frac{1}{9}$ нового остатка, и т. д. Когда последние девочка и мальчик взяли свои доли по тому же правилу, оказалось, что все конфеты разделены поровну и все пряники тоже разделены поровну. Во сколько раз пряников было больше, чем конфет, если известно, что $x : y = 2 : 3$?
2. Решите неравенство $2\sqrt{x+1} \le x + 1 - \frac{3}{x}$.
3. Решите уравнение $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x^2 - x - 1) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Прямая, перпендикулярная *AB*, разбивает параллелограмм *ABCD* на две фигуры, площадь одной из которых в два раза больше площади другой. Расстояние от самой удаленной вершины параллелограмма до прямой равно 11. Найдите площади обеих фигур, если известно, что $AB = 6$ и $BC = 13$.
5. Найдите наибольшее возможное значение произведения $x \cdot y$, если x и y удовлетворяют неравенству $3|x| + 7|y| \le 10$.

Вариант 2

1. Белки делили орехи, а ежи — грибы. Первая белка взяла x орехов и $\frac{1}{7}$ остатка, вторая взяла $2x$ орехов и $\frac{1}{7}$ нового остатка, третья взяла $3x$ орехов и $\frac{1}{7}$ нового остатка, и т. д. Первый еж взял y грибов и $\frac{1}{13}$ остатка, второй взял $2y$ грибов и $\frac{1}{13}$ нового остатка, и т. д. Когда последние белка и еж взяли свои доли по тому же правилу, оказалось, что все орехи разделены поровну и все грибы тоже разделены поровну. Найдите отношение $x : y$, если исходное количество орехов и грибов было равным?
2. Решите неравенство $2\sqrt{x+2} \ge x + 1 + \frac{1}{x}$.
3. Решите уравнение $\operatorname{arctg}(x^2 - x) + \operatorname{arctg}(x - 1) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Прямая, перпендикулярная *AB*, разбивает параллелограмм *ABCD* на две фигуры, отношение площадей которых равно $\frac{3}{5}$. Расстояние от самой удаленной вершины параллелограмма до прямой равно 7. Найдите площади обеих фигур, если известно, что $AB = 4$ и $BC = 10$.
5. Найдите наибольшее возможное значение произведения $x \cdot y$, если x и y удовлетворяют неравенству $5|x| + 3|y| \le 8$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
экономический факультет
(экономическая теория, мировая экономика,
экономика и управление на предприятии, менеджмент организации,
бухгалтерский учет, анализ и аудит, финансы и кредит, экономика)

Вариант 1

1. Мальчики делили пряники. Первый мальчик взял x пряников и $\frac{1}{16}$ остатка, второй взял $2x$ пряников и $\frac{1}{16}$ нового остатка, третий взял $3x$ пряников и $\frac{1}{16}$ нового остатка, и т. д. Когда последний мальчик взял свою долю по тому же правилу, оказалось, что все пряники разделены поровну. Сколько было мальчиков?
2. Решите уравнение $2\sqrt{x+1} = x+1-\frac{3}{x}$.
3. Решите уравнение $\sin x - \sin 3x = (\sin x + \cos x)^3$.
4. Прямая, перпендикулярная *AB*, разбивает параллелограмм *ABCD* на две фигуры, площадь одной из которых в два раза больше площади другой. Расстояние от самой удаленной вершины параллелограмма до прямой равно 11. Найдите площади обеих фигур, если известно, что $AB = 6$ и $BC = 13$.
5. Найдите наибольшее возможное значение произведения $x \cdot y$, если x и y удовлетворяют равенству $3|x| + 7|y| = 10$.

Вариант 2

1. Ежи делили грибы. Первый еж взял x грибов и $\frac{1}{17}$ остатка, второй взял $2x$ грибов и $\frac{1}{17}$ нового остатка, третий взял $3x$ грибов и $\frac{1}{17}$ нового остатка, и т. д. Когда последний еж взял свою долю по тому же правилу, оказалось, что все грибы разделены поровну. Сколько было ежей?
2. Решите уравнение $2\sqrt{x+2} = x+1+\frac{1}{x}$.
3. Решите уравнение $\cos x + \cos 3x = (\sin x + \cos x)^3$.
4. Прямая, перпендикулярная *AB*, разбивает параллелограмм *ABCD* на две фигуры, отношение площадей которых равно $\frac{3}{5}$. Расстояние от самой удаленной вершины параллелограмма до прямой равно 7. Найдите площади обеих фигур, если известно, что $AB = 4$ и $BC = 10$.
5. Найдите наибольшее возможное значение произведения $x \cdot y$, если x и y удовлетворяют равенству $5|x| + 3|y| = 8$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
биолого-почвенный факультет
(экология)

Вариант 1

1. При каких значениях x числа $2-4x$, $3-3x$ и $7-6x$ являются членами некоторой арифметической прогрессии, разность которой больше 3, и при этом $3-3x$ и $7-6x$ являются третьим и двадцать третьим ее членами соответственно?
2. Решите уравнение $\log^2_{x+6}(x+5)=\log^2_{8-x}(x+5)$.
3. Решите уравнение $2x+5=\sqrt{x^4-6x^3-22x^2+20x+25}$.
4. Решите неравенство $\sin x+\sin 2x>2+4\cos x$.
5. В остроугольном треугольнике ABC расстояние от вершины C до точки пересечения высот равно 2, $AB=4$. Найдите радиус описанной окружности.

Вариант 2

1. При каких значениях x числа $3-3x$, $5-6x$ и $6-4x$ являются членами некоторой арифметической прогрессии, разность которой больше 2, и при этом $3-3x$ и $5-6x$ являются третьим и двадцать вторым ее членами соответственно?
2. Решите уравнение $\log^2_{1-x}(x+3)=\log^2_{x+7}(x+3)$.
3. Решите уравнение $3x+7=\sqrt{x^4-4x^3-10x^2+42x+49}$.
4. Решите неравенство $\cos x+4\sin x<2+\sin 2x$.
5. Радиус окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC, равен 7, расстояние от вершины A до точки пересечения высот равно 6. Найдите BC.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
факультет менеджмента
(финансовый менеджмент)

Вариант 1

1. В конечной арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 15 больше, чем сумма чисел с четными номерами. Чему равно число членов прогрессии, если известно, что первый член равен 31, а предпоследний лежит в интервале $\left(4; \frac{9}{2}\right)$?
2. Решите уравнение $\sin 4x + 2\cos 2x = (\sin x - \cos x)^4$.
3. Решите неравенство $4 - x < 5\sqrt{|2 + x|}$.
4. На координатной плоскости *Oxy* расположен прямоугольный треугольник *ABC*. Вершина *C* прямого угла лежит на положительной полуоси ординат, вершина *A* имеет координаты $(2; 0)$, а абсцисса вершины *B* равна 8. Найдите ее ординату, если известно, что площадь треугольника равна 34.
5. Изобразите на плоскости *Oxy* множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|2x - y| \le |3 - x + |y||$.

Вариант 2

1. В конечной арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 10 больше, чем сумма чисел с четными номерами. Чему равно число членов прогрессии, если известно, что первый член равен 21, а предпоследний лежит в интервале $(4; 5)$?
2. Решите уравнение $2\sin 4x - 4\cos 2x = (\sin x + \cos x)^4$.
3. Решите неравенство $2 + x < 5\sqrt{|4 - x|}$.
4. На координатной плоскости *Oxy* расположен прямоугольный треугольник *ABC*. Вершина *C* прямого угла лежит на положительной полуоси абсцисс, вершина *A* имеет координаты $(0; 1)$, а ордината вершины *B* равна 8. Найдите ее абсциссу, если известно, что площадь треугольника равна 17.
5. Изобразите на плоскости *Oxy* множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x - 3y| \ge |2 - y + |x||$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
факультет менеджмента
(государственное и муниципальное управление)

Вариант 1

1. В конечной арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 15 больше, чем сумма чисел с четными номерами. Чему равно число членов прогрессии, если известно, что первый член равен 31, а предпоследний лежит в интервале $\left(4;\ \frac{9}{2}\right)$?
2. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.
3. Решите уравнение $4 - x = 5\sqrt{|2 + x|}$.
4. На координатной плоскости Oxy расположен прямоугольный треугольник ABC. Вершина C прямого угла лежит на положительной полуоси ординат, вершина A имеет координаты $(2;\ 0)$, а абсцисса вершины B равна 8. Найдите ее ординату, если известно, что площадь треугольника равна 34.
5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|2x - y| = |3 - x + |y||$.

Вариант 2

1. В конечной арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 10 больше, чем сумма чисел с четными номерами. Чему равно число членов прогрессии, если известно, что первый член равен 21, а предпоследний лежит в интервале $(4;\ 5)$?
2. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.
3. Решите уравнение $2 + x = 5\sqrt{|4 - x|}$.
4. На координатной плоскости Oxy расположен прямоугольный треугольник ABC. Вершина C прямого угла лежит на положительной полуоси абсцисс, вершина A имеет координаты $(0;\ 1)$, а ордината вершины B равна 8. Найдите ее абсциссу, если известно, что площадь треугольника равна 17.
5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|x - 3y| = |2 - y + |x||$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
химический факультет

Вариант 1

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{3}{2}$ и их на четыре меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1. Найдите ее последний член.
2. Решите уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}$.
3. Решите неравенство $3^{2x} + \sqrt{4+3^x} \le 4$.
4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах B и E — прямые, а остальные четыре угла равны между собой. Найдите площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14+8\sqrt{2}$, $AB=2$, $BC=5$, $DE=4$.
5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $(2+y)\sqrt{x-1} = x+2y-1$.

Вариант 2

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{1}{2}$ и их на три меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1. Найдите ее последний член.
2. Решите уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$.
3. Решите неравенство $2^{2x} + \sqrt{9+2^x} \le 9$.
4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах C и F — прямые, а остальные четыре угла равны между собой. Найдите площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14+4\sqrt{2}$, $AF=3$, $CD=1$, $EF=4$.
5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $(3+x)\sqrt{y+1} = 1+3x+y$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Из пункта A выходят три дороги. Средняя дорога образует с двумя крайними углы в $60°$. Все три дороги пересекаются автострадой. Ровно в полдень по крайним дорогам отправились путники P и Q. Спустя 40 минут по средней дороге отправился путник R. В 13 часов 10 минут все трое одновременно вышли на автостраду. Скорости P и R были равны 4 км/ч. Найдите скорость Q. (Все четыре дороги предполагаются прямолинейными.)
2. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7x-12-x^2}{x^2+x-6} \geq \log_{x^2} \frac{1}{x}$.
4. Точки M и N лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. Найдите площадь треугольника CMN, если известно, что $AM = BN = 3$, $AN = 7$, $CM = 6$.
5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(2+y)\sqrt{x-1} \geq x + 2y - 1$.

Вариант 2

1. Из пункта A выходят три дороги. Средняя дорога образует с двумя крайними углы в $60°$. Все три дороги пересекаются автострадой. Ровно в полдень по средней дороге отправился пешеход P. За 15 минут до этого по крайним дорогам отправились пешеход Q и велосипедист R. В 12 часов 45 минут все трое одновременно оказались на автостраде. Скорости пешеходов P и Q были равны 4 км/ч. Найдите скорость R. (Все четыре дороги предполагаются прямолинейными.)
2. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x^2-7x}{11x-x^2-30} \geq \log_{x^2} x$.
4. Точки P и Q лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. Найдите площадь треугольника CPQ, если известно, что $AP = BQ = 7$, $AQ = 4$, $CP = 5$.
5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(3+x)\sqrt{y+1} \leq 1 + 3x + y$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
геологический факультет

Вариант 1

1. Из пункта *A* выходят три дороги. Средняя дорога образует с двумя крайними углы в $60°$. Все три дороги пересекаются автострадой. Ровно в полдень по крайним дорогам отправились путники *P* и *Q*. Спустя 40 минут по средней дороге отправился путник *R*. В 13 часов 10 минут все трое одновременно вышли на автостраду. Скорости *P* и *R* были равны 4 $\text{км}/\text{ч}$. Найдите скорость *Q*. (Все четыре дороги предполагаются прямолинейными.)
2. Решите уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}$.
3. Решите неравенство $3^{2x} + \sqrt{4+3^x} \le 4$.
4. В выпуклом шестиугольнике *ABCDEF* углы при вершинах *B* и *E* — прямые, а остальные четыре угла равны между собой. Найдите площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14+8\sqrt{2}$, $AB=2$, $BC=5$, $DE=4$.
5. Изобразите на плоскости *Oxy* множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $(2+y)\sqrt{x-1} = x+2y-1$.

Вариант 2

1. Из пункта *A* выходят три дороги. Средняя дорога образует с двумя крайними углы в $60°$. Все три дороги пересекаются автострадой. Ровно в полдень по средней дороге отправился пешеход *P*. За 15 минут до этого по крайним дорогам отправились пешеход *Q* и велосипедист *R*. В 12 часов 45 минут все трое одновременно оказались на автостраде. Скорости пешеходов *P* и *Q* были равны 4 $\text{км}/\text{ч}$. Найдите скорость *R*. (Все четыре дороги предполагаются прямолинейными.)
2. Решите уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$.
3. Решите неравенство $2^{2x} + \sqrt{9+2^x} \le 9$.
4. В выпуклом шестиугольнике *ABCDEF* углы при вершинах *C* и *F* — прямые, а остальные четыре угла равны между собой. Найдите площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14+4\sqrt{2}$, $AF=3$, $CD=1$, $EF=4$.
5. Изобразите на плоскости *Oxy* множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $(3+x)\sqrt{y+1} = 1+3x+y$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
факультет международных отношений
(прикладная информатика (в гуманитарной сфере))

Вариант 1

1. Первые три члена геометрической прогрессии, модуль суммы которых равен 196, являются соответственно двенадцатым, третьим и шестым членами некоторой убывающей арифметической прогрессии. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии.
2. Решите уравнение $\sin 5x + \sin 3x = \frac{1}{2} + \cos 2x - \sin x$.
3. Решите уравнение $(x-1)\sqrt{4+2x} = x - \sqrt{4-x^2}$.
4. Площадь трапеции *ABCD* равна *S*. Основание *AB* в три раза больше основания *CD*. На боковой стороне *AD* выбрана точка *K* такая, что треугольники *ABK* и *CBK* равновелики. Найдите площадь треугольника *CDK*.
5. Изобразите на плоскости *Oxy* множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|y^2 - 4| = x^2 + 4x$.

Вариант 2

1. Первые три члена геометрической прогрессии, модуль суммы которых равен 143, являются соответственно вторым, тринадцатым и седьмым членами некоторой возрастающей арифметической прогрессии. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии.
2. Решите уравнение $\cos 3x - \cos 5x = \frac{1}{2} - \cos 2x + \cos x$.
3. Решите уравнение $(2x+1)\sqrt{1-x} = x + \sqrt{1-x^2}$.
4. Площадь трапеции *ABCD* равна *S*. Основание *BC* в два раза меньше основания *AD*. На боковой стороне *AB* выбрана точка *M* такая, что треугольники *ADM* и *BCM* равновелики. Найдите площадь треугольника *CDM*.
5. Изобразите на плоскости *Oxy* множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|x^2 - 1| = 2y - y^2$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
факультет психологии
(специальность)

Вариант 1

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{3}{2}$ и их на четыре меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1. Найдите ее последний член.
2. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7x - 12 - x^2}{x^2 + x - 6} \geq \log_{x^2} \frac{1}{x}$.
4. Точки *M* и *N* лежат на гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC*. Найдите площадь треугольника *CMN*, если известно, что $AM = BN = 3$, $AN = 7$, $CM = 6$.
5. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $4\sqrt{2a - 2^x} = a^2 - 2^x$ имеет единственное решение.

Вариант 2

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{1}{2}$ и их на три меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1. Найдите ее последний член.
2. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x^2 - 7x}{11x - x^2 - 30} \geq \log_{x^2} x$.
4. Точки *P* и *Q* лежат на гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC*. Найдите площадь треугольника *CPQ*, если известно, что $AP = BQ = 7$, $AQ = 4$, $CP = 5$.
5. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $4\sqrt{2^x - 2a} = a^2 + 2^x$ имеет единственное решение.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2006 год
факультет психологии
(бакалавриат)

Вариант 1

1. В 12 часов дня из A в B выехал мотоцикл. Спустя 24 минуты из B в A выехал автомобиль. Определите момент их встречи, если известно, что в пункт назначения автомобиль прибыл на 6 минут раньше мотоцикла и что скорость автомобиля в два раза больше скорости мотоцикла.
2. Решите неравенство $\cos x < \sqrt{1-\sin 2x}$.
3. Решите уравнение $\dfrac{\log_2(4x-x^2)}{3x+2} = \dfrac{\log_7(4x-x^2)}{x+1}$.
4. Стороны квадрата $ABCD$ равны 2. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек квадрата, для которых расстояние до середины стороны AB не больше расстояния до каждой вершины квадрата.
5. При каких a минимальное значение функции $f(x) = |x^2 + ax - 7|$ на отрезке $[1;\,2]$ равно 0?

Вариант 2

1. В 6 часов утра из M в N выехал велосипед. Спустя 30 минут из N в M выехал мотоцикл. Определите момент их встречи, если известно, что в пункт назначения мотоцикл прибыл на 2 минуты позже велосипеда и что скорость мотоцикла в три раза больше скорости велосипеда.
2. Решите неравенство $\sin x < \sqrt{1+\sin 2x}$.
3. Решите уравнение $\dfrac{\log_2(2x-x^2)}{2x+3} = \dfrac{\log_5(2x-x^2)}{x+1}$.
4. Стороны ромба $ABCD$ равны 2, угол BAD равен $120°$. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек ромба, для которых расстояние до вершины A не больше расстояния до каждой из трех остальных вершин.
5. При каких a минимальное значение функции $f(x) = |x^2 - ax - 6|$ на отрезке $[1;\,3]$ равно 0?

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup [0; 1) \cup (1; +\infty)$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right\}$.
3. Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
4. Ответ: радиус окружности равен $\frac{2}{9}$ или 1 или 2.
5. Ответ: радиус сечения равен $\frac{\sqrt{60}}{5}$.

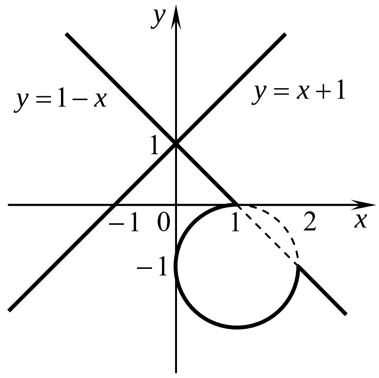
Ответы к варианту 2

1. Ответ: $b \in (-\infty; 0] \cup \{1; 2; 3\} \cup [4; +\infty)$.
2. Ответ: $\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.
3. Ответ: $\left(\frac{-2-\sqrt{10}}{3}; \frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right)$.
4. Ответ: радиус окружности равен $\frac{1}{2}$ или 1 или 3.
5. Ответ: радиус сечения равен $\frac{9}{\sqrt{68}}$.

Филологический факультет
(лингвистика, прикладная информатика (в области искусств и гуманитарных наук))

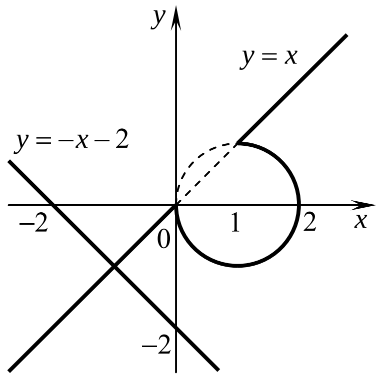
Ответы к варианту 1

1. Ответ: скорость велосипедиста равна 12 км / ч .
2. Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ 2\right]$.
3. Ответ: $\left\{\pi + 2\pi k;\ \frac{\pi}{7} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{7} + 2\pi k;\ \frac{11\pi}{7} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: радиус равен $\frac{1}{3}$, или $\frac{3}{4}$, или 3.
5. Ответ: см. рис.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: скорость мотоциклиста равна 54 км / ч .
2. Ответ: $[3;\ +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{14} + 2\pi k;\ \frac{15\pi}{14} + 2\pi k;\ \frac{23\pi}{14} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: радиус равен 1, или $\frac{25}{9}$, или $\frac{25}{4}$, или 25.
5. Ответ: см. рис.



Экономический факультет
(прикладная информатика (в экономике),
математические методы в экономике)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: пряников было в 6 раз больше, чем конфет.
2. Ответ: $[-1;\,0)\cup\left[\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\,+\infty\right)$.
3. Ответ: $\{1+\sqrt{2}\}$.
4. Ответ: площади фигур равны 20 и 10.
5. Ответ: наибольшее значение $x\cdot y$ равно $\dfrac{25}{21}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $x:y=4$.
2. Ответ: $[-2;\,0)\cup\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\,\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}\right]$.
3. Ответ: $\left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
4. Ответ: площади фигур равны 9 и 15.
5. Ответ: наибольшее значение $x\cdot y$ равно $\dfrac{16}{15}$.

Экономический факультет
(экономическая теория, мировая экономика,
экономика и управление на предприятии, менеджмент организации,
бухгалтерский учет, анализ и аудит, финансы и кредит, экономика)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 15 мальчиков.
2. Ответ: $\left\{\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: площади фигур равны 20 и 10.
5. Ответ: наибольшее значение $x \cdot y$ равно $\frac{25}{21}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 16 ежей.
2. Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \frac{\sqrt{13}+3}{2}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: площади фигур равны 9 и 15.
5. Ответ: наибольшее значение $x \cdot y$ равно $\frac{16}{15}$.

Биолого-почвенный факультет
(экология)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: при $x = -22$.
2. Ответ: $\{-4; 1; 1 + 4\sqrt{3}\}$.
3. Ответ: $\{0; 3 + \sqrt{35}\}$.
4. Ответ: $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \right)$.
5. Ответ: радиус описанной окружности равен $\sqrt{5}$.

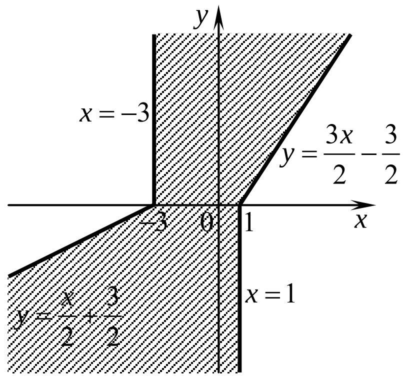
Ответы к варианту 2

1. Ответ: при $x = -\frac{43}{2}$.
2. Ответ: $\{-2; \sqrt{15} - 3\}$.
3. Ответ: $\{0; 2 + \sqrt{23}\}$.
4. Ответ: $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right)$.
5. Ответ: $BC = 4\sqrt{10}$.

Факультет менеджмента
(финансовый менеджмент)

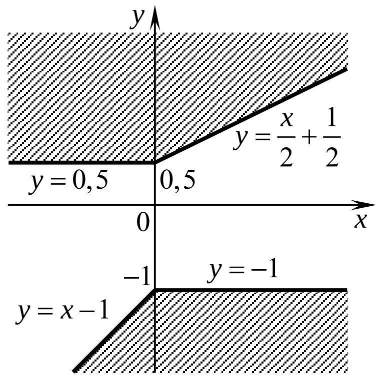
Ответы к варианту 1

1. Ответ: число членов прогрессии равно 7 или 18.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{2}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(-11;\,-6)\cup(-1;\,+\infty)$.
4. Ответ: ордината вершины B равна 10 или $\frac{65}{2}$.
5. Ответ: см. рис.



Ответы к варианту 2

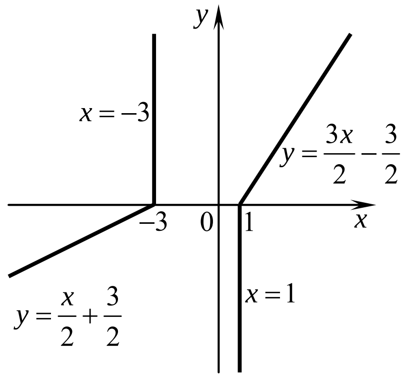
1. Ответ: число членов прогрессии равно 5 или 12.
2. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(-\infty;\,3)\cup(8;\,13)$.
4. Ответ: абсцисса вершины B равна 6 или $\frac{129}{4}$.
5. Ответ: см. рис.



Факультет менеджмента
(государственное и муниципальное управление)

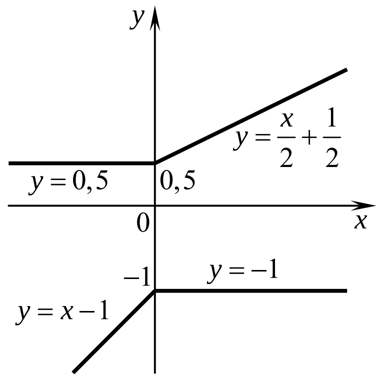
Ответы к варианту 1

1. Ответ: число членов прогрессии равно 7 или 18.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\{-11;\,-6;\,-1\}$.
4. Ответ: ордината вершины B равна 10 или $\frac{65}{2}$.
5. Ответ: см. рис.



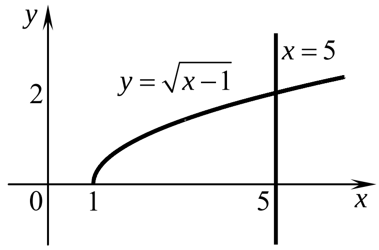
Ответы к варианту 2

1. Ответ: число членов прогрессии равно 5 или 12.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\{3;\,8;\,13\}$.
4. Ответ: абсцисса вершины B равна 6 или $\frac{129}{4}$.
5. Ответ: см. рис.



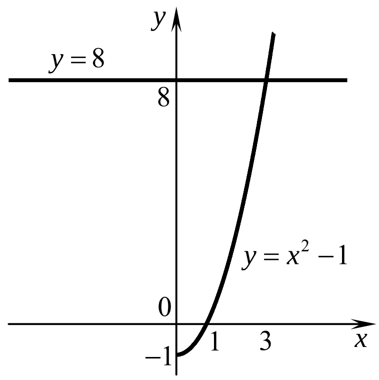
Химический факультет

Ответы к варианту 1



1. Ответ: последний член прогрессии равен $\frac{59}{110}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}: k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-\infty;\ \log_3\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$.
4. Ответ: площадь шестиугольника равна 39.
5. Ответ: см. рис.

Ответы к варианту 2

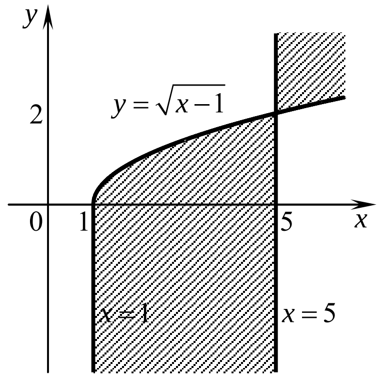


1. Ответ: последний член прогрессии равен $\frac{4}{11}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}: k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-\infty;\ \log_2\frac{\sqrt{33}-1}{2}\right]$.
4. Ответ: площадь шестиугольника равна 23.
5. Ответ: см. рис.

Факультет географии и геоэкологии

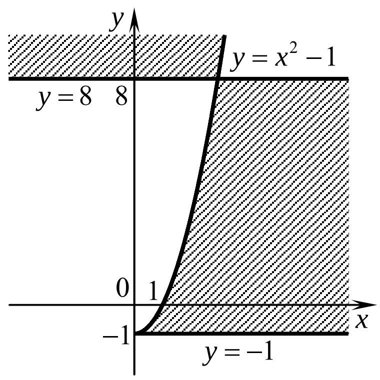
Ответы к варианту 1

1. Ответ: скорость Q равна 3 км/ч.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(0; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right] \cup (3; 4)$.
4. Ответ: площадь треугольника CMN равна $\frac{3\sqrt{39}}{2}$.
5. Ответ: см. рис.



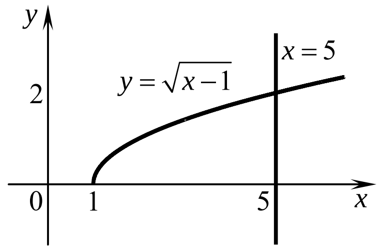
Ответы к варианту 2

1. Ответ: скорость R равна 12 км/ч.
2. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(0; 1) \cup (1; 2] \cup \left[3; \frac{7}{2}\right)$.
4. Ответ: площадь треугольника CPQ равна $3\sqrt{6}$.
5. Ответ: см. рис.



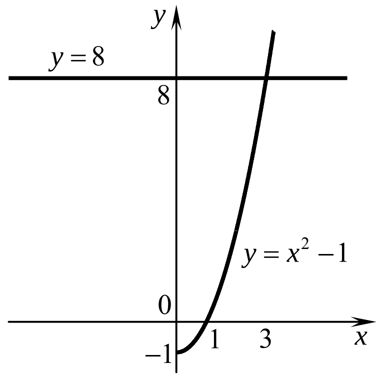
Геологический факультет

Ответы к варианту 1



1. Ответ: скорость Q равна $3\ \text{км}/\text{ч}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-\infty;\ \log_3\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$.
4. Ответ: площадь шестиугольника равна 39.
5. Ответ: см. рис.

Ответы к варианту 2

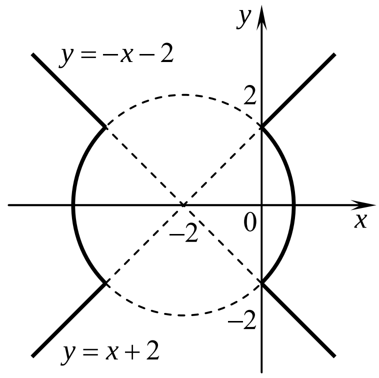


1. Ответ: скорость R равна $12\ \text{км}/\text{ч}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-\infty;\ \log_2\frac{\sqrt{33}-1}{2}\right]$.
4. Ответ: площадь шестиугольника равна 23.
5. Ответ: см. рис.

Факультет международных отношений
(прикладная информатика (в гуманитарной сфере))

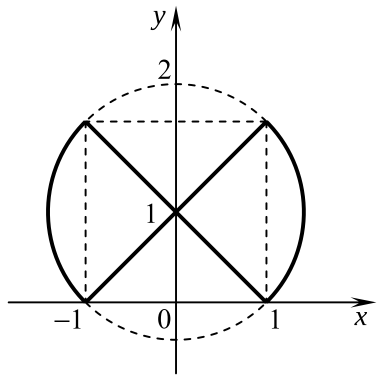
Ответы к варианту 1

1. Ответ: сумма положительных членов прогрессии равна 420.
2. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi k;\ (-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{0;\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right\}$.
4. Ответ: площадь треугольника CDK равна $\frac{S}{10}$.
5. Ответ: см. рис.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: сумма отрицательных членов прогрессии равна -990.
2. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k;\ -\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3};\ \frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{0;\ \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right\}$.
4. Ответ: площадь треугольника CDM равна $\frac{5S}{9}$.
5. Ответ: см. рис.



Факультет психологии
(специальность)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: последний член прогрессии $\frac{59}{110}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(0;1)\cup\left(1;\frac{5}{3}\right]\cup(3;4)$.
4. Ответ: площадь треугольника CMN равна $\frac{3\sqrt{39}}{2}$.
5. Ответ: $a\in[2;\sqrt[3]{32}]\cup\{\sqrt{5}+1\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: последний член прогрессии $\frac{4}{11}$.
2. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(0;1)\cup(1;2]\cup\left[3;\frac{7}{2}\right)$.
4. Ответ: площадь треугольника CPQ равна $3\sqrt{6}$.
5. Ответ: $a\in(-\sqrt[3]{32};0]\cup\{\sqrt{5}-1\}$.

Факультет психологии
(бакалавриат)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: встреча состоялась в 12 часов 36 минут.
2. Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$.
3. Ответ: $\{2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\}$.
4. Ответ: площадь равна $\dfrac{9}{8}$.
5. Ответ: $a \in \left[\dfrac{3}{2};\ 6\right]$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: встреча состоялась в 6 часов 33 минуты.
2. Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname{arctg} 2 - \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$.
3. Ответ: $\{1\}$.
4. Ответ: площадь равна $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
5. Ответ: $a \in [-5;\ 1]$.